Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Олимпиада по математике • I тур

14 марта 2013 года • I курс

Задача 1.

Определите порядок матрицы A, если $\det A = 3$ и $\det\left(A^2\right) + \det(2A) - \det(3A) = -186$.

Решение.

Из $\det\left(A^2\right) + \det(2A) - \det(3A) = -186$. и $\det A = 3$ следует $9 + 2^n \cdot 3 - 3^{n+1} = -186$, отсюда $3^n - 2^n = 65$. Решением этого уравнения при $n \in \mathbb{N}$ есть $n = 4$.

Ответ: 4.

Задача 2.

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!}{(n+2)!\left(\sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt[3]{n^3-n+2}\right)}$.

Решение.

Так как $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! =$

$$= (2-1)1! + (3-1)2! + (4-1)3! + \ldots + \big((n+1)-1\big)n! = (n+1)! - 1,$$ то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)! - 1\right]\times$$

$$\times\frac{\sqrt[3]{(n^3+n+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+n+1)(n^3-n+2)} + \sqrt[3]{(n^3-n+2)^2}}{(n+2)!\,(2n-1)} =$$

$$= \frac{\left[(n+1)! - 1\right]\cdot 3n^2}{(n+1)!(n+2)(2n-1)} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5.

Задача 3.

Вычислите интеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a + be^x}}$ при всех допустимых значениях a и b.

Решение.

В области, где $a + be^x > 0$, при $ab = 0$ – интегралы табличные:

1) $a \neq 0, b = 0,\ \ I = \dfrac{x}{\sqrt{a}} + c$,

2) $a=0,\, b\neq 0,\quad I=\dfrac{-2\,e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{b}}+c$.

При $\quad ab\neq 0,\quad I=\left|a+be^{x}=t^{2},\, dx=\dfrac{2tdt}{t^{2}-a}\right|=\int\dfrac{2dt}{t^{2}-a}=$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{2dt}{\left(\sqrt{-a}\right)^{2}+t^{2}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}arctg\sqrt{-1-\frac{b}{a}e^{x}}+c\ \ \text{при}\ \ a<0\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+be^{x}}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{x}}+\sqrt{a}}\right|+c\quad \text{при}\quad a>0.\end{cases}$$

Задача 4.

Функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a;b]$, причём $f(x)>0$, $f'(x)<0\quad \forall x\in[a;b]$. Через некоторую точку $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right),\ x_0\in(a;b)$, кривой $y=f(x)$ проведена касательная, которая вместе с прямыми $x=a$, $x=b,\ y=0$, образует трапецию минимальной площади. Найдите координаты точки M_0 и площадь трапеции.

Решение.

Используя уравнение касательной $y-y_0=f'(x)\,(x-x_0)$, находим площадь трапеции $\qquad S_{трап.}=S(x_0)=\dfrac{|aA|+|bB|}{2}\cdot(b-a)$, где

$|aA|=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0),\quad |bB|=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)$.

Отсюда $S(x_0)=\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}-x_0\right)\cdot(b-a)$. Так как x_0- точка минимума, то $S'(x_0)=f''(x_0)\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}-x_0\right)\cdot(b-a)=0$. Отсюда $x_0=\dfrac{a+b}{2}$.

Искомая точка $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$имеет координаты $M_0\left(\dfrac{a+b}{2};\, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ и

$$S_{\min}=S\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a).$$

Ответ: $M_0\left(\dfrac{a+b}{2};\, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right),\ S_{\min}=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)$.

Задача 5.

Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $arctg(x^2)+arctg\,y=\dfrac{\pi}{4}$

и её асимптотой.

Решение.

Запишем уравнение в виде $y=\dfrac{\pi}{4}-arctg(x^2)\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$. Воспользовавшись формулой $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\;tg\beta}$, получим равносильное уравнение

$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}-1$ – колоколообразная кривая, $x\in\mathbb{R}$, $y\in(-1;1]$.

Уравнение горизонтальной асимптоты $y=-1$.

Поэтому искомая площадь фигуры равна

$$S=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=4\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=4arctg\,x\Big|_0^{+\infty}=2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задача 6.

Два прямых конуса имеют общее основание, ограниченное эллипсом с полуосями a и b $(a>b)$, и расположены по разные стороны от него. Высота одного конуса h, другого $-H$ $(h<H)$. Найдите наибольшее расстояние между прямыми, содержащими образующие этих конусов.

Решение.

Пусть S_1-вершина большего, а S_2-меньшего конуса и $|AO|=a$ (см.рис.).

Введём декартову систему координат и запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$, $t\in[0;2\pi)$. Тогда точки B (текущая точка), A, S_1, S_2 будут иметь соответствующие координаты: $B=\{a\cos t;b\sin t;0\}$, $A=\{-a;0;0\}$, $S_1=\{0;0;H\}$, $S_2=\{0;0;-h\}$. Запишем формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми $\rho(t)=\dfrac{\left|\left(\vec{R};\vec{l}_1;\vec{l}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{l}_1;\vec{l}_2\right]\right|}$, где $\vec{l}$, $\vec{l}_2 -$ направляющие векторы прямых, а $\vec{R}-$ вектор, соединяющий две произвольные точки прямых.

