# Ответы

## Ответы к задаче 1

**1.1.** Три. **1.2.** Три. **1.3.** $x_1$, $x_2$, $x_3$.

**1.4.** 2; 0; ~~2~~; свободные члены системы не содержат неизвестных и записываются обычно в правых частях уравнений.

**1.5.** Уравнения называют линейными, если они представляют собой линейную комбинацию неизвестных $x_1$, $x_2$, $x_3$ данной системы; $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, где *a, b, c, d* – заданные постоянные числа.

| | |
|---|---|
| **Признак линейного уравнения** | Все неизвестные в линейное уравнение входят **в первой степени** и между собой **не перемножаются.** |

**1.6.** Квадратная.

**1.7.** Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $x_1$, $x_2$, $x_3$, или квадратная система линейных уравнений третьего порядка.

**1.8**

| | |
|---|---|
| **Определение основной матрицы системы** | Матрица, составленная **из коэффициентов при неизвестных,** называется основной матрицей системы. |

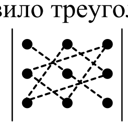
**1.9.**

| | |
|---|---|
| **Определение расширенной матрицы системы** | Матрица, полученная из основной **присоединением столбца свободных членов**, называется расширенной матрицей системы. |

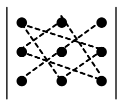
**1.10.**

| | |
|---|---|
| **Определение решения СЛУ** | Решением системы линейных уравнений называется такая **совокупность значений неизвестных**, **при подстановке** которой вместо неизвестных в каждое уравнение системы, **все уравнения** системы обращаются в **тождества**. |

Правило треугольников:

**1.11.** 

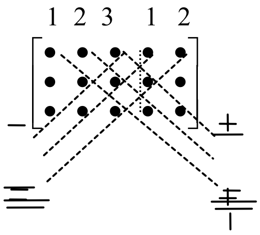
+

**1.12.** 

−

**1.13.** Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного $x_1$, надо в определителе основной матрицы системы ***первый*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

**1.14.** Для того, чтобы составить таблицу Саррюса, нужно к заданному определителю третьего порядка дописать справа первый и второй столбцы и взять **с тем же знаком произведения** элементов **главной диагонали** и элементов, расположенных на прямых, параллельных главной диагонали, и ***с противоположным знаком*** – ***произведения*** элементов ***побочной диагонали*** и элементов, расположенных на прямых, параллельных побочной диагонали (см. рис.).




**1.15.** Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного $x_2$, надо в определителе основной матрицы системы ***второй*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

**1.16.** Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного $x_3$, надо в определителе основной матрицы системы ***третий*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

| | |
|---|---|
| **1.17.**<br><br>**Определение суммы двух матриц.** | Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ с одинаковым количеством $m$ строк и $n$ столбцов называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.)$.<br>Обозначение: $C=A+B$. |

**1.18.** а) Сумма данных матриц не существует, т. к. они разных размеров.

$$б)\ C=A+B:\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -3\\ 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4\\ -5 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3 & -1+4\\ -2-5 & -3+0\\ 5+1 & 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -7 & -3\\ 6 & 4\end{pmatrix}.$$

**1.19.**

| | |
|---|---|
| **Определение произведения матрицы на число** | Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на число $\lambda$ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы $A$ на число $\lambda$: $$\lambda A=\lambda\left(a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right), \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,m; \\ j=1,2,\ldots,n. \end{pmatrix}.$$ |

**1.20.** $$\lambda A=-1\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 2 & -1\cdot 0 & -1\cdot(-1) \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 1 & -1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.21.**

| | |
|---|---|
| **Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец** | Произведением матрицы – строки, имеющей $n$ столбцов, на матрицу – столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента,** который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1\times n}\cdot B_{n\times 1}=C_{1\times 1}$, |

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1}\right).$$

**1.22.** $$C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}=\left(-1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot(-4)+4\cdot 3\right)=\left(16\right).$$

**1.23.**

| | |
|---|---|
| **Условие существования произведения двух матриц** | Произведение матриц $A\cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число <u>столбцов</u> матрицы** $A$ **равно числу <u>строк</u> матрицы** $B$, то есть $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$. При этом матрица – произведение имеет число строк матрицы $A$ и число столбцов матрицы $B$. |

