ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов

Высшая математика I

Самоучитель решения задач

Линейная и векторная алгебра и аналитическая геометрия

Издание четвертое

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия для студентов
и преподавателей вузов*

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2007

УДК 517
Т 19

Тарбокова Т.В.

Т 19 Высшая математика I. Самоучитель решения задач. Линейная и векторная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 82 с.

Самоучитель решения задач является первой частью комплекта учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на формирование и развитие познавательной самостоятельности студентов. Содержит теоретические сведения, наборы задач для индивидуальных домашних заданий и алгоритмы их решения по следующим разделам: системы линейных алгебраических уравнений, векторная алгебра, аналитическая геометрия. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 517

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским
советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор педагогических наук,
профессор, зав. кафедрой математики,
теории и методики обучения математике ТГПУ
Э.Г. Гельфман

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Н.Ю. Галанова

Содержание

Введение

Настоящее учебное пособие – самоучитель решения задач – предназначено в помощь первокурсникам любой формы обучения и содержит как теоретический материал, изложение которого иллюстрируется решенными примерами, так и варианты типовых домашних индивидуальных заданий **по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии.**

Теоретический материал, как правило, излагается в виде ответов на поставленные перед студентом вопросы. Вопросы занумерованы: первое число соответствует номеру решаемой задачи, второе – порядковому номеру вопроса. Ответы можно найти в конце пособия (с. 56–72). Для удобства пользования книгой рекомендуется сделать **три закладки**, отделяющие страницы изучаемого материала, ответы и индивидуальные задания. Отвечая на поставленные вопросы и делая записи в соответствии с рекомендациями, **студент не только справится с решением задач своего варианта, но хорошо усвоит теоретический материал** и даже создаст свой конспект по наиболее трудным для понимания вопросам из изучаемых разделов высшей математики.

С помощью самоучителя **легко проконтролировать качество усвоения теоретического материала**, так как основные определения и теоремы в пособии представлены специальным образом: вопросы и ответы на них разделены вертикальной чертой. Закрыв текст справа от черты, нужно лишь ответить самостоятельно на вопрос в устной, а еще лучше в письменной форме и, открыв текст справа, сверить результат.

Более двухсот задач в 25 вариантах индивидуальных заданий позволят студентам выбрать задачи для самостоятельного решения и **закрепления навыков**, приобретенных при решении примеров одного из вариантов, а преподавателей обеспечат **богатым банком заданий**.

Пособие, в основном, ориентировано на студента среднего уровня подготовки, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания. Чтобы получить отличные знания, необходимо в совершенстве овладеть теорией и практикой решения задач повышенного уровня сложности, и в этом окажут помощь учебники и сборники задач из списка рекомендуемой литературы.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

ЗАДАЧА 1.0 (1. № моего варианта)

Доказать совместность системы линейных уравнений и решить её тремя способами: 1) методом Гаусса; 2) методом Крамера; 3) матричным методом.

Решение. Запишем данную систему уравнений:

Пример	Система, которую я решаю
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

1.1. Сколько уравнений в системе?

Данная система содержит .... уравнения.

1.2. Сколько неизвестных в системе?

В системе.. неизвестных.

1.3. Перечислите ***неизвестные*** системы: ....

1.4. Укажите ***свободные члены своей*** системы...

1.5. Какие уравнения называют ***линейными***?

....

1.6. Как называют систему линейных уравнений, число уравнений в которой равно числу неизвестных?

....

1.7. Как назовём систему линейных уравнений, решение которой нужно найти?

Данная мне для решения система называется ....

1.8. Какая матрица называется **основной матрицей системы**?

....

Запишем основную матрицу системы:

Основная матрица примера	Основная матрица моей системы

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{bmatrix}$

1.9. Как получить **расширенную матрицу системы**?

....

Запишем расширенную матрицу системы:

Расширенная матрица примера	Расширенная матрица моей системы
$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right]$	$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{bmatrix}$

Прочитайте и выучите следующие определения:

Определение решения СЛУ	***Решением*** системы линейных уравнений называется такая совокупность значений неизвестных, при подстановке которой вместо неизвестных каждое уравнение системы обращается в тождество.
Определение совместной и несовместной СЛУ	Система линейных уравнений называется ***совместной,*** если она имеет ***хотя бы одно решение.*** Система линейных уравнений называется ***несовместной***, если она не имеет ***ни одного решения***.
Определение минора	***Минором порядка k*** матрицы A называется любой определитель k-го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её «*к»* столбцов и любых её «*к»* строк.
Определение ранга матрицы	***Рангом матрицы A*** называется ***наибольший порядок отличного от нуля минора*** этой матрицы.

Выучите формулировку теоремы Кронекера – Капелли и ознакомьтесь с её доказательством ([4], III, §1).

Теорема Кронекера–Капелли.	Система линейных уравнений ***совместна*** тогда и только тогда, когда ***ранг основной*** матрицы системы ***равен рангу расширенной*** матрицы этой системы.

Ранг матрицы можно найти **двумя методами**: методом ***окаймляющих миноров*** и методом ***элементарных преобразований***.

Обычно используется комбинированный метод, когда элементарными преобразованиями расширенную матрицу системы приводят к ступенчатому виду, такому, что под одной из её диагоналей все элементы равны нулю, а потом используют метод окаймляющих миноров.

Метод окаймляющих миноров состоит в следующем:

Ранг нулевой матрицы равен нулю, так как такая матрица не имеет ни одного минора, отличного от нуля.

Если матрица A содержит единственный не равный нулю элемент, а остальные её элементы – нули, то ***ранг*** такой матрицы ***равен единице***. Ранг матрицы окажется равным единице, если она содержит отличные от нуля элементы только в одной строке или только в одном столбце, поскольку любые миноры второго порядка такой матрицы будут равны нулю.

Допустим, для матрицы A удастся найти отличный от нуля минор второго порядка. Тогда к этому минору приставляют по одному оставшиеся столбцы и строки исследуемой матрицы. Если окажется, что все миноры третьего порядка матрицы A равны нулю, то ***ранг*** этой матрицы ***равен двум***.

Если же найдётся хотя бы один минор третьего порядка, не равный нулю, то к нему следует приставлять по одному оставшиеся столбцы и строки, вычисляя получающиеся миноры четвёртого порядка.

Если все миноры четвёртого порядка матрицы A равны нулю или матрица A содержит только три строки (столбца), то есть вообще не имеет миноров порядка выше третьего, то ***ранг*** матрицы A ***равен трём***. И так далее…

Алгоритм метода окаймляющих миноров представлен на схеме 1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

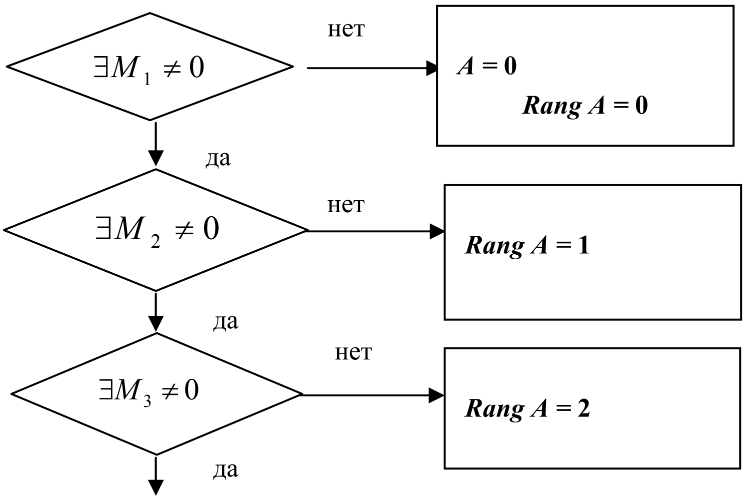
Определение минора.

Минором M_k ***порядка k*** матрицы A называется любой определитель k-го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её «*к*» столбцов и любых её «*к*» строк

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad \textit{и т. д.}$$

$$i, s = 1,\dots,m, \quad j,k = 1,\dots,n$$

Схема 1



. . . . .

Определение ранга матрицы.

Рангом *r* матрицы A называется **наибольший порядок *r*** минора этой матрицы, отличного от нуля:

$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0$ *или* $\bar{\exists}\, M_k, \quad k = r+1, r+2, \dots$

(существует минор порядка r, не равный нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю или не существуют).

К **элементарным** относятся такие **преобразования матриц:**

1. Перестановка строк (столбцов);
2. Умножение элементов строки (столбца) на любое число и сложение с соответствующими элементами другой строки (столбца);

3. Вычеркивание нулевых и пропорциональных строк (столбцов). Если пропорциональных строк (столбцов) несколько, вычеркивают все пропорциональные строки (столбцы) за исключением одной строки (столбца).

Исследуем данную систему на совместность. Для этого найдём ранг расширенной матрицы $\widetilde{A}$ системы методом элементарных преобразований её **строк**, используя алгоритм *1* (см. ниже*)*.

Алгоритм 1. Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований.

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке. Для этого ***умножим все элементы первой строки*** на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки.