Примем за $\vec{l}_1=\overrightarrow{AS_1}=\{a;0;H\}$, $\vec{l}_2=\overrightarrow{S_2B}=\{a\cos t;b\sin t;h\}$, $\vec{R}=\overrightarrow{AB}=\{a(1+\cos t);b\sin t;0\}$. Тогда смешенное произведение векторов $\left(\vec{R};\vec{l}_1;\vec{l}_2\right)$ равно $\left(\vec{R};\vec{l}_1;\vec{l}_2\right)=-ab\left(H+h\right)\sin t$, а векторное произведение $\left[\vec{l}_1;\vec{l}_2\right]=-\vec{i}bH\sin t+\vec{j}a\left(H\cos t-h\right)+\vec{k}ab\sin t$. Обозначим через

$$U\left(t\right)=\rho^2(t)=\frac{\left(\vec{R};\vec{l}_1;\vec{l}_2\right)^2}{\left(\left|\left[\vec{l}_1;\vec{l}_2\right]\right|\right)^2}=\frac{a^2b^2\left(H+h\right)^2\sin^2 t}{b^2H^2\sin^2 t+a^2\left(H\cos t-h\right)^2+a^2b^2\sin^2 t}.$$

Исследуем функцию $U\left(t\right)$ на экстремум. Очевидно, можно считать, что $t\in\left[0;\pi\right]$, причём $U\left(0\right)=U\left(\pi\right)=0$.

Из уравнения $U'\left(t\right)=0$ получим $\left(H\cos t-h\right)\left(H-h\cos t\right)=0$.

Так как $H-h\cos t\geq 0$ для $\forall t$, имеем $\cos t_0=\dfrac{h}{H}$ и $U\left(t_0\right)=U_{\max}$, а

$$\rho_{\max}=\rho\left(\cos t_0=\frac{h}{H}\right)=\frac{ab\left(H+h\right)\sin t_0}{\sqrt{b^2\left(H^2+a^2\right)\sin^2 t_0+a^2\left(H\cos t_0-h\right)^2}}=\frac{a\left(h+H\right)}{\sqrt{a^2+H^2}}.$$

Ответ: $\rho_{\max}=\dfrac{a\left(h+H\right)}{\sqrt{a^2+H^2}}$.

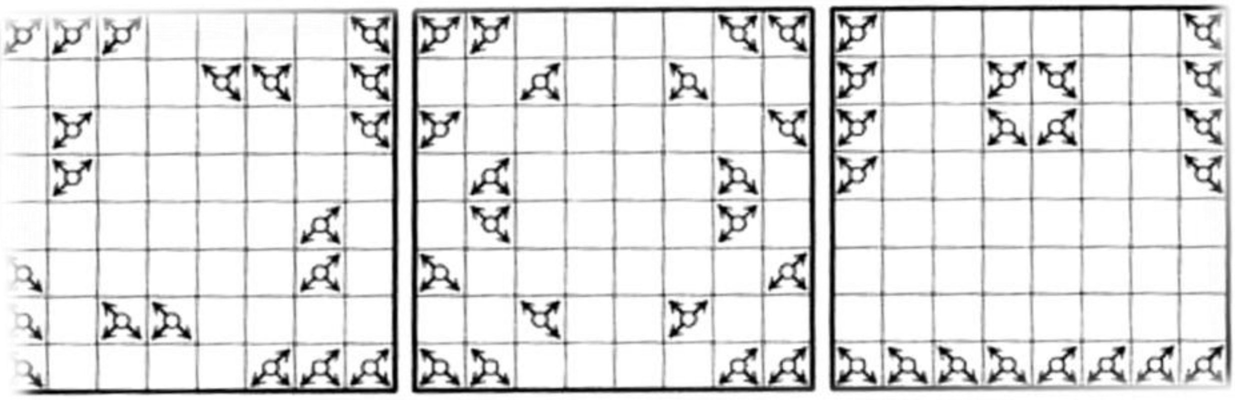
Задача 7.

Фигура «мамонт» бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8? Привести пример.

Решение.

Из каждого мамонта выпустим три стрелки в трёх направлениях, в которых он бьёт. Сопоставим стрелку диагонали (не обязательно главной), если мамонт, из которого идёт стрелка, стоит в этой диагонали, а стрелка идёт вдоль неё. Тогда каждой диагонали требуется сопоставить не более двух стрелок: в противном случае две из них будут идти в одном направлении, и один из мамонтов будет бить другого. Поскольку диагоналей всего 30 (по 15 в каждом направлении), стрелок им сопоставлено не более 60, а значит всего мамонтов не больше $\frac{60}{3} = 20$.

Три возможных примера расположения 20 мамонтов представлены на рисунках.



Возможны и другие расположения.

Ответ: