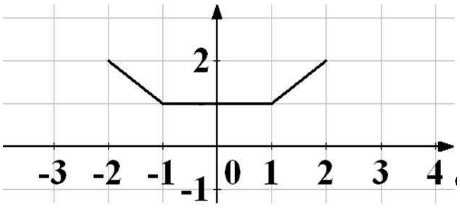
II тур РСО 2010/11 второй и старшие курсы. ТУСУР

Задача 1. Функция $f(x)$ задана графически на отрезке $[-2; 2]$. Найдите ту первообразную функции $f(x)$, которая является нечётной функцией.



Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на $[-2; 2]$, а следовательно имеет первообразную $F(x)$.

Зададим функцию $f(x)$ аналитически: $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$. Тогда

$$F'(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad F'_-(-1) = F'_+(-1), \quad F'_-(1) = F'_+(1).$$

Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ имеет вид $F(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + c_1, & -2 \le x < -1 \\ x + c_2, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + c_3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$. Функция $F(x)$ должна быть дифференцируемой на $[-2; 2]$, а следовательно и непрерывной на $[-2; 2]$. Константы c_1, c_2, c_3 выберем так, чтобы функция $F(x)$ была непрерывной, т.е.

$$\lim_{x \to -1-0} F(x) = \lim_{x \to -1+0} F(x) \Rightarrow -\frac{1}{2} + c_1 = -1 + c_2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 1-0} F(x) = \lim_{x \to 1+0} F(x) \Rightarrow 1 + c_2 = \frac{1}{2} + c_3.$$

Отсюда получим неопределённую систему линейных алгебраических уравнений, которая описывает множество первообразных функции $f(x)$: $\begin{cases} c_1 - c_2 = -\dfrac{1}{2} \\ c_2 - c_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Требуется найти такое частное решение этой системы, чтобы первообразная была нечётной функцией. Сразу можно заметить, что у нечётной функции $F(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Пусть c_2 – свободное неизвестное. Тогда при $c_2 = 0$ получим $c_1 = -\dfrac{1}{2}$, $c_3 = \dfrac{1}{2}$ и $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+1}{2}, & -2 \le x < -1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

Заметим, что для любой точки $x \in [-2; 2]$ справедливо $F(x) = -F(-x)$, то есть $F(x)$ является нечётной функцией.

Убедимся, что $F(x)$ дифференцируема на $[-2;2]$. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости скалярной функции скалярного аргумента является существование производной. На $[-2;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;2]$ вычисляем производную стандартным образом. В точке -1 и в точке 1 равны односторонние производные.

Ответ: $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+1}{2}, & -2 \le x < -1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

Задача 2. Студент получил задание найти целую часть числа $\dfrac{2011!}{e}$. После долгих вычислений он нашел 5772-значный ответ, но когда пошел сдавать выполненное задание, то последняя цифра оказалась замазанной кляксой. Помогите студенту восстановить последнюю цифру найденного им числа.

Решение. Используем стандартное разложение функции e^x в ряд Тейлора: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, сходящийся на $(-\infty;+\infty)$, при $x=-1$. Получим $\dfrac{2011!}{e} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2011!}{n!}$. Члены ряда при $N \le 2011$ будут целыми числами, а значит и частичные суммы $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{(-1)^n 2011!}{n!}$ также целые. При $n > 2011$ члены ряда станут дробными. Поскольку искомая величина представлена суммой знакочередующегося ряда, для оценки остатка можно применить признак Лейбница (сходимости знакочередующихся рядов). Остаток знакочередующегося ряда по величине не превышает своего первого члена, а по знаку совпадает с ним:

$$|r_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2011!}{n!} \right| < \frac{2011!}{(N+1)!}.$$

При $N = 2011$ остаток ряда $|r_{2011}| < \dfrac{1}{2012} < 1, \quad r_{2011} > 0$.