**1.24.**

| | |
|---|---|
| **Определение перестановочных матриц** | Квадратные матрицы, **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными. |

**1.25.**

| | |
|---|---|
| **Определение произведения матриц** | Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей $m$ строк и $n$ столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую $n$ строк и $p$ столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая $m$ строк и $p$ столбцов, у которой элемент $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов $i$ – й строки матрицы $A$ и $j$ – го столбца матрицы $B$, |

то есть $\quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{pmatrix}.$

Произведение матриц обозначается $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

**Замечание.** Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент $c_{ij}$ матрицы $C$, стоящий на пересечении $i$ – й строки и $j$ – го столбца, есть скалярное произведение $i$ – й вектор – строки матрицы $A$ и $j$ – го вектор – столбца матрицы $B$.

**1.26.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1.27.** Матрицу $B$ нельзя умножить на матрицу $A$, так как число столбцов матрицы $B$ не равно числу строк матрицы $A$.

**1.28.**

| | |
|---|---|
| **Определение единичной матрицы** | Квадратная матрица, **на главной диагонали которой все элементы равны единице, а все остальные элементы нули,** называется единичной матри- |

| | |
|---|---|
| | цей и обозначается буквой $E$. |

**1.29.**

| | |
|---|---|
| **Определение обратной матрицы** | Обратной для матрицы $A$ называется такая матрица $A^{-1}$, что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. |

**1.30.**

| | |
|---|---|
| **Теорема существования обратной матрицы** | Для любой квадратной матрицы $A$, определитель которой не равен нулю $(\det A \neq 0)$, существует единственная обратная матрица $A^{-1}$. |

**1.31.**

| | |
|---|---|
| **Определение невырожденной и вырожденной матриц** | Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной.** Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной.** |

**1.32.** Чтобы найти обратную для $A$ матрицу $A^{-1}$, можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы $A$ $(\det A \neq 0)$.

   Если $\det A = 0$, то матрица $A$ не имеет обратной $A^{-1}$.
2. Составить союзную матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы $A$: $(A_{ij})$.
3. Транспонировать союзную матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную союзную матрицу на определитель матрицы $A$: $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^T}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$.

1.32.1. 1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$.

2. $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вспомните, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. $\left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица: $A^{-1} \cdot A =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

**1.33.** Обратная матрица $A^{-1}$ матрицы $A$ имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$=$ 8+4+3+24=39 $\neq 0$, то есть матрица $A$ – невырожденная, и, значит, существует матрица $A^{-1}$. Находим: $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11$,

$A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14$, $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$, $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$,

$A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Или $A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$,

то есть обратная матрица найдена верно.

## Ответы к задаче 2

**2.1.** Система состоит из четырёх уравнений.
**2.2.** В данной системе уравнений пять неизвестных.
**2.3.** Задана система четырёх линейных уравнений с пятью неизвестными.
**2.4** Алгоритм 1. в задаче 1.0, (см. с.9).
**2.5.** $r$ = Rang $A$ = Rang $B$ = $n$. **2.6.** $r$ = Rang $A$ = Rang $B$ < $n$.
**2.7.** Совместна, неопределённа.
**2.8.Общее решение системы линейных уравнений** можно получить, руководствуясь, например, следующим планом:
а) выбрать базисный минор (обычно это минор, под главной диагональю которого – все нули);
б) перенести свободные неизвестные к свободным членам, то есть в правые части уравнений;
в) обратным ходом метода Гаусса выразить базисные неизвестные через свободные неизвестные.

**2.9.** $M_r=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$ – базисный минор для системы, которая решается в качестве примера. $M_r\neq 0$; $r$ = Rang $A$ = Rang $B$ =3.

**2.10.** $x_2$, $x_3$, $x_4$ – неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор примера.

**2.11.** $x_1$, $x_5$ – свободные неизвестные примера. Коэффициенты при свободных неизвестных **не вошли** в базисный минор.