Если в системе, которую Вы решаете, коэффициент при x_1 в первом уравнении не равен единице, поменяйте местами строки, записав первой ту, в которой коэффициент при неизвестном x_1 равен единице.

Если при неизвестном x_1 во всех уравнениях коэффициенты отличны от единицы, можно:

1) умножить первую строку расширенной матрицы системы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить нуль; а строку, в которой хотите получить нуль, умножьте на коэффициент при x_1 в первой строке;

2) сложите соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \quad (-1) \\ + \quad\quad + \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim$$

Получите нули в первом столбце Вашей расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \end{array}\right] \sim$$

Далее нужно получить **нули** во втором столбце **ниже главной диагонали** – диагонали от первого элемента 1-ой строки 1-го столбца.

Рабочая строка вторая. Умножим третью строку на 3 и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица (см. (∗))).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ (3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & -14 \end{bmatrix};$$

$$\left(\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \\ 0 & -3 & -4 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -16 & \vdots & -16 \end{bmatrix} \right) \quad (*)$$

Получите нули во втором столбце ниже главной диагонали Вашей расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

$$\sim \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \sim$$

З а м е ч а н и е. Полученная в скобках матрица (∗) также эквивалентна первоначально записанной матрице $\widetilde{A}$, то есть имеет тот же ранг, а системы уравнений, соответствующие этим матрицам, имеют одинаковые решения.

*В качестве **упражнения** найдём ранг матрицы C методом элементарных преобразований.*

Рабочая строка первая

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3)(-3)(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Все пропорциональные строки, кроме одной, можно вычёркивать. Вычеркнем вторую строку, так как она пропорциональна третьей и сложим третью и четвертую строки, чтобы получить нуль в третьем столбце, в последней строке:

$$\sim\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида, под одной из диагоналей которой все нули.

В полученной эквивалентной матрице выделенный минор третьего порядка является ***определителем треугольного вида****, который* ***равен произведению элементов главной диагонали****, то есть, очевидно, отличен от нуля:*

$M_3(C) = \begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1) = 1 \neq 0$ *(см. [4], 1.3), а миноров четвёртого порядка матрица, эквивалентная С, не имеет, так как у неё всего три строки. По определению ранга матрицы Rang C = 3.*

Итак, матрица $\widetilde{A}$ приведена нами к ступенчатому виду:

Матрица примера	Матрица моей задачи
$\widetilde{A} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 2\\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2\\ 0 & 0 & -14 & \vdots & -14\end{bmatrix}$	$\widetilde{A} \sim \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

Минор $M_3(\widetilde{A}) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -14\end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot(-14) = 42 \neq 0$.

Запишите ваш $M_3\left(\widetilde{A}\right)$:

Миноров четвёртого порядка матрица $\widetilde{A}$ не имеет, так как в эквивалентной матрице всего три строки. Поэтому её ранг равен трём: Rang $\widetilde{A}$ = 3.

Эквивалентная основная матрица A (слева от пунктира в эквивалентной расширенной $\widetilde{A}$), имеет тот же самый минор третьего порядка, отличный от нуля:

$M_3(A) = M_3\left(\widetilde{A}\right) \neq 0$, поэтому и её ранг равен трём:

Rang (A) = Rang($\widetilde{A}$) = 3.

По теореме Кронекера – Капелли данная система уравнений совместна и имеет единственное решение, так как Rang (A) = Rang($\widetilde{A}$) = 3 = n – числу неизвестных.

Итак, данная система линейных уравнений исследована на совместность.

1) Решим данную систему **методом Гаусса**.

Прямым ходом метода Гаусса ***систему приводят к ступенчатому виду***, исключая последовательно неизвестные системы ***элементарными преобразованиями над строками*** **расширенной** матрицы.

О методе Гаусса можете дополнительно прочитать, например, в [2], II, § 7.2.

При исследовании данной системы на совместность расширенную матрицу $\widetilde{A}$ привели к ступенчатому виду:

Матрица примера	Матрица моей задачи
$\widetilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & -14 \end{bmatrix}$	$\widetilde{A} \sim \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

Этой матрице соответствует система уравнений:

Пример	Система, которую я решаю
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2, \\ \qquad\quad -14x_3 = -14. \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Обратным ходом метода Гаусса найдём неизвестные x_1, x_2, x_3.

Обратный ход метода Гаусса заключается в следующем: *из последнего уравнения находят* x_3. *Подставив найденное значение* x_3 *во второе уравнение, получают неизвестное* x_2. *Подставив найденные значения неизвестных* x_3 *и* x_2 *в первое уравнение, находят неизвестное* x_1.

Пример	Система, которую я решаю
$x_3 = 1$, $-3x_2 - 2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$, $x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 \Rightarrow$ $x_1 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$.	

1.10. Вспомните и запишите определение **решения** системы линейных уравнений.

....

Найденное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ должно удовлетворять **каждому** уравнению **данной** системы, если система решена правильно.

Сделаем проверку:………………………………………………………

Пример	Система, которую я решаю
$x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; подставим найденные значения неизвестных в каждое из соответствующих уравнений **данной** системы $-1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2$, $-1 - 0 + 1 = 0$, $-1 + 3 \cdot 0 - 1 = -2$.	$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

Итак, при помощи проверки убедились, что система решена верно.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$	**Ответ:** $x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

Ответ можно записать в виде матрицы–столбца:

Пример	Система, которую я решаю
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

Ответ можно записать в виде матрицы–строки.

Пример	Система, которую я решаю
$(x_1, \quad x_2, \quad x_3) = (-1, \quad 0, \quad 1)$	$(x_1, x_2, x_3) = (\qquad)$

З а м е ч а н и е. Другими эквивалентными преобразованиями матрица $\widetilde{A}$ была приведена к виду:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -16 & \vdots & -16 \end{bmatrix}$$

Проверим, имеет ли система, ей соответствующая, то же решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad\quad x_2 - 4x_3 = -4, \\ \quad\quad\quad -16x_3 = -16. \end{cases} \qquad \begin{array}{|l} x_3 = 1, \\ x_2 = -4 + 4x_3 = -4 + 4 = 0,\ x_2 = 0, \\ x_1 = 2 - 3x_3 - 2x_2 = 2 - 3 - 0 = -1,\ x_1 = -1 \end{array}$$

Действительно, эквивалентная система имеет то же решение.

2) Решим систему **методом Крамера**.

Выучите формулировку теоремы Крамера.

Теорема Крамера	***Квадратная*** система линейных уравнений имеет ***единственное решение*** тогда и только тогда, когда ***определитель основной*** матрицы этой системы ***не равен нулю***

В этом случае значения неизвестных находят по правилу Крамера.

Правило Крамера	***Неизвестное*** x_i равно **отношению определителя** основной матрицы системы, в котором i –й столбец заменен столбцом свободных членов, и **определителя** основной матрицы системы.

Ознакомьтесь с доказательством теоремы Крамера ([2], II, §2.2; [4], V, §2.2).

Вычислим определитель основной матрицы системы det A, например, **методом треугольников**. Изобразим элементы определителя третьего порядка точками.

1.11. Соедините прямыми линиями точки, соответствующие элементам определителя, произведения которых входят в определитель с тем же знаком:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

$$+$$

1.12. Соедините прямыми линиями точки, соответствующие элементам определителя, произведения которых входят в определитель с противоположным знаком:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

$$-$$

Применим правило треугольников для вычисления определителя основной матрицы системы.

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot3-(1\cdot(-1)\cdot3+2\cdot1\cdot(-1)+3\cdot1\cdot1)=14.$$

Запишите определитель $\det A$ основной матрицы системы, которую Вы решаете, и вычислите его.

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=$$

1.13. Как получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера, для нахождения неизвестного x_1?

....

Запишите определитель ΔA_{x_1}:

Определитель примера	Определитель моей задачи
$\Delta A_{x_1}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}$	$\Delta A_{x_1}=\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

Вычислим определитель ΔA_{x_1}, например, при помощи **таблицы Саррюса.**

1.14. Как составить таблицу Саррюса и вычислить определитель, используя эту таблицу?

В таблице Саррюса, где элементы обозначены точками, расставьте знаки, с которыми соответствующие произведения входят в определитель.

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{array}\right]$$

Составим таблицу Саррюса для вычисления определителя ΔA_{x_1}:

Для определителя примера	Для определителя моей задачи
$\left[\begin{array}{ccc\vdots cc} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right]$

Таким образом

$$\Delta A_{x_1} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 = 2 - 4 + 0 - 6 - 6 - 0 = -14,$$

и неизвестное x_1 равно:

Неизвестное x_1 примера	Неизвестное x_1 моей задачи
$x_1 = \dfrac{\Delta A_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{-14}{14} = -1$	$x_1 = \dfrac{\Delta A_{x_1}}{\Delta} =$

Замечание. Методом треугольников и при помощи таблицы Саррюса можно вычислять определители только третьего порядка.

Определитель любого порядка, в том числе и третьего, можно вычислять, понижая порядок определителя разложением определителя по элементам какой-либо его строки или какого-либо его столбца ([2], II, §1.1, §1.2, §1.3; [4], V, §1.4, §1.5) и используя при этом свойства определителей.

1.15. Как получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного x_2?