Запишем частичную сумму $S_{2011} = \sum\limits_{n=0}^{2011} \dfrac{(-1)^n 2011!}{n!}$:

$S_{2011} = 2011! - 2011! + 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 3 - 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 4 + \ldots + 2011 \cdot 2010 \cdot 2009 - 2011 \cdot 2010 + 2011 - 1$

Выполним группировку:

$S_{2011} = (2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 3 - 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 4) + (2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 5 - 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 6) + \ldots +$
$+ (2011 \cdot 2010 \cdot 2009 - 2011 \cdot 2010) + (2011 - 1) =$
$= 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 + 2011 \cdot 2010 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 + \ldots + 2011 \cdot 2010 \cdot 2008 + 2010$

Следовательно, $S_{2011} > 0$ и S_{2011} — натуральное число, кратное 2010. Поэтому десятичная запись числа S_{2011} оканчивается на ноль.

Проведённая оценка остатка показала, что прибавление членов ряда с номерами $n > 2011$ к S_{2011} не изменит целой части десятичной записи числа $\dfrac{2011!}{e}$. Она оканчивается цифрой ноль.

Ответ: 0.

Задача 3. При каких действительных значениях параметров p, q и r любое решение дифференциального уравнения

$$y^{IV} + py''' + qy'' + ry' + y = 0$$

является ограниченной функцией на всей числовой оси?

Решение. Дано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение можно записать в виде линейной комбинации функций из фундаментальной системы решений. Поэтому достаточно потребовать, чтобы ФСР данного уравнения состояла из ограниченных функций. Функция $y \equiv 1$ не является решением данного уравнения (можно убедиться подстановкой). Таким образом, ФСР данного уравнения должна содержать только функции $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\sin\beta x$, $\cos\beta x$, где $\alpha \in R$, $\beta \in R$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$). Характеристическое уравнение

$$k^4 + pk^3 + qk^2 + rk + 1 = 0$$

должно иметь две пары простых мнимых корней $k_{1,2} = \pm i\alpha$, $k_{3,4} = \pm i\beta$, $\alpha \neq \beta$. Также будем считать $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (рассматриваем абсолютные величины, знак учли отдельно). Подставив $k_{1,2}$ и $k_{3,4}$ в характеристическое уравнение, получим:

$$\begin{cases} \alpha^4 \mp ip\alpha^3 - q\alpha^2 \pm ir\alpha + 1 = 0 \\ \beta^4 \mp ip\beta^3 - q\beta^2 \pm ir\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

Приравняем действительные и мнимые части в левой и правой частях каждого уравнения:

$$\begin{cases} \alpha^4 - q\alpha^2 + 1 = 0 \\ p\alpha^3 - r\alpha = 0 \\ \beta^4 - q\beta^2 + 1 = 0 \\ p\beta^3 - r\beta = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 - qt + 1 = 0$, корнями которого являются $t_1 = \alpha^2$ и $t_2 = \beta^2$ (это следует из первого и третьего уравнений системы). Для $t_1 = \alpha^2$ и $t_2 = \beta^2$ есть три условия:

1) Если $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, то $\alpha^2 \in R$, $\alpha^2 > 0$.

2) Если $\beta \in R$, $\beta \neq 0$, то $\beta^2 \in R$, $\beta^2 > 0$.

3) $\alpha \neq \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ а значит, $\alpha^2 \neq \beta^2$.

Таким образом, у квадратного уравнения должно быть два различных вещественных положительных корня $t_1 = \alpha^2$ и $t_2 = \beta^2$. Это позволяет поставить два условия для параметра q. Первое: $q^2 - 4 > 0$ (два различных вещественных корня). Второе: оба корня положительные.

Сумма корней этого квадратного уравнения равна q, а произведение корней равно 1. Таким образом, $q = \alpha^2 + \beta^2$ и $q > 0$. Данное условие достаточно, так как если сумма q и произведение 1 двух чисел положительны, то и сами числа положительны. Учитывая, что $q^2 - 4 > 0$ и $q > 0$, получим $q > 2$.