**2.12.** Решение называется **общим** (в общем решении базисные неизвестные выражены через свободные неизвестные).

**2.13.** Все свободные неизвестные можно приравнять нулю или каким-нибудь другим постоянным числам. Например, свободные неизвестные $x_1=0$, $x_5=0$, тогда базисные неизвестные получатся: $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=0$. Это частное решение можно записать и в виде матрицы столбца:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

**2.14.**

| | |
|---|---|
| **Определение СОЛУ** | Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**. <br> $AX = 0$ – матричная запись СОЛУ. |

**2.15.** Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое тривиальное решение, когда все неизвестные равны нулю: $X = 0$, $\Rightarrow \quad A \cdot 0 = 0$ . Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому по теореме Кронекера – Капели **СОЛУ всегда совместна**.

**2.16.**

| | |
|---|---|
| **Определение ФСЧР СОЛУ** | **Фундаментальной системой частных решений** системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы. |

Если $n$ – число неизвестных системы, $r$ – её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

**2.17.** Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы $E$ порядка $k = n - r$ .

**Замечание.** ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнивая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы $A$ порядка $k = n - r$, если $\det A \neq 0$

### Ответы к задаче 3

**3.1.** В числителе формулы записано скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ .

**3.2.** В знаменателе формулы записано произведение длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

**3.3.** Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов.

**3.4. Координаты вектора** $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки *B*, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки *A*, являющейся началом вектора.

**3.5.** $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1)\ \vec{i} + (y_2 - x_2)\ \vec{j} + (y_3 - x_3)\ \vec{k}$.

**3.6. Скалярное произведение** двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

**3.7.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = (-2)\cdot 5 + 5\cdot 4 + (-4)\cdot 1 = 6$.

**3.8. Длина вектора** в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора.

**3.9.**

| | |
|---|---|
| **Определение компланарных векторов** | Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными. |

**3.10.**

| | |
|---|---|
| **Условие компланарности векторов** | **Смешанное** произведение ненулевых компланарных векторов равно **нулю**. |

**3.11.Смешанное произведение трех векторов** получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

**3.12. В ортонормированном базисе смешанное произведение** равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов.

Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения:

1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный;

2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

**3.13.** Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, так как их смешанное произведение не равно нулю.

**3.14.**

| | |
|---|---|
| **Геометрический смысл смешанного произведения** | **Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. |

**3.15.** Объём пирамиды $V_2$, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен одной шестой объёма параллелепипеда $V_1$, построенного на этих же векторах как на ребрах, то есть $V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \quad \overline{AC}, \quad \overline{AD}\right)\right|$.

**3.16.**

| | |
|---|---|
| **Геометрический смысл векторного произведения** | **Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. |
| **Геометрический смысл векторного произведения** | **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу. |

**3.17. В ортонормированном базисе векторное произведение** находят, используя определитель, в 1-ой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во 2-ой строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в 3-ей строке – координаты правого из перемножаемых векторов. Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

**3.18.** $x_K = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$.

## Ответы к задаче 4

**4.1.** Уравнение **прямой,** проходящей **через две данные точки:**

$A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$: $\qquad \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

**4.2.** .**Координаты вектора нормали** $\overrightarrow{N} = (n_x, n_y)$ к прямой можно найти как ***коэффициенты при x и y в общем уравнении*** этой прямой:

$$n_x x + n_y y + c = 0.$$

**4.3.** $\dfrac{x - x_B}{m} = \dfrac{y - y_B}{n}$.

**4.4.** Надо воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки (см. ответ 4.1)

**4.5.** Это уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

**4.6.** $\dfrac{x - x_A}{m} = \dfrac{y - y_A}{n}$.

### Ответы к задаче 5

**5.1.** Уравнение **плоскости**, проходящей через **три** данные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0, \text{ если } \begin{array}{l} A(x_A, y_A, z_A), \\ B(x_B, y_B, z_B), \\ C(x_C, y_C, z_C). \end{array}$$

**5.2.Общее** уравнение **плоскости** имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ – перпендикулярный плоскости вектор. Для того, чтобы получить общее уравнение плоскости из предыдущего уравнения, нужно привести подобные слагаемые, вычислив определители второго порядка и раскрыв скобки.

**5.3. Координаты нормального** к плоскости **вектора** равны ***коэффициентам при переменных x, y, z в общем уравнении*** этой плоскости:

$n_x x + n_y y + n_z z + d = 0, \quad \overrightarrow{N} = (n_x, n_y, n_z)$.