……………………………………………………………………………

Составим определитель ΔA_{x_2} :

Определитель примера	Определитель моей задачи
$\Delta A_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	$\Delta A_{x_2} = \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix}$

и разложим этот определитель, например, по элементам второго столбца, так как во втором столбце один из элементов равен нулю.

С этой целью применим правило разложения определителя по элементам какой-либо его строки или столбца, используя понятия минора и алгебраического дополнения:

Определение минора M_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя** ***n*-го порядка**	**Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов i-й строки и j-го столбца.

Определение алгебраического дополнения A_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя** ***n*-го порядка**	**Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$: $A_{ij}=(-1)^{(i+j)}\cdot M_{ij}$ (i – номер строки, j – номер столбца).

В соответствии со свойствами определитель порядка n может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам i-й строки:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=$$

$$=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+\dots+a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}\,.$$

То есть *определитель квадратной матрицы А порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i-й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.*

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

Так для определителя третьего порядка формула разложения определителя по элементам второго столбца получится следующей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})\,.$$

Определители второго порядка получаются, если вычеркнуть в определителе третьего порядка второй столбец и, соответственно, первую, потом вторую, потом третью строки.

Применим записанную выше формулу для вычисления определителя ΔA_{x_2}, учитывая, что **определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей**:

$$\Delta A_{x_2} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (-2)((-1)-1\cdot 1) + 0 + 2(1-3) = (-2)(-2) + 2(-2) = 0\,.$$

Таким образом, $x_2 = \dfrac{\Delta A_{x_2}}{\Delta A} = \dfrac{0}{14} = 0$.

Вычислите определитель ΔA_{x_2}, соответствующий системе уравнений, которую Вы решаете, указав, по элементам какой строки или столбца Вы раскладываете определитель ΔA_{x_2}.

Определитель ΔA_{x_2} я раскладываю по элементам.....................................

....

$$\Delta A_{x_2} = \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix} =$$

Теперь можно найти неизвестное: $x_2 =$

1.16. Как получить определитель ΔA_{x_3}, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного x_3?

....

Запишем определитель ΔA_{x_3} для данной системы уравнений:

Определитель примера	Определитель моей задачи
$\Delta A_{x_3} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}$	$\Delta A_{x_3} = \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix}$

Можно вычислить этот определитель, разложив его по элементам какой-либо его строки или какого-либо его столбца, но предварительно получив в выбранной строке или столбце все нули, за исключением одного элемента.

Получим, например, ещё один ноль во второй строке и вычислим определитель, разложив его по элементам второй строки.

$$\Delta A_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(3(-2) - 4\cdot 2) = 14$$

Замечание. Согласно свойствам определителей, ***рабочую*** строку (столбец), которая не изменяется, можно умножать на любое число и складывать с соответствующими элементами другой строки (столбца). Определитель от таких преобразований не изменяется.

Но если для получения нулей Вы умножите на число $\alpha \neq 0$ элементы другой строки (не рабочей, а той, которую изменяете), и сложите с соответствующими элементами рабочей строки, определитель нужно разделить на это число $\alpha \neq 0$.

Например, вычислим определитель четвёртого порядка, получив нули в четвёртом столбце (рабочая строка – четвёртая).

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 6 \quad 1} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ + \quad + \\ (-3) \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

Разложим определитель по элементам четвёртого столбца, а в определителе третьего порядка получим нули в первом столбце:

$$= 1(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \boxed{3 \quad 2 \quad 8} \\ -6 & -4 & -16 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 3=\alpha \\ + \\ (-2) \\ (2) \\ + \end{array} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & -7 & -13 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Определитель равен нулю, так как в третьей строке все элементы получились равными нулю.

Получите нули в какой-либо строке или каком-либо столбце определителя ΔA_{x_3}, соответствующего системе уравнений, которую Вы решаете, и вычислите определитель ΔA_{x_3}:

$$\Delta A_{x_3} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} =$$

Найдём $x_3 = \frac{14}{14} = 1$. Запишите значения неизвестных системы Вашего варианта: $x_3 =$, $x_2 =$, $x_1 =$.

Сделайте проверку правильности решения системы Вашего варианта. Подставьте найденные неизвестные x_1, x_2, x_3 в первое уравнение **данной** системы …..

во второе …………………………………………………………………….

в третье ……………………………………………………………………

Запишите ответ:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

3) Решим систему **матричным методом**.

Матрицы, подобно векторам, можно складывать, умножать на число и одну матрицу на другую.

1.17. Сформулируйте определение суммы матриц: ………………………..
……………………………………………………………………………..

1.18. Сложите матрицы

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} & 0 & 2 \\ & 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.19. Определите операцию умножения матрицы на число: …………..
……………………………………………………………………………

1.20. Найдите произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -1$.

1.21. Определите произведение матрицы – строки размера $1 \times n$ на матрицу – столбец размера $n \times 1$.

1.22. Перемножьте матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.23. Каких размеров должны быть матрицы, чтобы существовало произведение этих матриц?

1.24. Какие матрицы называются перестановочными?

1.25. Сформулируйте определение произведения двух матриц.

1.26. Найдите произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.27. Найдите произведение BA матриц из предыдущего задания.

1.28. Какая матрица называется единичной матрицей E ?

Единичная матрица обладает замечательными свойствами: умножение квадратной матрицы любого порядка на единичную такого же порядка не меняет исходную матрицу. Умножение любой квадратной матрицы на единичную коммутативно: $AE = EA$, то есть единичная матрица является перестановочной с любой квадратной матрицей такого же размера.

1.29. Какая матрица называется обратной для матрицы A?

1.30. Для каких матриц существуют обратные матрицы?

1.31.Сформулируйте определения вырожденной и невырожденной матриц.

1.32. Как найти обратную матрицу A^{-1}, если она существует?

1.33. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите для матрицы A обратную A^{-1}.

1.34. Пусть $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите для матрицы A обратную A^{-1}.

Рассмотрим, как применяется обратная матрица для решения СЛУ.

Систему линейных уравнений можно записать в матричном виде, применяя умножение матриц $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $AX = B$.

Если умножить обе части этого матричного уравнения на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B;$$
$$EX = A^{-1}B;$$
$$X = A^{-1}B,$$

то матрица – столбец X будет представлять собой решение системы линейных уравнений, которое можно найти умножением матрицы, обратной основной матрице системы A^{-1} на матрицу – столбец B. Такой метод решения квадратной системы линейных уравнений называется **матричным**.

Решите данную в задании 1 систему матричным методом. Не забудьте сделать проверку после того, как найдете обратную матрицу.

ЗАДАЧА 2.а №0 (2.а № ____________)
моего варианта

Дана система уравнений. Доказать её совместность. Найти общее решение системы и одно частное решение:

Система уравнений примера	Система уравнений моего варианта
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Решение. Исследуем данную систему на совместность, применяя теорему Кронекера – Капелли ([2], II, §7.6 или см. с. 7).

1.9. Как получить расширенную матрицу системы?

....

Составим расширенную матрицу системы:

Расширенная матрица примера	Расширенная матрица моей системы
$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 1 & -3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

Найдём ранг матрицы B методом элементарных преобразований над строками этой матрицы ([2], II, §6.5; см. алгоритм 1 на с. 9).

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 3\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ + \quad +\\ (-1)(-2)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 5 & 5 & -8\\ 0 & 5 & 5 & -4\\ 1 & -3 & -2 & 3\end{array}\right]\begin{array}{l} +\\ (-1)\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 5 & 5 & -4\\ 1 & -3 & -2 & 3\end{array}\right].$$

Минор M_3 матрицы *B*, составленный из первого, второго столбцов и столбца свободных членов не равен нулю:

$$M_3(B)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4\\ 0 & 5 & -4\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}=20\neq 0,$$

а миноров четвёртого порядка матрица *B* не имеет, поскольку у неё только три строки. Поэтому Rang *B* = 3.

Основная матрица системы *A*, записанная слева от пунктира в матрице *B*, теми же самыми преобразованиями приведена к виду: $A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 5\\ 1 & -3 & -2\end{bmatrix}$.

Минор $M_2(A)=\begin{vmatrix} 0 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5\neq 0$, а минор $M_3(A)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 5\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix}=0$.

Других миноров третьего порядка матрица *A* не имеет. Следовательно, по определению ранга матрицы, ранг матрицы *A* равен двум: Rang *A* = 2.

Итак, Rang *B* = 3 ≠ Rang *A* = 2, и по теореме Кронекера – Капелли исследуемая система несовместна, то есть решений не имеет. На этом решение поставленной задачи заканчивается.

Исследуем на совместность **ещё одну систему** линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3,\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1.\end{cases}$$

2.1. Сколько уравнений содержит система?..

2.2. Сколько неизвестных в данной системе уравнений? ....

2.3. Как называют данную систему уравнений? ....

2.4. Как найти ранг матрицы элементарными преобразованиями её строк?

....

Найдём ранг расширенной матрицы B системы методом элементарных преобразований.

$$B=\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3\\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9\\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}(-3)(-3)(-2)\\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Вторую строку матрицы, эквивалентной матрице *B,* вычеркнули как пропорциональную третьей строке).

