

**Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов**

*Высшая математика II*

**САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ  
ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА**

*Издание четвертое*

*Рекомендовано  
Сибирским региональным учебно-методическим  
центром высшего профессионального образования  
в качестве учебного пособия для студентов  
и преподавателей вузов*

Издательство Томского политехнического университета  
Томск 2007

УДК 517  
Т19

- Тарбокова Т.В.  
Т19      Высшая математика II. Самоучитель решения задач. Предел и непрерывность функции одного аргумента: учебное пособие / Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 84 с.

Самоучитель решения задач является второй частью комплекта учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на формирование и развитие познавательной самостоятельности студентов. Содержит теоретические сведения, наборы задач для индивидуальных домашних заданий и алгоритмы их решения по следующим разделам: предел и непрерывность функции одного аргумента. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 517

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

*Рецензенты*

Доктор педагогических наук,  
профессор, зав. кафедрой математики,  
теории и методики обучения математике ТГПУ

*Э.Г. Гельфман*

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры общей математики ТГУ

*Н.Ю. Галанова*

© Томский политехнический университет, 2007

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2007

## Содержание

1. Введение .....	4
2. Вычисление предела функции одного аргумента Задание 1 (а – д) .....	5
3. Непрерывность функции одного аргумента. Задание 2 (а, б) .....	17
4. Ответы к Заданию 1 .....	23
5. Ответы к Заданию 2 .....	31
6. Указания к решению индивидуальных домашних заданий повышенного уровня сложности .....	34
7. Обязательные индивидуальные домашние задания .....	37
8. Дополнительные индивидуальные домашние задания .....	45
9. Индивидуальные домашние задания повышенного уровня сложности .....	57
10. Ответы к обязательным индивидуальным домашним заданиям 1 (а – д) .....	81
11. Список литературы .....	83

## Введение

Настоящее учебное пособие – самоучитель решения задач – предназначено в помощь первокурсникам любой формы обучения и содержит как теоретический материал, изложение которого иллюстрируется решенными примерами, так и варианты типовых домашних индивидуальных заданий по теме: **«Предел и непрерывность функции одного аргумента»**.

Теоретический материал, как правило, излагается в виде ответов на поставленные перед студентом вопросы. Вопросы занумерованы: 1-е число соответствует номеру решаемой задачи, 2-е – порядковому номеру вопроса. Ответы можно найти в конце учебного пособия (с. 24–34). Рекомендуется сделать **три закладки** в книгу, отделяющие страницу изучаемого материала, ответы и индивидуальные задания. Отвечая на поставленные вопросы и делая записи в соответствии с рекомендациями, **студент не только справится с решением задач своего варианта, но хорошо усвоит теоретический материал** и даже создаст свой конспект по наиболее трудным для понимания вопросам из изучаемых разделов высшей математики.

С помощью самоучителя **легко проконтролировать качество усвоения теоретического материала**, так как основные определения и теоремы в пособии представлены специальным образом: вопросы и ответы на них разделены вертикальной чертой. Закрыв текст справа от черты, нужно лишь ответить самостоятельно на вопрос в устной, а еще лучше в письменной форме и, открыв текст справа, сверить результат.

Более тысячи задач – 39 индивидуальных заданий в 30 вариантах – позволят студентам выбрать задачи для самостоятельного решения и **закрепления навыков**, приобретенных при решении примеров одного из вариантов, а преподавателей обеспечат **богатым банком заданий**.

Пособие в основном ориентировано на студента среднего уровня подготовки, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания.

Чтобы получить **отличные знания**, необходимо в совершенстве овладеть теорией и практикой решения задач повышенного уровня сложности, и в этом окажут помощь учебники и сборники задач из списка рекомендуемой литературы, а также задания повышенного уровня сложности, содержащиеся в данном пособии.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

## ЗАДАНИЕ 1.0 (1. № моего варианта)

**Найти пределы** заданных функций.

Несмотря на то, что вычисления в этом задании невелики, для их выполнения Вам потребуется изучить большой объем теоретического материала.

Подготовимся к решению примеров задания 1.

1.1. Сформулируйте определение **понятия функции** одного аргумента.

.....

1.2. Какие функции называются **основными элементарными**?