**5.4.** Вектор $\overline{N}$ параллелен прямой $\alpha$, то есть является **направляющим вектором** прямой $\alpha$.

**5.5.** $\dfrac{x - x_D}{m} = \dfrac{y - y_D}{n} = \dfrac{z - z_D}{p}$.

**5.6.** Уравнения прямой называются **каноническими** уравнениями.

**5.7.** Нужно выбрать **параметрические** уравнения прямой. Параметрические уравнения можно получить из канонических, приравняв каждую дробь параметру $t$:

$$\begin{cases} x = mt + x_D, \\ y = nt + y_D, \\ z = pt + x_{D.} \end{cases}$$

**5.8.** Надо подставить координаты этой точки в уравнения плоскости $p$ и прямой $\alpha$. При этом должны получиться тождества, если координаты точки найдены правильно.

**5.9**. $z = 0$: $\overrightarrow{N} = \vec{k}$, $0 \in p$.

**5.10.**Нужно подставить координаты точки в уравнения прямой $\alpha$ и получить тождества.

**5.11.** $y = 0$: $\overrightarrow{N} = \vec{j}$, $0 \in p$.

**5.12.** $x = 0$: $\overrightarrow{N} = \vec{i}$, $0 \in p$.

**5.13.** Если уравнение плоскости $p$ : $N_x x + N_y y + N_z z + N_0 = 0$, а координаты точки $D(x_D, y_D, z_D)$, то расстояние $\rho(D, p)$ от точки $D$ до плоскости $p$ можно найти по формуле:

$$\rho(D, p) = \frac{|N_x x_D + N_y y_D + N_z z_D + N_0|}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}.$$

**5.14**.

| | |
|---|---|
| **Правило нахождения расстояния от точки до плоскости** | Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, надо в общее уравнение плоскости подставить координаты этой точки и модуль полученного числа разделить на длину нормального к плоскости вектора. |

**5.15**. Расстояние между точкой и плоскостью можно найти также, вычислив длину вектора, образованного этой точкой и точкой пересечения перпендикуляра из этой точки к плоскости и плоскости.

## Ответы к задаче 6

**6.1.**

| | |
|---|---|
| **Определение линии на плоскости** | Уравнение *F(x,y)=0* называется уравнением линии *L* (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты *x* и *y* любой точки, лежащей на линии *L*, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии. |

**6.2.**

| | |
|---|---|
| **Определение окружности** | **Окружностью** называется множество всех точек плоскости, ***равноудаленных от одной точки*** этой плоскости – центра окружности. |

**Признак уравнения окружности** | **1.** Коэффициенты при квадратах переменных $x$ и $y$ равны; **2.** Отсутствует произведение $xy$ переменных.

**6.3.** $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Чтобы привести **общее уравнение окружности**

$a_{11}x^2+a_{10}x+a_{11}y^2+a_{01}y+a_{00}=0$ **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным $x$ и $y$.

Например, приведем уравнение кривой

$$x^2-2x+y^2+6y+6=0$$

к каноническому виду:

$$x^2-2x+y^2+6y+6=$$

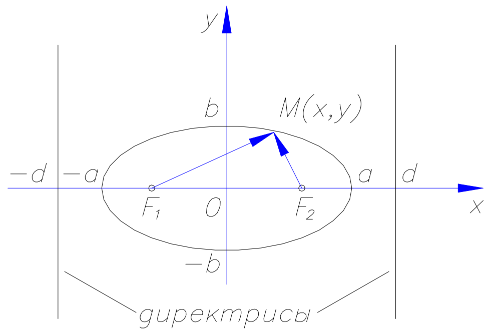
$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4.$$

Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M$ (1,–3).

**6.4.**

**Определение эллипса** | **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a***.

**6.5.**




$a$ – большая полуось эллипса;
$b$ – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2=a^2-b^2$, $c$ – фокусное расстояние эллипса;
$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$, $\varepsilon -$ эксцентриситет эллипса;
$\vec{r}_1=\overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r}_2=\overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы – векторы;

по определению $\left|\vec{r}_1+\vec{r}_2\right|=2a$. Прямые $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm d$ называются директрисами эллипса.