Очевидно, что последняя матрица, эквивалентная матрице *B*, имеет минор $M_3(B)$, не равный нулю, а миноров четвёртого порядка полученная матрица не имеет, поскольку у неё только три строки:

$$M_3(B)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0\,.$$

Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы *B* равен трём. Следовательно, ранг матрицы *B* (по определению ранга матрицы) тоже равен трём. Rang *B* = 3. Этот же минор $M_3(B)$ является минором основной матрицы системы, то есть $M_3(B)=M_3(A)=1\neq 0$, значит, ранг основой матрицы системы тоже равен трём: $\operatorname{Rang}A=3$.

По теореме Кронекера – Капелли данная система совместна $\operatorname{Rang}A=\operatorname{Rang}B=r=3$. Кроме того, $r=3<5=n$ (*n*– число неизвестных данной системы).

Элементарные преобразования системы уравнений моего варианта

$M(B)=\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}=\quad M(A)=\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}=\operatorname{Rang}A=\qquad,$

$\operatorname{Rang}B=\qquad.$

2.5. Расставьте знаки (=, <, >), определяющие условия, при которых система m линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, то есть является **определённой.**

$r =$ Rang A Rang B n

2.6. Расставьте знаки (=, <, >), определяющие условия, при которых система m линейных уравнений с n неизвестными имеет бесконечное множество решений, то есть является **неопределённой.**

$r =$ Rang A Rang B n

2.7. К какому выводу привели Вас проведённые исследования системы уравнений задачи 2.а?

Система уравнений, которую я исследую,

....

совместна (несовместна) определённа (неопределённа)

Определение базисного минора и базисных неизвестных	Любой, **не равный нулю** минор, имеющий **порядок ранга** основной и расширенной матриц системы, называется базисным минором, а неизвестные, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор – базисными неизвестными**.**

Определение свободных неизвестных	Неизвестные, коэффициенты при которых **не вошли** в базисный минор, называются свободными.

2.8. Как найти **общее решение** (о.р.) произвольной системы линейных уравнений?

....

2.9. Выберите базисный минор данной Вам системы линейных уравнений.

$$M_r = \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

2.10. Какие неизвестные назовёте базисными неизвестными?

....

Допишите индексы: x, x, x – базисных неизвестных Вашего варианта.

2.11. Какие неизвестные назовёте свободными?

....

Укажите свободные неизвестные Вашего варианта:

....

Запишем данную систему линейных уравнений в ступенчатом виде по полученной эквивалентной матрице B:

Система уравнений примера	Система уравнений моего варианта
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ -x_4 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Перенесём свободные неизвестные x_1 и x_5 (в Вашей системе это могут быть другие неизвестные) в правые части уравнений.

Система уравнений примера	Система уравнений моего варианта
$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 - 2x_1 - 3x_5, \\ x_3 + 2x_4 = 3 - 4x_5, \\ -x_4 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Применим обратный ход метода Гаусса для нахождения базисных неизвестных через свободные.

Значения неизвестных примера	Значения неизвестных варианта
$x_4 = 0$.	
$x_3 + 2 \cdot 0 = 3 - 4x_5$; $x_3 = 3 - 4x_5$.	
$-x_2 + (3 - 4x_5) + 2 \cdot 0 = 2 - 3x_5 - 2x_1$; $-x_2 = 2 - 3x_5 - 2x_1 - 3 + 4x_5$; $x_2 = 1 + 2x_1 - x_5$.	

2.12. Как называется полученное решение?

Полученное решение системы линейных уравнений называется

....

Убедимся в правильности найденного решения, то есть сделаем проверку, подставив полученное решение в **каждое** уравнение **данной** системы:

Проверка для примера
$2x_1-(1+2x_1-x_5)+(3-4x_5)+2\cdot 0+3x_5=2,$ $6x_1-3(1+2x_1-x_5)+2(3-4x_5)+4\cdot 0+5x_5=3\,,$ $6x_1-3(1+2x_1-x_5)+4(3-4x_5)+8\cdot 0+13x_5=9\,,$ $4x_1-2(1+2x_1-x_5)+(3-4x_5)+0+2x_5=1\,.$

Проверка для системы уравнений моего варианта

……………………………………………………………………………………

Общее решение нашли верно.
Выучите определение частного решения.

Определение частного решения СЛУ	Решение, которое получается из общего, если свободные неизвестные равны произвольно заданным постоянным числам, называется частным решением системы линейных уравнений.

Найдём какое-нибудь одно частное решение из бесконечного множества частных решений данной системы.

2.13. Как это сделать?

....

Запишите полученное частное решение, приравняв свободные неизвестные нулю и вычислив базисные неизвестные.

Частное решение: $x_1=$, $x_2=$, $x_3=$, $x_4=$, $x_5=$

Приравняйте свободные неизвестные единице, вычислите значения базисных неизвестных и найдите ещё одно частное решение.

Частное решение: $x_1=$, $x_2=$, $x_3=$, $x_4=$, $x_5=$

Запишите ответ.

ЗАДАЧА 2.b №0 (2.b №   )

моего варианта

Дана система однородных линейных уравнений (СОЛУ). Требуется найти общее решение, какое-либо частное и фундаментальную систему частных решений данной системы однородных линейных уравнений.

Система уравнений примера	Система уравнений моего варианта
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

2.14. Сформулируйте определение системы однородных линейных уравнений: ……………………………………………………………………………..

2.15. Всегда ли совместна система однородных линейных уравнений?

……………………………………………………………………………………...

Найдем общее решение системы однородных линейных уравнений, преобразовав основную матрицу к ступенчатому виду:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ (-1)(-2)(-3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{bmatrix} \sim$$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{bmatrix}$, вычеркнули вторую и четвертую строки, так как они пропорциональны третьей строке.

Приведите основную матрицу системы Вашего варианта к ступенчатому виду:

……………….……………………………………………………………………..

Выберем базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, следовательно, базисные неизвестные x_1 и x_2 (поскольку столбцы не переставлялись, нумерация переменных не изменялась).

Какой базисный минор выбрали Вы? Запишите его: $M \quad = \begin{vmatrix} \quad \\ \quad \end{vmatrix} =$

Перечислите базисные неизвестные Вашего варианта:………………….

Перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений:

Система уравнений примера	Система уравнений моего варианта
$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ \quad\;\; 8x_2 = \;\; 7x_3 - 25x_4 + 4x_5 \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \end{cases}$

и найдем общее решение системы: $x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$,

$$x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 = 5\left(\frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right) - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 =$$

$= \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5$. Общее решение можно записать так:

$$X(c_1, c_2, c_3) = \begin{bmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Найдите общее решение Вашей системы однородных линейных уравнений (СОЛУ) и запишите его:

………………………………………………………………………………..

2.16. Какая система частных решений СОЛУ называется **фундаментальной системой частных решений** (ФСЧР СОЛУ)?

………………………………………………………………………………..

2.17. Как обычно получают фундаментальную систему частных решений?

………………………………………………………………………………

Найдем ФСЧР примера. ФСЧР должна содержать $k = 5 - 2 = 3$ решения:

$$E_1 = X(1,0,0) = \begin{bmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = X(0,1,0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{-25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = X(0,0,1) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы частных решений общее решение может быть записано в виде $X(c_1, c_2, c_3) = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$.