Второе и четвёртое уравнения системы позволяют найти p и r:

$$\begin{cases} p\alpha^3 - r\alpha = 0 \\ p\beta^3 - r\beta = 0 \end{cases}$$

Вычтем, а затем сложим уравнения системы:

$$\begin{cases} p(\alpha^3 - \beta^3) - r(\alpha - \beta) = 0 \\ p(\alpha^3 + \beta^3) - r(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то можно первое уравнение сократить на $(\alpha - \beta)$, второе на $(\alpha + \beta)$

$$\begin{cases} p(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - r = 0 \\ p(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - r = 0 \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим: $2p\alpha\beta = 0$.Так как $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то $p = 0$, а значит, и $r = 0$.

Ответ: $p = 0$, $r = 0$, $q > 2$ $\quad (y^{IV} + qy'' + y = 0, \quad q > 2)$

Задача 4. В честь дня святого Валентина ресторан решил провести акцию. Изготовлена тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и на каждый "столик для двоих" поставлены номера 00, 01, ..., 20. Пара, пришедшая в ресторан, может взять наугад один из билетов. Если номер столика, за который они сядут, можно получить из номера их лотерейного билета вычеркиванием одной из цифр, ресторан ставит на этот столик бутылку шампанского за свой счёт. Какова вероятность, что пара, пришедшая в ресторан третьей, получит шампанское?

Решение. Покажем, что для любого столика существует 28 билетов, которые позволяют получить шампанское за счёт ресторана.

Пусть номер столика имеет вид aa, т.е. состоит двух одинаковых цифр. Подойдёт один билет с номером из одинаковых цифр aaa. Рассмотрим билеты с номерами из двух различных цифр. Обозначим цифру билета, которую можно вычеркнуть, буквой b, $b \neq a$. Тогда пара может выбрать билеты с номерами aab (9 штук), aba (9 штук), baa (9 штук). Итого 28.

Если же номер столика состоит из различных цифр ab ($b \neq a$), то подойдут билеты aab, abb, bab, aba (4 штуки). Рассмотрим билеты с номерами из трёх различных цифр. Обозначим цифру билета, которую можно вычеркнуть, буквой c, $c \neq a$, $c \neq b$. Тогда пара может выбрать билеты с номерами abc (8 штук), acb (8 штук), cab (8 штук). Итого 28.

Рассмотрим событие $D3$ "третья пара выиграла шампанское". Назовём билет выигрышным, если вычёркиванием одной цифры из его номера можно получить номер столика, занятого парой, пришедшей третьей.

Первый способ. Применяем классическое определение вероятности. Пространство элементарных событий Ω будет состоять из всех возможных упорядоченных троек номеров билетов, взятых первыми тремя парами: $|\Omega| = 1000 \cdot 999 \cdot 998$. Благоприятствовать событию $D3$ будут только те тройки, у которых на третьей позиции стоят выигрышные номера. При этом первая и вторая пары могут взять любые другие билеты. Количество таких троек $m = 28 \cdot 999 \cdot 998$ (выбираем сначала третью позицию тройки, а затем первые две). Следовательно,
$P(D3) = \dfrac{28 \cdot 999 \cdot 998}{1000 \cdot 999 \cdot 998} = 0,028.$

Второй способ. Рассмотрим событие $D3$ "третья пара выиграла шампанское" и три гипотезы H_1 "первые две пары взяли выигрышные (для третьей пары) билеты"; H_2 "первые две пары взяли невыигрышные (для третьей пары) билеты"; H_3 "одна из пар взяла выигрышный билет и одна невыигрышный" (в принципе, можно выдвинуть четыре гипотезы). Вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{28 \cdot 27}{1000 \cdot 999}; \quad P(H_2) = \frac{972 \cdot 971}{1000 \cdot 999}; \quad P(H_3) = 2 \cdot \frac{28 \cdot 972}{1000 \cdot 999}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(D3/H_1) = \frac{26}{998}; \quad P(D3/H_2) = \frac{28}{998}; \quad P(D3/H_3) = \frac{27}{998}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим:

$$P(D3) = \frac{26}{998} \cdot \frac{28 \cdot 27}{1000 \cdot 999} + \frac{28}{998} \cdot \frac{972 \cdot 971}{1000 \cdot 999} + \frac{27}{998} \cdot 2 \cdot \frac{28 \cdot 972}{1000 \cdot 999} =$$