К основным элементарным функциям относятся следующие функции:

.....

1.3. Какие функции называют **элементарными**?

.....

1.4. Сформулируйте определение **предела функции** в точке  $x = a$ .

.....

1.5. Какая функция называется **непрерывной в точке**  $x = x_0$ ?

.....

1.6. Перечислите **три условия**, которые должны выполняться для **непрерывной в точке**  $x = x_0$  функции.

.....

1.7. В каких точках **непрерывны все элементарные функции**?

.....

Из теоремы о непрерывности элементарных функций и определения непрерывной функции в точке  $x = a$  следует, что **при вычислении предела элементарной функции**, прежде всего, вместо  $x$  **нужно подставить точку**  $a$  в выражение, задающее эту функцию  $f(x)$ .

Если при этом получается число  $A$ , то оно и является пределом данной функции  $f(x)$  в данной точке  $x = a$  (при  $x \rightarrow a$ ), то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = A.$$

Например,  $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 1) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ .

Но очень часто, подставляя точку  $x = a$  в выражение, задающее функцию  $f(x)$ , получают неопределенности одного из следующих видов:

$$\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^\infty\}, \{0^0\}, \{\infty^0\}$$

Такого вида неопределенности следует раскрывать при помощи соответствующих различных приемов.

Запишите пример а) задания 1 Вашего варианта:

.....

1.8. Какому числу равно значение  $a$ , к которому стремится  $x$ , в Вашем примере?

$a =$  .....

1.9. Для какой функции Вам нужно вычислить предел? Запишите эту функцию.

$f(x) =$  .....

Подставьте в выражение для функции  $f(x)$  вместо  $x$  значение  $a$ .

$f(a) = f($  .....  $) =$  .....

1.10. Что у Вас из этого получилось?

Получилась неопределенность вида: .....

Например,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \left\{ \frac{(-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2}{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ .

1.11. Как следует поступить для того, чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, если при  $x \rightarrow a$  числитель и знаменатель функции имеют пределы, равные нулю?

.....

В случаях, когда функция  $f(x)$ :

1. Представляет собой отношение многочленов

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \quad \text{и}$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m;$$

2. Содержит **иррациональности** в виде корней квадратных или кубических:  $\sqrt{u(x)}$  или  $\sqrt[3]{v(x)}$ , и  $x$  стремится к конечному числу  $a$  ( $x \rightarrow a, |a| < \infty$ ), можно руководствоваться следующей **таблицей 1 рекомендаций**:

**Таблица 1**

		$f(a) = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}, \quad x \rightarrow a, \quad  a  < \infty$	
		$c = \text{const}$ $b = \text{const}$	
№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$ $P_n(a) = Q_m(a) = 0$	Разделить функции $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ на разность $(x - a)$ , сократить $f(x)$ на эту разность $(x - a)$ и подставить вместо $x$ значение $x = a$	1) $\begin{cases} 0 \\ c \end{cases} = 0;$ 2) $\begin{cases} c \\ 0 \end{cases} = \infty;$ 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{b} = A$ 4) $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} -$ повторить прием
2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)} - \sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию $f(x)$ на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{u_1(x)} + \sqrt{u_2(x)})$ , использовать формулу сокращенного умножения $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ и сократить $f(x)$ на разность $(x - a)$	----- // -----

№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)} - \sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)} + \sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$	1) $\left\{\frac{0}{c}\right\} = 0$ ; 2) $\left\{\frac{c}{0}\right\} = \infty$ ; 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{b} = A$ 4) $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – - повторить прием

**Замечание.**

При делении многочлена  $P_n(x)$  или  $Q_m(x)$  на разность  $(x-a)$  опираются на **теорему Безу**: если число  $x=a$  является корнем многочлена (при  $x=a$  многочлен равен нулю), то этот многочлен делится на разность  $(x-a)$  без остатка.

Деление многочлена на разность  $(x-a)$  осуществляется по тем же правилам, по которым делятся столбиком числа:

$$\begin{array}{r}
-a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \\
\underline{a_0x^n - aa_0x^{n-1}} \\
-(a_1 + aa_0)x^{n-1} + a_2x^{n-2} \\
\underline{(a_1 + aa_0)x^{n-1} - a(a_1 + aa_0)x^{n-2}} \\
-(a_2 + a(a_1 + aa_0))x^{n-2} + a_3x^{n-3} \\
\dots \\
\dots \\
\underline{\hspace{10em}} \\
0
\end{array}
\left| \begin{array}{l}
x - a \\
\hline
a_0x^{n-1} + (a_1 + aa_0)x^{n-2} + \dots = P_{n-1}(x)
\end{array} \right.$$

Обратите внимание на то, что индекс  $n$  в обозначении многочлена  $P_n(x)$  соответствует старшей степени  $x$  этого многочлена.

В результате деления получим представление многочлена  $P_n(x)$  в виде произведения многочлена  $P_{n-1}(x)$  на разность  $(x-a)$ :

$$P_n(x) = (x-a) P_{n-1}(x).$$



Например, убедимся в том, что корень многочлена  $P_3(x) = x^3 - 3x - 2$  равен  $x_1 = -1$ .

$$P_3(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0.$$

По теореме Безу данный многочлен делится на разность  $x - (-1) = x + 1$  без остатка. Действительно,

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x - 2 & x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 - x - 2 \\ \hline -x^2 - 3x & \\ \hline -x^2 - x & \\ \hline -2x - 2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Поэтому  $P_3(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$ .

Умножение скобок должно давать исходный многочлен. Проверьте! Используя полученный результат, вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x - 2)}{(x + 1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -3. \end{aligned}$$

**Замечание.** Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  можно находить при помощи формулы  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  или по теореме Виета:  $x_1 + x_2 = -b/a$ ;  $x_1 x_2 = c/a$ .

И тогда квадратный трехчлен можно разложить на сомножители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

В учебных примерах корни многочленов более высоких порядков обычно находят подбором. Подставляя в многочлен значения  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$  и т. д., находят то, при котором многочлен равен нулю.

1.12. Найдите корни  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  многочлена  $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$  и разделите этот многочлен на разности  $(x - x_1)$ ,  $(x - x_2)$ ,  $(x - x_3)$ .

Рассуждать следует так: корни данного многочлена не могут быть положительными, поскольку в этом случае все слагаемые данного многочлена тоже положительны, поэтому и их сумма не может быть равной нулю.

Вычислим

$$P_3(-3) = \dots\dots\dots =$$

$$P_3(-2) = \dots\dots\dots =$$

$$P_3(-1) = \dots\dots\dots =$$

Следовательно, корнями данного многочлена являются числа  $x_1 = \dots\dots$  и  $x_2 = \dots\dots$ .

**Замечание.** Если представление многочлена в виде сомножителей содержит  $k$ -ю степень разности  $(x - x_c)$ , то есть сомножитель  $(x - x_c)^k$ , то говорят, что корень  $x_c$  является **кратным корнем многочлена, и кратность этого корня равна  $k$** . Это означает, что корень  $x = x_c$   $k$  раз обращает данный многочлен в нуль.

Разделите многочлен  $P_3(x)$  на разность  $(x - x_1)$ :

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Разделите многочлен  $P_3(x)$  на разность  $(x - x_2)$ :

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Запишите многочлен  $P_3(x)$  в виде сомножителей:

$$P_3(x) = \dots\dots\dots$$

Сделайте проверку, перемножив скобки. Получается многочлен  $P_3(x)$ ?

1.13. Имеет ли многочлен  $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$  кратный корень? Какому числу равен кратный корень? Какова кратность этого корня?

.....

Вычислите предел в задании 1. номер варианта • а).

Запишите, какой предел Вам нужно найти:

.....  
Выполните преобразования и вычисления, руководствуясь рекомендациями таблицы 1 (с. 8–9) и сократив полученные при этом одинаковые сомножители в числителе и знаменателе

.....

**Ответ 1. ... а).** .....

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 1, 2, 6, 12.

1.14. Запишите определение предела функции при  $x \rightarrow \infty$ .

---

1.15. Какой предел дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m}$$

получится, если  $x \rightarrow \infty$ ?

1)  $m > n \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$ ;

2)  $n = m \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$ ;

3)  $n > m \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots\dots\dots$ .