**Каноническое** уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

**Строят** эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат.
Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0\ (x_0,\ y_0)$ центром имеет вид

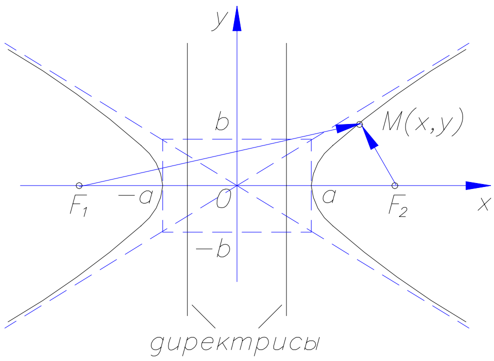
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Чтобы привести **общее уравнение эллипса** $a_{11}x^2+a_{10}x+a_{22}y^2+a_{01}y+a_{00}=0,$ где коэффициенты $a_{11}$ и $a_{22}$ должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным *x* и *y*.

**6.6.**

| | |
|---|---|
| **Определение гиперболы** | **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.*** |

**6.7.**




*a* –действительная полуось гиперболы;
*b* – мнимая полуось гиперболы;
$F_1(-c,0)$ и $F_2\,(c,0)$ – фокусы гиперболы;
$c^2=a^2+b^2$, *c* – фокусное расстояние гиперболы;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, $\varepsilon -$ эксцентриситет гиперболы; $\vec{r_1} = \overline{F_1M}$, $\vec{r_2} = \overline{F_2M}$ – фокальные радиусы – векторы; по определению $\left| \vec{r_1} - \vec{r_2} \right| = 2a$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

**Каноническое** уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**Строят** гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат,

а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы, – прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника, – помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(–a, 0)*, *(a, 0)*.

Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0\ (x_0,, y_0)$ центром имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы привести **общее уравнение гиперболы**

$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты $a_{11}$ и $a_{22}$ должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным *x* и *y*.

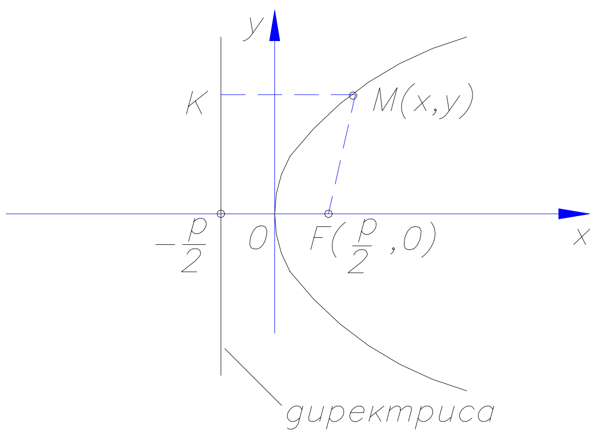
Гипербола, уравнение которой: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

**6.8.**

: плоско-

**Опр** ***вом рас-***
**пара** ***ой***, назы-
окус.

**6.9.**



**Каноническое** уравнение параболы: $y^2 = 2px$ .

**Строят** параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2},0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку *$M_0$ ($x_0$, $y_0$)* вершиной имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) .$$

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной *y* и удвоенный параметр *p* по переменной *x*.

Парабола, уравнение которой: $x^2 = 2py$ , называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$ . Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0,\frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$ .

**6.10**. Гипербола

**6.11.** [4], гл.III, §2, с. 88.

**6.12.** Эллипс.

**6.13.** [4], гл.III, §2, с. 79.

**6.14.** [4], гл.III, §2, с. 76, 77.

**6.15.** Координаты точки *A* удовлетворяют уравнению кривой.

**6.16.** $x^2 + y^2 = R^2$ **.**

**6.17.** $M_1(x_1, y_1)$ **,** $M_2(x_1, y_2)$ **,** $M_3(x_2, y_1)$ **,** $M_4(x_2, y_2)$ **.**

**6.18.** См. 6.5, 6.7.

## Ответы к задаче 7

**7.1.** Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча *OE*, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

**7.2.** $\rho -$ это расстояние от точки *M* до полюса *O*,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM*.

**7.3.** $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

**7.4.** Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если $k$ – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число $k$ – нечетное, то у розы $k$ лепестков.