$$= \frac{26 \cdot 28 \cdot 27 + 28 \cdot 972 \cdot 971 + 27 \cdot 28 \cdot 972 + 27 \cdot 28 \cdot 972}{1000 \cdot 999 \cdot 998} =$$

$$= \frac{28 \cdot 27 \cdot (26 + 972) + 28 \cdot 972 \cdot (971 + 27)}{1000 \cdot 999 \cdot 998} = \frac{28 \cdot 998 \cdot (27 + 972)}{1000 \cdot 999 \cdot 998} = \frac{28 \cdot 999}{1000 \cdot 999} = 0,028.$$

Ответ: 0,028.

Задача 5. Найдите все корни уравнения $z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 17z + 15 = 0$.

Решение. Степень многочлена нечётная, поэтому у него есть хотя бы один вещественный корень. Выполним группировку

$$z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 17z + 15 = z^5 + z^4 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 15z + 15 =$$

$$= (z+1)\left(z^4 + 2z^3 + 2z + 15\right).$$

Следовательно, корень уравнения $z = -1$. Также этот корень можно найти подбором. Поскольку все коэффициенты многочлена положительные, то корень должен быть отрицательным. Проверяем $z = -1$ и убеждаемся, что это корень уравнения.

Многочлен $z^4 + 2z^3 + 2z + 15$ с действительными коэффициентами может иметь либо вещественные отрицательные, либо парные комплексно-сопряжённые корни. Представим этот многочлен как произведение двух квадратных трехчленов:

$$z^4 + 2z^3 + 2z + 15 = \left(z^2 + az + c\right)\left(z^2 + bz + d\right).$$

Раскроем скобки

$$z^4 + 2z^3 + 2z + 15 = z^4 + (a+b)z^3 + (c+d+ab)z^2 + (ad+bc)z + cd$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=2 \\ c+d+ab=0 \\ ad+bc=2 \\ cd=15 \end{cases}$$

Поскольку $cd = 15$, предположим, что $c = 3$, $d = 5$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 8+ab=0 \\ 3b+5a=2 \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3b+5a=2 \end{cases}$$

определённая $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, имеет единственное решение $a = -2$ и $b = 4$. Также найденные значения $a = -2$ и $b = 4$ удовлетворяют уравнению $8+ab = 0$. В итоге, мы получили разложение $z^4 + 2z^3 + 2z + 15 = (z^2 - 2z + 3)(z^2 + 4z + 5)$ и уравнение $z^4 + 2z^3 + 2z + 15 = 0$ равносильно совокупности квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} z^2 - 2z + 3 = 0 \\ z^2 + 4z + 5 = 0 \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений, получим корни

$$z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2} \qquad \text{и} \qquad z_{3,4} = -2 \pm i.$$

Ответ: -1; $1 \pm i\sqrt{2}$; $-2 \pm i$.

Задача 6. Вокруг трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = \sqrt{3}$ и $BC = 1$ описана окружность единичного радиуса с центром в точке O. Затем проведены ещё две окружности. Одна — через точки O, A, D, другая — через точки O, B, C. Найдите площадь области, ограниченной тремя данными окружностями.

Решение. Известно, что окружность можно описать вокруг трапеции только в том случае, когда трапеция является равнобедренной, причем центр окружности лежит на общем серединном перпендикуляре к основаниям трапеции. Введем декартову систему координат, поместив ее начало в центр описанной вокруг трапеции окружности – точку O и направив ось абсцисс вдоль серединного перпендикуляра к основаниям трапеции. Уравнение описанной вокруг трапеции окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$, или в полярной системе координат $\rho = 1$. Центры двух других окружностей равноудалены от вершин соответствующих оснований трапеции, поэтому они также располагаются на оси абсцисс. Кроме того, эти окружности проходят через начало координат, а значит, модули абсцисс их центров совпадают с радиусами. Уравнения этих окружностей имеют вид $(x \pm R)^2 + y^2 = R^2$, или $x^2 + y^2 = \mp 2xR$. Возможны два варианта расположения фигур: центр описанной окружности может находиться как снаружи (рис. 1), так и внутри трапеции (рис. 2).

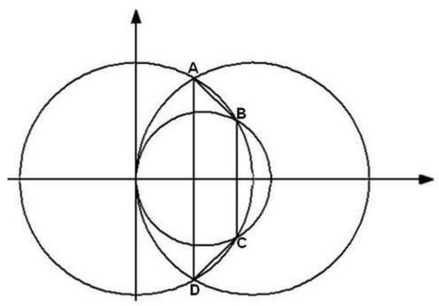


Рис.1

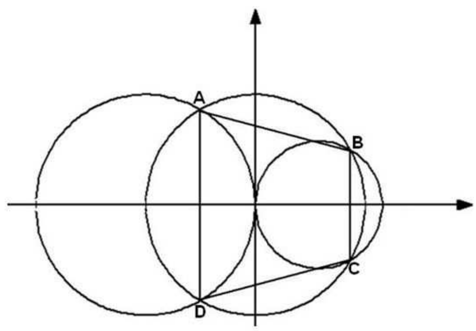


Рис.2

В первом случае, если ось абсцисс направить в сторону оснований трапеции, то ее вершины находятся в точках $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Подставив эти точки в уравнения окружностей $x^2 + y^2 = 2xR$, находим, что радиусы окружностей равны 1 и $\frac{1}{\sqrt{3}}$, и их уравнения имеют вид $x^2 + y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, или в полярной системе $\rho = 2\cos\varphi$ и $\rho = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}$.

Во втором случае, если ось абсцисс направить в сторону меньшего основания трапеции, то ее вершины находятся в точках $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, и уравнения окружностей имеют вид $x^2 + y^2 = -2x$ и $x^2 + y^2 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, или в полярной системе $\rho = -2\cos\varphi$ и $\rho = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}$.

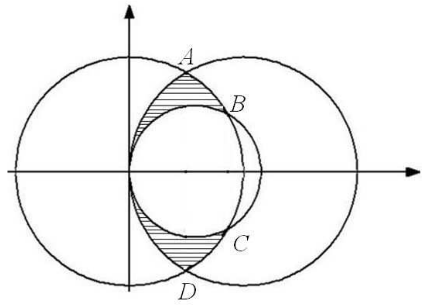


Рис.3

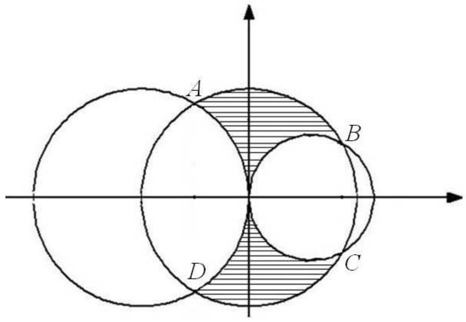


Рис.4

Первый способ (декартова система координат). В первом случае (рис. 3) площадь половины рассматриваемой области, находящейся в верхней полуплоскости, равна

$$S=\int\limits_0^{\frac12}\sqrt{2x-x^2}dx+\int\limits_{\frac12}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}dx-\int\limits_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{\frac{2x}{\sqrt3}-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac12}\sqrt{1-(x-1)^2}dx+\int\limits_{\frac12}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}dx-\int\limits_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{\frac13-(x-\frac{1}{\sqrt3})^2}dx.$$

Сделаем замены: в первом интеграле — $x=\sin t+1$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right]$; во втором — $x=\sin t$, $t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$; в третьем — $x=\frac{\sin t+1}{\sqrt3}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$. Тогда

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt-\frac13\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt.$$

Найдем первообразную:

$$\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+c.$$

Следовательно,

$$S=-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt3}{8}+\frac{\pi}{4}+0+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt3}{8}-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt3}{8}-\frac{\pi}{36}-\frac{\sqrt3}{24}-\frac{\pi}{12}+0=\frac{5\pi}{36}-\frac{1}{2\sqrt3}.$$

Площадь всей области $2S=\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{\sqrt3}$.