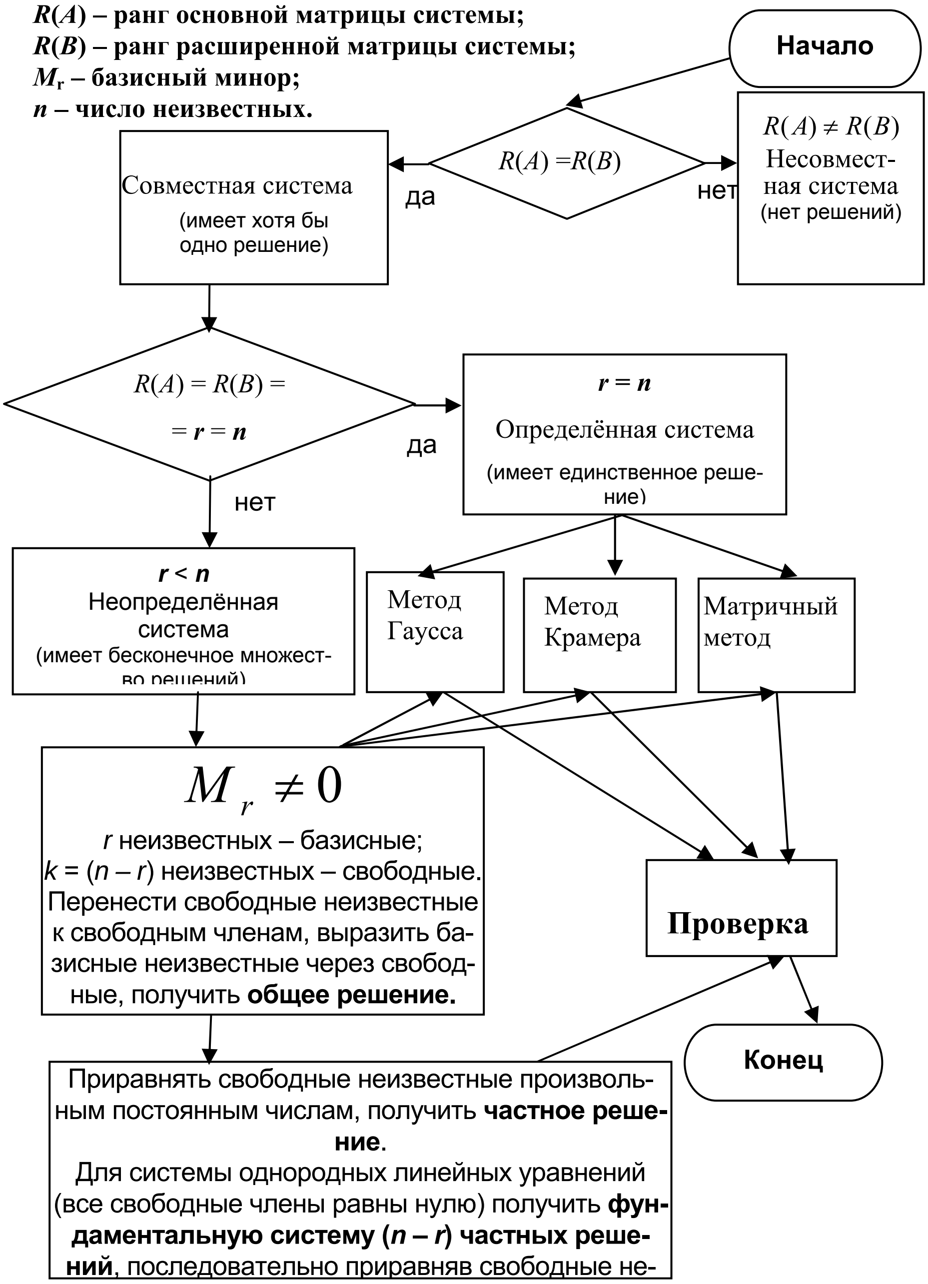
Найдите ФСЧР Вашего варианта и, используя её, запишите общее решение СОЛУ. Сделайте проверку и запишите ответ:

1. ФСЧР …………………………………………………………………
2. Общее решение ………………………………………………………

Исследование и решение произвольной системы линейных уравнений

Схема 2

***R*(*A*) – ранг основной матрицы системы;**
***R*(*B*) – ранг расширенной матрицы системы;**
M_r – базисный минор;
***n* – число неизвестных.**



ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

(справочный материал)

Координаты вектора $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки $B(b_x, b_y, b_z)$, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки $A(a_x, a_y, a_z)$, являющейся началом вектора.

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}\ .$$

Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов:

$$\cos\left(\overline{AB}, \wedge \overline{CD}\right) = \frac{\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|}.$$

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном (декартовом) базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов: если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

то $(a,b) = (b,a) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \cdot$

Длина вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Например, если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$np_{\overline{b}}\,\overline{a} = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}$ – **проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$.**

В ортонормированном базисе векторное произведение находят, используя определитель, в 1-ой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во 2-ой строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в 3-ей строке – координаты правого из перемножаемых векторов.

Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения:
$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$; $\mathrm{mod}[\bar{a}, \bar{b}] = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$;
тройка $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$ *– правая*.

Геометрический смысл векторного произведения.	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.
Определение **и условие компланарности векторов.**	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными. **Смешанное** произведение ненулевых **компланарных** векторов равно **нулю**.

Смешанное произведение трех векторов получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов. Обычно первой строкой определителя записывают координаты 1-го вектора, второй строкой – координаты 2-го вектора, а третьей строкой – координаты 3-го вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения: 1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный; 2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения.	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Объём пирамиды**, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах как на ребрах
Деление отрезка	

в отношении λ.	$\lambda = \pm \frac{\lvert\overrightarrow{AK}\rvert}{\lvert\overrightarrow{KB}\rvert}$: $x_K = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$.

ЗАДАЧА 3.0 (3. № ________)

моего варианта

Даны точки *A, B, C* и *D*. Требуется:

1) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

2) Определить, компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Если нет, то найти объём пирамиды, построенной на этих векторах.

3) Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины *D*.

4) Найти координаты точки *K*, делящей сторону *AB* в отношении λ.

Решение. 1) Будем искать **угол между векторами** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, заданными точками: $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$ и $D(3, 2, 4)$ по формуле

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \wedge \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \lvert\overrightarrow{CD}\rvert}.$$

3.1. Что представляет собою числитель формулы для нахождения косинуса угла между двумя векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

....

3.2. Что представляет собою знаменатель формулы для нахождения косинуса угла между двумя векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

……………………………………………………………………………………

3.3. Как прочитать записанную формулу, раскрывая понятия обозначений в формуле?

....

3.4. Как найти координаты вектора, если известны координаты точек, являющихся началом и концом вектора?

....

3.5. Пусть даны точка $A(x_1, x_2, x_3)$ и точка $B(y_1, y_2, y_3)$. Запишите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартовой системы координат.

....

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 5, -4); \qquad \overrightarrow{CD} = (5, 4, 1).$$

Запишите координаты векторов своего варианта

$\overrightarrow{AB} = (\qquad)$ и $\overrightarrow{CD} = (\qquad)$.

3.6. Как найти скалярное произведение двух векторов, если известны координаты этих векторов в ортонормированном (декартовом) базисе?

....

3.7. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ примера и своего варианта:

Скалярное произведение векторов примера	Скалярное произведение векторов моего варианта
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$

3.8. Каким образом находят длину вектора, если известны координаты этого вектора в ортонормированном (декартовом) базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

………………………………………………………………………………….

Найдём длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

Длины векторов примера	Длины векторов моего варианта
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{45}$; $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42}$;	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| =$ $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| =$

Найдём угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Угол между векторами примера
$\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{CD}\right\|} = \dfrac{6}{\sqrt{45}\sqrt{42}} = \dfrac{6}{\sqrt{9\cdot 5}\sqrt{6\cdot 7}} = \dfrac{6}{3\sqrt{5\cdot 6\cdot 7}} = \dfrac{2}{\sqrt{210}}$, $\varphi = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{210}}$.

Угол между векторами моего варианта
$\cos\varphi =$ $\qquad\qquad$ $\varphi =$

2) Выясним, **компланарны ли векторы** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3.9. Какие векторы называются компланарными?

....

3.10. Каково условие компланарности трёх векторов?

....

3.11. Как нужно умножать векторы, чтобы получить смешанное произведение этих векторов?

....

3.12. Как вычисляют смешанное произведение трёх векторов, заданных своими координатами в **ортонормированном (декартовом) базисе** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

Базис называют ортогональным, если все его векторы взаимно перпендикулярны. Базис называют нормированным, если все его векторы единичной длины. Ортогональный нормированный базис называют ортонормированным базисом.

....

3.13. Являются ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарными?

Векторы примера	Векторы моего варианта
$\overrightarrow{AB} = (-2, 5, -4)$; $\overrightarrow{AC} = (-4, 1, -2)$; $\overrightarrow{AD} = (1, 5, -1)$;	$\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{AC} =$ $\overrightarrow{AD} =$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ \boxed{1 \quad 5 \quad -1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ + \quad + \\ (-2)\ (-4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -6 & -15 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

(разложим определитель третьего порядка по элементам последнего столбца, а в определителе второго порядка общие множители (–6) из первого столбца и (–3) из второго столбца вынесем за знак определителя второго порядка)

$= (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -15 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = (-1)(-3)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18(3-5) = 36 \neq 0$ (повторите свойства определителей).

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ ...., так как ....
компланарны (не компланарны)

....

Вычислите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ Вашей задачи и ответьте на поставленный вопрос о компланарности векторов.

....

3.14. Каков геометрический смысл смешанного произведения?

....

Легко показать, что объём пирамиды, построенной на 3-х векторах, в 6 раз меньше объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах.

Действительно, высоты h пирамиды и параллелепипеда одинаковы. Объём параллелепипеда V_1 равен произведению площади S_1 параллелограмма основания на высоту параллелепипеда. $V_1 = S_1 \cdot h$.

Основание пирамиды – треугольник, площадь которого вдвое меньше площади параллелограмма. Объём пирамиды втрое меньше произведения площади её основания на высоту, то есть, если V_2 – объём пирамиды, S_2 – площадь её основания, то $V_2 = \frac{1}{3} S_2 h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_1}{2} \cdot h = \frac{S_1 \cdot h}{6} = \frac{V_1}{6}$.

3.15. Запишите, какого объёма получилась Ваша пирамида.

Объём пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, равен

$V_2 =$ ....

3) Зная объем пирамиды V_2 и площадь её основания S_2, можно найти **высоту** h **этой пирамиды**: $V_2 = \frac{1}{3} S_2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V_2}{S_2} = \frac{V_1}{S_1}$

3.16. При помощи какого произведения векторов можно вычислить площадь параллелограмма, треугольника, построенных на этих векторах как на сторонах?

....

3.17. Как найти векторное произведение векторов, заданных в ортонормированном (декартовом) базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$?

....

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поскольку на этих векторах как на сторонах построен треугольник в основании пирамиды.

Векторное произведение примера	Векторное произведение моей задачи
$\left[\overline{AB}, \quad \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$	

$=\bar{i}(-6)-\bar{j}(-12)+\bar{k}\cdot 18$	

Длина вектора примера	Длина вектора моей задачи
$\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2+18^2}=$ $=\sqrt{6^2+(2\cdot 6)^2+(3\cdot 6)^2}=$ $6\sqrt{1+4+9}=6\sqrt{14}$	

Площадь основания пирамиды примера	Площадь основания пирамиды моей задачи
$S_2=3\sqrt{14}$	

Итак, высота пирамиды, опущенная из вершины D, равна:

Высота пирамиды примера	Высота пирамиды моей задачи
$h=\dfrac{3V_2}{S_2}=\dfrac{3\cdot 6}{3\sqrt{14}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$	

4) Найдём **координаты точки** K**,** делящей сторону AB в отношении λ.

3.18. Запишите формулы, по которым можно найти координаты точки K, делящей отрезок AB в отношении λ.

……………………………………………………………………………………

Воспользовавшись записанными Вами формулами, найдём координаты точки K, так как, если эта точка K делит сторону AB в отношении λ и координаты точек А и В следующие:

$A($ $\qquad\qquad\qquad$ $)$, $B($ $\qquad\qquad$ $)$, то

$x_k=$ ....

$y_k=$ ....

$z_k=$ ....

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЗАДАЧА 4.0 (4. № $\underset{\text{моего варианта}}{\rule{3cm}{0pt}}$)

Даны вершины треугольника A, B, C. Требуется:

1) Построить треугольник ABC.

2) Записать уравнения высоты BD и медианы CE.

3) Записать уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC.

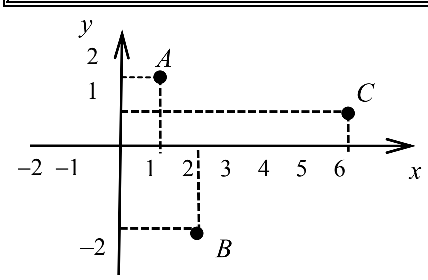
Решение.1) Построим треугольник ABC.

Координаты точек примера	Координаты точек моей задачи
$A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$	$A(\quad,\quad)$, $B(\quad,\quad)$, $C(\quad,\quad)$

Для построения треугольника ABC в декартовой системе координат на плоскости (в R^2 – двухмерном пространстве) на оси x в направлении орта $\vec{i}$ отложим столько единиц масштаба, какова первая координата точки, если эта координата положительна, и в противоположном, если первая координата точки отрицательна.

На оси y относительно орта $\vec{j}$ сделаем то же самое для второй координаты точки.

Точка пересечения перпендикуляров из отложенных точек будет являться изображением заданной своими координатами точки в декартовой системе координат.

Точки A, B, C примера	Точки A, B, C моей задачи
	

Соединив точки A, B, C, получим треугольник.

2) Запишем уравнение высоты BD.

Прямая должна проходить через точку B и являться перпендикуляром к прямой, проходящей через точки A и C.

Найдём уравнение прямой AC как **прямой**, проходящей **через две данные точки** A и C.

4.1. Как это сделать? Запишите нужное уравнение, если $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

....

Уравнение прямой примера	Уравнение прямой моей задачи
$\frac{x-1}{6-1} = \frac{y-2}{1-2}$	

Каноническое уравнение прямой AC примера	**Каноническое** уравнение прямой AC моей задачи
$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-1}$	

Вектор $\vec{N} = (n_x, n_y)$, перпендикулярный прямой AC, является направляющим вектором $\vec{l} = (m, n)$ для искомой прямой BD.

4.2. Как найти вектор $\vec{N}_{AC} = (n_x, n_y)$, перпендикулярный прямой AC?……………………………………………………………………….

Получим **общее** уравнение этой прямой из канонического уравнения, освободившись от знаменателя и приводя подобные слагаемые.

Общее уравнение прямой AC примера	**Общее** уравнение прямой AC моей задачи
$-1(x-1) = 5(y-2)$ или $x + 5y - 11 = 0$	

Направляющий вектор прямой BD примера	Направляющий вектор прямой BD моей задачи
$\vec{N}_{AC} = (1, 5) = \vec{l}_{BD}$	$\vec{N}_{AC} = (\quad , \quad) = \vec{l}_{BD}$

4.3. Как, зная координаты направляющего вектора $\vec{l} = (m, n)$ прямой и координаты точки B, можно записать каноническое уравнение прямой? Запишите это уравнение, если $\vec{l} = (m, n)$, $B(x_B, y_B)$.

……………………………………………………………………………………..

Каноническое уравнение высоты *BD* примера	**Каноническое** уравнение высоты *BD* моей задачи
$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{5}$	

Если избавимся от знаменателей, то получим:

Общее уравнение высоты *BD* примера	**Общее** уравнение высоты *BD* моей задачи
$5x-y-12=0$ $\vec{N}_{BD}=(5,-1)$ $\vec{N}_{AC}=(1,\ 5)$	$\vec{N}_{BD}=(\qquad,\qquad)$ $\vec{N}_{AC}=(\qquad,\qquad)$

Проверка	Проверка
$\vec{N}_{BD}\perp\vec{N}_{AC}\Leftrightarrow\left(\vec{N}_{BD},\vec{N}_{AC}\right)=0$ $1\cdot 5+5(-1)=0$	

Медиана CE делит сторону AB треугольника ABC пополам. Найдём середину E отрезка AB и через точки C и E проведём медиану.

3.18. Как это сделать? Запишите нужные формулы, если $E(x_E, y_E)$,

$\lambda=$……………………………………………………………………………………………

Найдём координаты точки E:

Координаты точки *E* примера	Координаты точки *E* моей задачи
$x_E=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},\ y_E=\frac{2-2}{2}=0$	

4.4. Как записать уравнение медианы *CE*, проходящей через точки $C(x_C, y_C)$ и $E(x_E, y_E)$

Уравнение медианы *CE* примера	Уравнение медианы *CE* моей задачи

$\dfrac{x-6}{\frac{3}{2}-6}=\dfrac{y-1}{0-1}$	

4.5. Как называется такое уравнение прямой?

....

Каноническое уравнение медианы CE примера	Каноническое уравнение медианы CE моей задачи
$\dfrac{x-6}{-\frac{9}{2}}=\dfrac{y-1}{-1}$	

3) Чтобы записать **уравнение прямой, проходящей через точку** $\boldsymbol{A}$ **параллельно стороне** $\boldsymbol{BC}$**,** возьмём в качестве направляющего вектора $\vec{l}=(m,n)=\overrightarrow{BC}$ **.**

Вектор $\overrightarrow{BC}$ примера	Вектор $\overrightarrow{BC}$ моей задачи
$\overrightarrow{BC}=(4,3)=\vec{l}$	$\overrightarrow{BC}=(\quad,\quad)=\vec{l}$

4.6. Какой формулой надо пользоваться, чтобы записать искомое уравнение прямой L_A ?

....

Каноническое уравнение искомой прямой L_A примера	Каноническое уравнение искомой прямой L_A моей задачи
$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}$	

Ответ	Ответ
2) BD: $5x-y-12=0$, CE: $\dfrac{x-6}{-\frac{9}{2}}=\dfrac{y-1}{-1}$. 3) L_A: $3(x-1)=4(y-2)$	2) BD: CE: 3) L_A:

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАЧА 5.0 (5. № ____________)
моего варианта

Даны координаты точек A, B, C, D. Найти:

1) Уравнение плоскости p, проходящей через точки A, B, C.

2) Канонические уравнения прямой α, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости p.

3) Точки пересечения прямой α с плоскостью p и с координатными плоскостями xoy, xoz, yoz.

4) Расстояние от точки D до плоскости p.

Координаты точек примера		Координаты точек моей задачи	
$A(2, -3, 5)$,	$B(0, 2, 1)$,	$A($, , $)$,	$B($, , $)$,
$C(-2, -2, 3)$,	$D(3, 2, 4)$.	$C($, , $)$,	$D($, , $)$,

Решение

1) Изучим теоретический материал.

5.1. Как найти уравнение **плоскости**, проходящей **через три точки** $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$?

…………………………………………………………………………………….

Уравнение плоскости p примера	Уравнение плоскости p моей задачи
$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 0-2 & 2+3 & 1-5 \\ -2-2 & -2+3 & 3-5 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 0$

Разложение определителя по первой строке в примере	Разложение определителя по первой строке в моей задаче
$(x-2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -6(x-2) + 12(y+3) + 18(z-5) = 0$	

5.2. Как получить **общее** уравнение плоскости p?

……

Общее уравнение плоскости p примера	**Общее** уравнение плоскости p моей задачи
$p\!:6x-12y-18z+42=0$, или $x-2y-3z+7=0$.	

2) Найдём **канонические уравнения** прямой α, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости p.

5.3. Какой нормальный вектор $\overline{N}=\left(n_x, n_y, n_z\right)$ имеет плоскость p?

....

Координаты нормального к плоскости вектора примера	Координаты нормального к плоскости вектора моей задачи
$\overline{N}=\left(6,\ -12,\ -18\right)=6(1,-2,-3)$	$\overline{N}=(\quad,\quad,\quad)$

5.4. Каким вектором является вектор $\overrightarrow{N}$ по отношению к прямой α?

....

5.5. В каком виде надо выбрать уравнение прямой α? Запишите это уравнение, если координаты точки $D\left(x_D, y_D, z_D\right)$, $\overrightarrow{N}=\left(m, n, p\right)=\vec{l}$ – направляющий вектор прямой α.

....

5.6. Как называются уравнения прямой, записанные в таком виде?

....

Подставим в записанные Вами уравнения известные значения координат точки D и направляющего вектора $\vec{l}=\left(m, n, p\right)$.

Канонические уравнения прямой примера	**Канонические** уравнения прямой моей задачи
$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{-3}$	

3) Найдём **точки пересечения** прямой α с плоскостью p и с координатными плоскостями *xoy*, *xoz, yoz*.

5.7. Какие уравнения прямой α надо выбрать, чтобы найти точки пересечения прямой α с перечисленными плоскостями?

………………………………………………………………………………………..

Воспользуемся данными задачи:

Уравнения для данных примера	Уравнения для данных моей задачи
$\begin{cases} p: \quad x-2y-3z+7=0; \\ \alpha: \begin{cases} x-3=t, \quad \Rightarrow x(t)=t+3, \\ y-2=-2t, \Rightarrow y(t)=2-2t, \\ z-4=-3t, \Rightarrow z(t)=4-3t. \end{cases} \end{cases}$	

Подставляя найденные из уравнений прямой α функции $x(t), y(t), z(t)$ в уравнение плоскости p, найдем значение параметра t, удовлетворяющее всем уравнениям:

Значение t примера	Значение t моей задачи
$(t+3)-2(2-2t)-3(4-3t)+7=0,$ $14t=6, \quad t=\frac{3}{7}$	

Найдем точку пересечения прямой α с плоскостью p, вычислив её координаты при найденном значении t:

Координаты точки M_p примера	Координаты точки M_p моей задачи
$M_p: \quad \begin{array}{l} x_p=\frac{3}{7}+3=\frac{24}{7}; \\ y_p=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}; \\ z_p=4-\frac{9}{7}=\frac{19}{7}. \end{array}$	

5.8. Как проверить, правильно ли найдены координаты точки M_p?

………………………………………………………………………………………..

Проверка	Проверка
p: $\frac{24}{7}-\frac{16}{7}-\frac{57}{7}+\frac{49}{7}\equiv 0$ $\alpha:\begin{cases}\frac{\frac{24}{7}-3}{1}=\frac{3}{7}=t,\\ \frac{\frac{8}{7}-2}{-2}=\frac{-\frac{6}{7}}{-2}=\frac{3}{7}=t,\\ \frac{\frac{19}{7}-4}{-3}=\frac{-\frac{9}{7}}{-3}=\frac{3}{7}=t.\end{cases}$	

5.9. Каким уравнением зададим уравнение плоскости xoy?

……………………………………………………………………………………..

Запишем уравнения для нахождения координат точки пересечения плоскости xoy с прямой α. При *z=0 н*айдем значения параметра *t*.

Уравнение прямой α примера	Уравнение прямой α моей задачи
$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{4}{3}=t$	

Поочерёдно приравняем дроби значению параметра *t* и найдём координаты точки M_{xoy} пересечения плоскости xoy с прямой α:

Координаты точки M_{xoy} примера	Координаты точки M_{xoy} моей задачи
$x_1=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$; $y_1=-\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}$; $M_{xoy}\left(\frac{13}{3},-\frac{2}{3},0\right)$	

5.10. Проверим, правильно ли найдена точка M_{xoy}. Что нужно для этого сделать?

……………………………………………………………………………………

Проверка	Проверка
$\dfrac{\frac{13}{3}-3}{1}=\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{-\frac{2}{3}-2}{-2}=\dfrac{-\frac{8}{3}}{-2}=\dfrac{4}{3}$ всё правильно	

5.11. Каким уравнением зададим плоскость *xoz*?

…………………………………………………………………………………………

Найдём координаты точки M_{xoz} пересечения плоскости *xoz* с прямой α.

Координаты точки M_{xoz} примера	Координаты точки M_{xoz} моей задачи
$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{z-4}{-3}$; $x_2=1+3=4$, $y_2=0$, $z_2=-3+4=1$, $M_{xoz}(4,0,1)$.	

Проверим, правильно ли найдена точка M_{xoz}.

Проверка	Проверка
$\dfrac{4-3}{1}=1$; $\dfrac{1-4}{-3}=1$; всё правильно	

5.12. Каким уравнением зададим плоскость *yoz*?

……………………………………………………………………………………………………

Найдём координаты точки M_{yoz} пересечения плоскости *yoz* с прямой α..

Координаты точки M_{yoz} примера	Координаты точки M_{yoz} моей задачи
$\dfrac{-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{-3}$; $x_3=0$, $y_3=8$, $z_3=13$, $M_{yoz}(0,8,13)$.	

Проверка	Проверка
$\dfrac{-3}{1}=-3$; $\dfrac{8-2}{-2}=-3$; $\dfrac{13-4}{-3}=-3$;	

точка найдена правильно	

5.13. По какой формуле можно найти расстояние $\rho(D, p)$ от точки D до плоскости p? Запишите эту формулу

……………………………………………………………………………………

5.14. Сформулируйте правило, по которому можно найти расстояние от точки D до плоскости p.

Правило. Чтобы найти расстояние

……………………………………………………………………………………

Вычислим расстояние от точки D до плоскости p.

Расстояние от точки D до плоскости p примера	Расстояние от точки D до плоскости p моей задачи
$\rho(D, p) = \dfrac{\lvert 1\cdot 3 - 2\cdot 2 - 3\cdot 4 + 7\rvert}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{36}{14}} = \sqrt{\dfrac{18}{7}}.$	

5.15. Каким другим способом можно найти это же расстояние?

……………………………………………………………………………………

Длина вектора $\overrightarrow{DM_p}$ примера	Длина вектора $\overrightarrow{DM_p}$ моей задачи
$\lvert\overrightarrow{DM_p}\rvert = \sqrt{(\frac{24}{7} - 3)^2 + (\frac{8}{7} - 2)^2 + (\frac{19}{7} - 4)^2} = \sqrt{\frac{18}{7}}$	

Ответ	Ответ
1) $p: 6x - 12y - 18z + 42 = 0$, или $x - 2y - 3z + 7 = 0$, 2) $\alpha: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-4}{-3}$, 3) $M_p\left(\frac{24}{7}, \frac{8}{7}, \frac{19}{7}\right)$, $M_{xoy}\left(\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)$, $M_{xoz}(4,0,1)$, $M_{yoz}(0,8,13)$ 4) $\rho = \sqrt{\dfrac{18}{7}}$.	

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Под номером шесть Вам придётся решить две задачи в соответствии с последней цифрой Вашего шифра. Например, последняя цифра Вашего шифра – 5, следовательно, Вы решаете задачи 6.5 и 6.15. Если последняя цифра Вашего шифра 2, то решать следует задачи 6.2 и 6.12.

ЗАДАЧА 6.0 (6. №   )
моего варианта

Прежде чем браться за решение шестой задачи, запишите ответы на следующие вопросы и предложения.

6.1. Как формулируется определение линии на плоскости?

....

6.2. Какую кривую называют окружностью?

....

6.3. Запишите каноническое уравнение окружности, имеющей радиус R и центр в точке $O(a,b)$.

....

6.4. Сформулируйте определение эллипса
....

6.5. Изобразите эллипс и запишите, какие основные зависимости существуют между параметрами, характеризующими эту линию:

a –...
b –...
F_1 ....
F_2 ....
$\varepsilon =$...
$x =$......................– уравнения директрис.

6.6. Сформулируйте определение гиперболы
....

6.7. Изобразите гиперболу и запишите, какие основные зависимости существуют между параметрами, характеризующими эту линию.
a –...
b –...
F_1 ....

F_2 ....

$\varepsilon =$...

$x =$.....................– уравнения директрис.

$y =$.....................– уравнения асимптот.

6.8. Сформулируйте определение параболы.

....

6.9. Изобразите параболу и запишите, какие основные параметры характеризуют эту кривую.

$O($, $)$.......................................……………………………..

$F($, $)$......................................………………………………

$x =$.....................уравнение директрисы параболы.

6.10. Известно, что эксцентриситет ε кривой второго порядка больше единицы ($\varepsilon > 1$). Какая это кривая?

Эта кривая называется ....

6.11. Известно, что эксцентриситет ε кривой второго порядка равен единице ($\varepsilon = 1$). Какая это кривая?

Эта кривая называется ....

6.12. Известно, что эксцентриситет ε кривой второго порядка меньше единицы ($\varepsilon < 1$). Какая это кривая?

Эта кривая называется ....

6.13. Известно, что эксцентриситет ε кривой второго порядка равен нулю ($\varepsilon = 0$). Какая это кривая?

Эта кривая называется ....

6.14. Назовите семь классов линий второго порядка, точки которых удовлетворяют уравнениям:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – это уравнение...

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – это уравнение...

3. $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ – это уравнение...

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – это уравнение...

5. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – это уравнение...

6. $y^2 = 2px$ – это уравнение...

7. $y^2 - a^2 = 0$ – это уравнение...

8. $y^2 + a^2 = 0$ – это уравнение...

9. $y^2 = 0$ – это уравнение...

Задачи 6.1 – 6.10.

Даны координаты точек A и B и радиус окружности R, центр которой – в начале координат.

Требуется:

1) составить каноническое уравнение эллипса (гиперболы), проходящего через точки A и B, если фокусы эллипса (гиперболы) расположены на оси абсцисс;
2) найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса (гиперболы), (уравнения асимптот гиперболы);
3) найти точки пересечения эллипса (гиперболы) и окружности;
4) построить эллипс (гиперболу) и окружность.

Решение. Запишем каноническое уравнение эллипса (гиперболы), если его фокусы расположены на оси абсцисс; полуоси эллипса (гиперболы) обозначим a и b.

Каноническое уравнение эллипса (гиперболы) имеет вид. ....

....

6.15. Если известно, что эллипс (гипербола) проходит через точку A, как это связано с уравнением этой кривой?

....

Запишем уравнение эллипса (гиперболы), проходящего через точку A.

A (;   ) $\Rightarrow$ ....

Запишем уравнение эллипса (гиперболы), проходящего через точку B.

B(;   ) $\Rightarrow$ ....

Из полученной системы двух уравнений найдём полуоси эллипса (гиперболы) a и b.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A^2}{a^2} \pm \dfrac{y_A^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{x_B^2}{a^2} \pm \dfrac{y_B^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Например, 1-е уравнение умножим на } (-x_B^2), \\ \text{2-е – на } (x_A^2). \text{ Сложим их, исключив таким} \\ \text{образом } a^2, \text{ и найдем } b^2. \\ \text{Аналогично, исключив } b^2, \text{ найдем } a^2. \end{cases}$$

Не забудьте, что $a > 0$ и $b > 0$.

Получив значения полуосей эллипса (гиперболы) a и b, запишем каноническое уравнение кривой.

....

Сделаем проверку: при подстановке координат точки A или точки B уравнение обращается в тождество.

A: ....

B: ....

Зная полуоси эллипса (гиперболы), найдём координаты фокусов кривой $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, эксцентриситет ε и уравнения асимптот гиперболы.

$c^2 =$ ....

$\varepsilon =$ ....

$\left(y = \pm \frac{b}{a} x = \right.$ ....

$)$

6.16. Составим уравнение окружности с центром в начале координат, зная её радиус R:

$R =$ ....

Решив систему уравнений, содержащую уравнения эллипса (гиперболы) и окружности, найдём координаты точек пересечения эллипса (гиперболы) и окружности:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Например, умножим } 1-\text{е уравнение на } (-a^2) \text{ и} \\ \text{сложим уравнения. Исключив } x^2, \text{ найдем}: y^2 = v, \\ \text{откуда } y_{1,2} = \pm\sqrt{v}. \\ \text{Аналогично, исключив } y^2, \text{ найдем}: x^2 = w. \\ \text{Откуда } x_{1,2} = \pm\sqrt{w}. \end{cases}$$

6.17. Итак, точки пересечения эллипса (гиперболы) и окружности ....

$M_1($; $)$, $M_2($; $)$, $M_3($; $)$ $M_4($; $)$

6.18. Построим эллипс (гиперболу) и окружность.

Задача 6.11. Решается так же, как и задачи 6.1 − 6.10.

Задачи **6.12 – 6.25**.

В соответствии с условием задачи, сделайте схематический чертёж, если точка $M(x, y)$ принадлежит искомой кривой.

Запишите уравнение, связывающее заданные в условии задачи расстояния в виде равенства длин векторов.

....

Подставьте в составленное Вами уравнение координаты данных в условии задачи точек и запишите составленное Вами уравнение искомой кривой в координатной форме, учитывая, что длина вектора $\overrightarrow{AM} = \left(x - x_A, y - y_A\right)$ находится по формуле:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{\left(x-x_A\right)^2 + \left(y-y_A\right)^2}\,, \text{ если } \quad M\left(x, y\right),\ A\left(x_A, y_A\right).$$

....

Избавьтесь от квадратных корней в последнем уравнении, возведя это уравнение в квадрат:

....

Это уравнение ....
(какой кривой?)

Параметры найденной кривой и координаты её точек:....................................
....

Постройте линию, уравнение которой Вы получили.

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Задача 7 (7. №   )
моего варианта

7.1. Какими основными постоянными элементами задаётся полярная система координат? ....

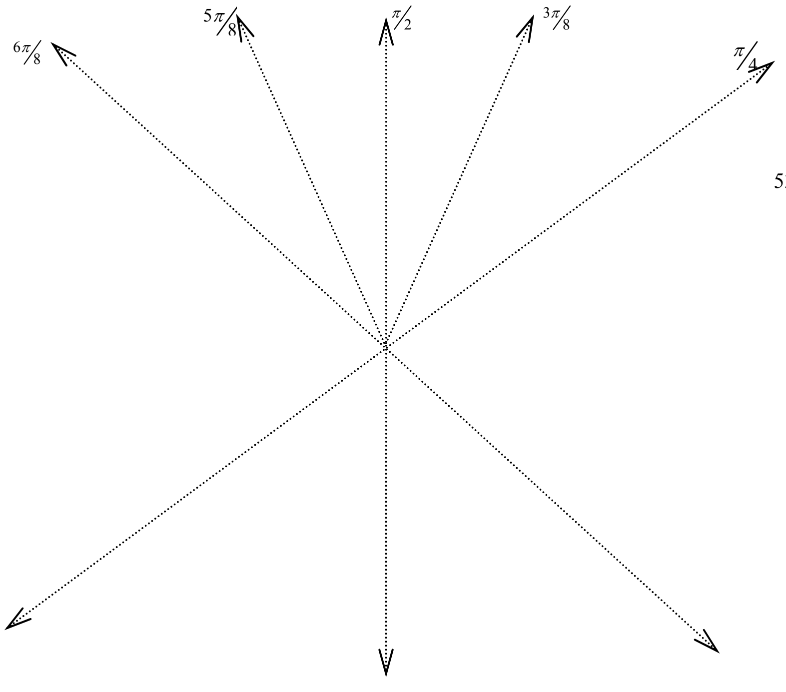
7.2. Каковы полярные координаты точки $M(\varphi, \rho)$? (Что такое φ и ρ?)

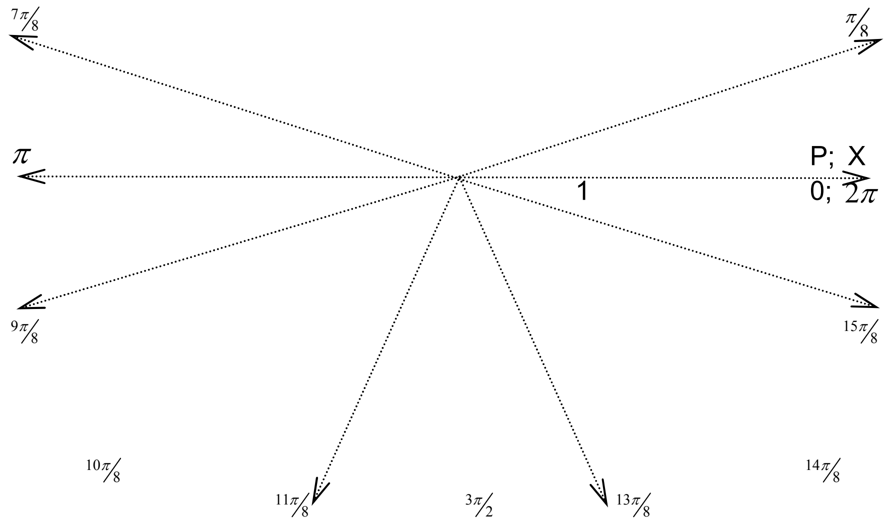
Полярный радиус ρ ....
Полярный угол φ...

Заполните таблицу значений полярного радиуса ρ в зависимости от значений полярного угла φ для Вашей задачи №7, $\rho =$

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{10\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{12\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{14\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ																	

Постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами φ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса ρ. Если ρ – отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль ρ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.





7.3. Запишите формулы, которые связывают декартовы и полярные координаты точки $M(x, y) = M(\varphi, \rho)$:

$\rho = \ldots\ldots\ldots$; $\sin\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\cos\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $tg\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Найдите уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, если начало системы координат совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, заменив ρ и функции φ по соответствующим формулам. В случае необходимости следует применить **формулы для кратных углов:**

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi, \qquad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2}, \quad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2}.$$

Получите уравнение кривой в декартовой системе координат:

.... уравнение кривой в декартовой системе координат.

7.4. Как называют кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид: $\rho = a\sin k\varphi$ и $\rho = a\cos k\varphi$?