Более того, если функция  $f(x)$  представляет собой отношение линейных комбинаций степенных функций, показатели которых неотрицательны (то есть  $m$  и  $n$  необязательно целые, но обязательно неотрицательные), то при  $x \rightarrow \infty$  можно оставить в числителе и в знаменателе только **слагаемые наибольших степеней  $x$** , а остальными пренебречь. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$  из-за отбрасывания слагаемых, содержащих меньшие степени  $x$  (в том числе и  $x^0 = 1$ ), не изменяется, то есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n_1} + \dots + a_kx^0}{b_0x^m + b_1x^{m_1} + \dots + b_lx^0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m},$$

где  $n > n_1 > n_2 > \dots \geq 0$ ,  $m > m_1 > m_2 > \dots \geq 0$  (слагаемые записываются в порядке убывания степеней  $x$ ).

1.16. Какой предел функции  $f(x) = \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$  получится при  $x \rightarrow \infty$ , если

1)  $n > m \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \dots\dots\dots$ ;

2)  $n = m \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \dots\dots\dots$ ;

3)  $m > n \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \dots\dots\dots?$

1.17. Как следует поступить при вычислении предела отношения показательных функций  $u(x) = a^{x+r}$ , где  $r$  – вещественное число, если  $x \rightarrow \infty$ ?

---

1.18. Пусть  $f(x) = q^x$ ,  $q = \text{const}$ .

Каким будет предел этой функции, если

- 1)  $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \dots\dots\dots$ ;
- 2)  $q = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \dots\dots\dots$ ;
- 3)  $1 < q < \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \dots\dots\dots$ ;
- 4)  $-\infty < q \leq -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \dots\dots\dots?$

1.19. Существуют ли пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ ?

.....

Обобщим все рассмотренные случаи в **таблице 2 рекомендаций** к решению примера задания 1.<sub>номер варианта</sub> б).

**Таблица 2**

$x \rightarrow \infty$			
№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	Функция $f(x)$ равна отношению линейных комбинаций <b>степенных</b> функций $x^n$ , $n = \text{const}, n \geq 0$	В числителе и знаменателе $f(x)$ оставить слагаемые, содержащие самые большие степени $x$ .	См. 1.16
2	Функция $f(x)$ равна отношению линейных комбинаций <b>показательных</b> функций $a^x$ , $a = \text{const}, a > 0, a \neq 1$	Разделить числитель и знаменатель функции $f(x)$ на самую большую при $x \rightarrow \infty$ показательную функцию	См. 1.18

Запишите **задание 1.**<sub>номер варианта</sub> б) и вычислите предел данной в этом задании функции.

.....

**Ответ 1. ... б).** .....

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 3, 4, 5.

Для того, чтобы решить следующий пример, Вам нужно хорошо изучить бесконечно малые функции, их свойства, их сравнение, применение к вычислению пределов.

1.20. Какие функции называют **бесконечно малыми** при  $x \rightarrow a$ ?

.....

1.21. Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые функции (б. м. ф.) при  $x \rightarrow a$ ; запишите, какими соотношениями они связаны, если

1)  $\alpha(x)$  – б. м. ф. **более высокого порядка** малости по сравнению с  $\beta(x)$  – б. м. ф. при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dots \Leftrightarrow \alpha(x) = o(\beta(x));$$

2)  $\alpha(x)$  – б. м. ф. **более низкого порядка** малости по сравнению с  $\beta(x)$  – б. м. ф. при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dots \Leftrightarrow \beta(x) = o(\alpha(x));$$

3)  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б. м. ф. **одинакового порядка** малости при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dots, \dots \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = c(\beta(x));$$

4)  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б. м. ф., **эквивалентные** при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dots \Leftrightarrow \alpha(x) \sim \beta(x);$$

5)  $\alpha(x)$  – б. м. ф. **k-того порядка** малости по сравнению с  $\beta(x)$  – б. м. ф. при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = \dots \Leftrightarrow \alpha(x) = c(\beta(x))^k.$$

1.22. Сформулируйте теорему о **пределе отношения** двух бесконечно малых функций.

.....

1.23. Запишите теорему о **первом замечательном** пределе.

.....

1.24. Запишите теорему о **втором замечательном** пределе.

.....

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул в **таблице 3 эквивалентных** бесконечно малых функций при  $x \rightarrow a$ .

**Таблица 3**

$\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6a	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7a	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu \alpha(x)$

1.25. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \dots\dots\dots$$

.....

Ответ.....

**Замечание 1.** В случаях, когда аргумент  $\alpha(x)$  функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например,  $\alpha(x) \rightarrow a, a \neq 0$ , вводят новую переменную  $t = \alpha(x) - a$ .

Тогда, если  $\alpha(x) \rightarrow a$ , то  $t \rightarrow 0$  (функция  $t(x)$  должна быть непрерывной функцией в окрестности точки  $t = 0$ ).

Новая переменная  $t \rightarrow 0$  (при  $\alpha(x) \rightarrow a$ ), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)} = \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| x - \frac{\pi}{4} = t \Leftrightarrow x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0 \right| =$$

Предварительно сделаем следующие преобразования:

$$x = t + \frac{\pi}{4};$$

$$\sin x = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin t + \cos t);$$

$$\cos x = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos t \cos \frac{\pi}{4} - \sin t \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t);$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} = \frac{1 - \operatorname{tg} t + 2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t};$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

И воспользуемся результатами преобразований:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)}{\ln\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin t}{2 \frac{\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} t}{2 \frac{t}{1 - t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Замечание 2.** При вычислении предела функции в задании 1.<sub>номер варианта</sub>•В) можно применять первый и второй замечательные пределы непосредственно (без применения эквивалентных бесконечно малых функций), но решения тогда получаются часто более длинные, с громоздкими преобразованиями.

Запишите решение примера задания 1.<sub>номер варианта</sub>•В).

**Ответ 1. ... в)** .....

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 9, 10, 11.

1.26. Сформулируйте определение **бесконечно большой** функции при  $x \rightarrow a$ .

Бесконечно большие функции (б. б. ф.), также как и бесконечно малые, можно сравнивать между собой.

Если предел отношения двух бесконечно больших функций равен:

1. бесконечности, тогда в числителе – б. б. ф. более высокого порядка роста;
2. нулю, тогда в числителе – б. б. ф. более низкого порядка роста;
3. постоянному числу, не равному нулю или единице, тогда эти бесконечно большие функции одинакового порядка роста;
4. единице, тогда бесконечно большие функции эквивалентны.

Полезно иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При  $x \rightarrow \infty$  **самый высокий** порядок роста имеет **показательная** функция  $f(x) = a^x$ ; степенная функция  $f(x) = x^n$  имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция  $f(x) = \log_a x$  имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a x \ll x^n \ll a^x, \quad x \rightarrow \infty.$$

1.27. Исследуйте, какого вида неопределенность получается в задании 1.<sub>номер варианта.Г</sub>).

1.28. Какой предел обычно применяют, раскрывая неопределенность такого вида? Запишите этот предел.

Чтобы вычислить данный предел, можно применить следующую последовательность тождественных преобразований ( $u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} (1 + (u - 1))^v = \lim_{x \rightarrow a} (1 + (u - 1))^{\frac{1}{u-1} \cdot (u-1) \cdot v} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (u-1) \cdot v}$$

Неопределенность  $\{0 \cdot \infty\}$  в показателе экспоненты раскрывают, применяя приемы предыдущих примеров.

Решите пример задания 1.<sub>номер варианта.Г</sub>).

**Ответ 1. ... г)**.....

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 7,8.

1.29. Какого вида неопределенность получится при вычислении предела в задании 1.<sub>номер варианта.Д</sub>)?

1.30. Как поступают, раскрывая неопределенности такого вида?

Вычислите предел в задании 1.<sub>номер варианта.Д</sub>).

**Ответ 1. ... д)**.....

Для закрепления приобретенных навыков решите примеры 14,15.



**НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ  
ОДНОГО АРГУМЕНТА  
ЗАДАНИЕ 2.0(2.№<sub>моего</sub> варианта)**

- Исследовать функцию на непрерывность;
- найти точки разрыва графика функции и установить характер точек разрыва;
- в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной;
- в пункте 2.б) построить график.