Во втором случае (рис. 4), аналогично

$$S=\int\limits_{-\frac12}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}dx-\int\limits_{-\frac12}^{0}\sqrt{-2x-x^2}dx-\int\limits_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{\frac{2x}{\sqrt3}-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-\frac12}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}dx-\int\limits_{-\frac12}^{0}\sqrt{1-(x+1)^2}dx-\int\limits_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{\frac13-(x-\frac{1}{\sqrt3})^2}dx.$$

Замены: $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$; $x=\sin t-1$, $t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; $x=\frac{\sin t+1}{\sqrt{3}}$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$. Тогда

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t dt-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt-\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{36}-\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{\pi}{12}+0=$$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{36}$, и $2S=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{18}$.

Второй способ (полярная система координат). В первом случае (рис. 3) площадь половины рассматриваемой области, находящейся в верхней полуплоскости, равна

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}}^{1}\rho d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}}^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi-\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi d\varphi+2\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi-\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi.$$

Учитывая, что

$$\int\cos^2\varphi d\varphi=\int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}dt=\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}+c,$$

получим

$$S=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}-0+\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{5\pi}{36}-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно, площадь всей области $2S=\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Во втором случае (рис. 4), аналогично

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}}^{1}\rho d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{-2\cos\varphi}^{1}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}-0+\frac{\pi}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{2}+0=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{36},$$

и $2S=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{18}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{18}$.

Задача 7. Загадали произвольное натуральное двузначное число N. Сначала число N уменьшили на 18, результат возвели в квадрат и прибавили к нему квадрат числа, записанного теми же цифрами, что и число N, но в обратном порядке. Затем из полученного результата 528 раз вычли сумму цифр числа N. В результате получили число M. Укажите самое маленькое число M, которое можно получить. Какое число N нужно при этом загадать?

Решение. Пусть x — первая цифра числа N (десятки), y — вторая цифра числа N (единицы). По условию требуется найти наименьшее значение выражения

$(10x+y-18)^2+(10y+x)^2-528(x+y), \quad x \in \{1,2\dots 9\}, \quad y \in \{0,1\dots 9\}.$

Первый способ. Рассмотрим в R^2 функцию $f(x,y)=(10x+y-18)^2+(10y+x)^2-528(x+y)$. Исследуем $f(x,y)$ на экстремум. Найдём частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=20(10x+y-18)+2(10y+x)-528=202x+40y-888$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(10x+y-18)+20(10y+x)-528=40x+202y-564.$$

Приравняв их к нулю, получим стационарную точку $x=4$, $y=2$. Найдём частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=202 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=202 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=40$$

Главные миноры 202 и 202^2-40^2 матрицы $\begin{bmatrix} 202 & 40 \\ 40 & 202 \end{bmatrix}$ положительны. Следовательно, соответствующая квадратичная форма положительно определена и точка $(4;2)$ является точкой локального минимума.

Так как функция имеет единственную стационарную точку, являющуюся минимумом, то в ней функция принимает наименьшее значение, равное $f(4;2)=-2016$

Второй способ. $f(x,y)=101x^2+40xy+101y^2-888x-564y+324$. Для квадратичной формы $101x^2+40xy+101y^2$ составим матрицу $\begin{bmatrix} 101 & 20 \\ 20 & 101 \end{bmatrix}$ и найдем собственные векторы $(-1;1)$ и $(1;1)$. Следовательно, замена $x=-u+v$ и $y=u+v$ позволит избавиться от слагаемого, содержащего произведение переменных. Действительно, $101(-u+v)^2+40(-u+v)(u+v)+101(u+v)^2-888(-u+v)-564(u+v)+324=162u^2+242v^2+324u-1452v+324$. Выделим полные квадраты: $162(u^2+2u)+242(v^2-6v)+324=162(u+1)^2+242(v-3)^2-2016$. Отсюда видно, что наименьшее значение равно -2016, и оно достигается при $u=-1$ и $v=3$, те. при $x=1+3=4$ и $y=-1+3=2$. Итак, загадали число 42.

Ответ: -2016 и 42.