2.1. Перечислите **условия**, которые должны выполняться для **непрерывной в точке  $x = x_0$**  функции:

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....

2.2. В каких точках **непрерывны все элементарные функции**?

.....

2.3 Сформулируйте определение **непрерывной на интервале  $(a, b)$**  функции.

.....

2.4. Запишите определение **предела справа (правостороннего)** для функции  $y = f(x)$ .

.....

2.5. Определите понятие **предела слева (левостороннего)** для функции  $y = f(x)$ .

.....

2.6. Укажите **связь**, которая существует **между односторонними (предел справа, предел слева) пределами функции  $y = f(x)$  и пределом** этой функции в некоторой точке  $x = a$ ?

.....

2.7. Сформулируйте определение функции, **непрерывной на отрезке  $[a, b]$** ?

.....

2.8. Какие точки называют **точками разрыва** графика функции?

2.9. В каком случае функция терпит **устранимый** разрыв?

2.10. Когда функция терпит **разрыв первого рода**?

2.11. Сформулируйте условия, при которых функция имеет **разрыв второго рода**.

2.12. Является ли функция в задании 2.<sub>номер варианта</sub>.а) элементарной?

2.13. В каких точках терпит разрыв элементарная функция?

Итак, для исследования **элементарной** функции на **непрерывность** можно применить такой **ПЛАН**:

1. Найти точки, которые не принадлежат области определения данной функции.
2. Вычислить односторонние пределы функции в этих точках.
3. Сделать вывод о характере разрыва функции в исследуемых точках.

Например, исследуем на непрерывность функцию  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)}$ .

1. Функция  $f(x)$  определена на интервалах  $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$ .

В точках  $x = -1$  и  $x = 0$  знаменатель функции обращается в нуль, следовательно, эти точки не принадлежат области определения данной функции и являются точками разрыва функции.

2. Найдем односторонние пределы данной функции в точках разрыва функции.

$$x = -1: \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \left\{ \frac{1 - \cos(-1)}{(-1)^2(1+(-1-0))} \right\} = \left\{ \frac{c}{-0} \right\} = -\infty.$$

Число  $c = 1 - \cos(-1)$  – положительное, так как  $|\cos x| \leq 1$  для всех вещественных значений аргумента  $x$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \left\{ \frac{1 - \cos(-1)}{(-1)^2(1 + (-1+0))} \right\} = \left\{ \frac{c}{+0} \right\} = +\infty.$$

$x = 0$ :

Функции  $y = \cos x$  и  $y = x^2$  – четные, поэтому пределы функции  $f(x)$  будут одинаковыми при  $x \rightarrow +0$  и  $x \rightarrow -0$ .

Если  $x \rightarrow 0$ , то функция  $y = 1 - \cos x$  является бесконечно малой, и ее

можно заменить эквивалентной функцией:  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Если доопределить данную функцию  $f(x)$  в точке  $x = 0$  значением, равным ее пределу в этой точке, то функция станет непрерывной в точке  $x = 0$ . То есть разрыв можно устранить, но получится уже другая функция:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

3. В соответствии с классификацией точек разрыва функции делаем вывод о том, что:

в точке  $x = -1$  функция терпит разрыв второго рода,  
а в точке  $x = 0$  имеет устранимый разрыв.

**Замечание.** Иногда устранимый разрыв и разрыв первого рода – оба называют разрывами первого рода, говоря:

разрыв первого рода – устранимый,

разрыв первого рода – случай конечного скачка.

Выполните задание 2.номер варианта.а) в соответствии с планом, предложенным на с. 18.

Ответ 2. ... а) .....

Запишите задание 2.<sub>номер варианта</sub>.б).

2.14. Является ли функция в задании 2.<sub>номер варианта</sub>.б) элементарной?

2.15. В каких точках может иметь разрыв кусочно-аналитическая функция?

Найдите точки, в которых функция задания 2.<sub>номер варианта</sub>.б) может иметь разрыв.

2.16. Можно ли воспользоваться планом исследования на непрерывность элементарной функции для исследования на непрерывность функции кусочно-аналитической?

Таким образом, для исследования **кусочно-аналитической** функции на непрерывность можно предложить такой **ПЛАН**:

1. Найти точки, в которых данная функция не определена – точки разрыва графика функции.
2. Указать точки, в которых происходит переход от одной формулы задания функции к другой формуле, – точки, «подозрительные» на разрыв.
3. Вычислить односторонние пределы функции во всех этих точках (найденных по предыдущим двум пунктам плана).
4. Сделать вывод о характере разрыва или о непрерывности функции в исследуемых точках.

Например, исследуем на непрерывность кусочно-аналитическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 4, \\ 5, & x = 1. \end{cases}$$

1. Функция определена во всех точках отрезка  $[-1; 4]$ , поэтому ее можно исследовать на непрерывность только на этом отрезке.
2. Точка, «подозрительная» на разрыв, одна:  $x = 1$ .
3. Вычислим односторонние пределы данной функции в точке  $x = 1$ .

**Слева** от точки  $x = 1$  функция задана при помощи основной элементарной функции  $y = 2^x$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^x = 2,$$

как предел основной элементарной функции  $y = 2^x$  в точке  $x = 1$ .

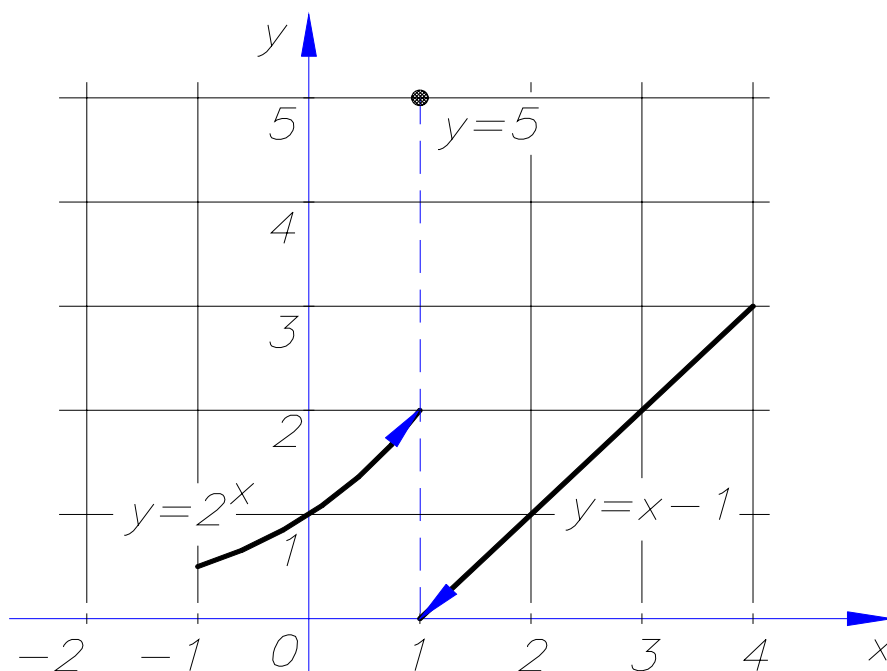
**Справа** от точки  $x = 1$  функция задана при помощи элементарной функции  $y = x - 1$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1) = 0.$$

4. В соответствии с классификацией точек разрыва функции в точке  $x = 1$  функция  $f(x)$  терпит разрыв первого рода (случай конечного скачка):

$$\begin{cases} f(1) = 5, \\ f(1-0) = 2 \neq 5, \\ f(1+0) = 0 \neq 5. \end{cases}$$

Изобразим функцию на графике.



**Замечание.** Если бы в точке  $x = 1$  значение функции было равно двум:  $f(1) = 2$ , то функция была бы непрерывной слева, а если бы выполнялось равенство:  $f(1) = 0$ , то функция была бы непрерывной справа.

Выполните **задание 2.**<sub>номер варианта.</sub>**б)** полностью, в соответствии с планом, предложенным на с. 20.

**Ответ 2. ... б).** .....

Постройте **график** функции, исследованной Вами на непрерывность в задании 2.<sub>номер варианта.</sub>**б).**

.....

Запишите замечания о трудностях, возникших у Вас при выполнении заданий 1 и 2.

1) .....

2) .....

3) .....

4) .....

5) .....

6) .....

7) .....

.....

.....

.....