Олимпиада по математике
II–IV курсы

Решения

Задача 1. Вычислить
$$\int \Big(1+x-\frac{1}{x}\Big)e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx.$$

Решение. Преобразуем интеграл:
$$\int \Big(1+x-\frac{1}{x}\Big)e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = \int e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + \int x\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx =$$
$$= \int e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + \int x\,d(e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}) = \int e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + xe^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} - \int e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = xe^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} + C.$$

Задача 2. Вычислить
$$\iint\limits_D |y^2-x^2|dx\,dy,$$
где $D : x^2+y^2 \leqslant 1$.

Решение. Перейдем в полярную систему координат:
$$\iint\limits_D |y^2-x^2|dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3|\cos 2\varphi|\,d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\,d\varphi =$$
$$\frac{1}{4}8\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\,d\varphi = 2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

Задача 3. Доказать, что выражение вида
$$-y\,dx + x\,dy + 2011dz$$
не имеет интегрирующего множителя, т.е. множителя вида $\mu(x,y,z)$, при умножении на который выражение становится полным дифференциалом некоторой функции.

Решение. Предположим, что $\mu = \mu(x,y,z)$ существует. Тогда
$$du = -y\mu\,dx + x\mu\,dy + 2011\mu\,dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Следовательно
$$u_x = -y\mu, u_y = x\mu, u_z = 2011\mu$$
и из теоремы о равенстве смешанных производных следует
$$\begin{cases} u_{xz} = u_{zx} \\ u_{yz} = u_{zy} \\ u_{xy} = u_{yx} \end{cases}$$

получим уравнения для μ:

$$\begin{cases} -y\dfrac{\partial\mu}{\partial z} = 2011\dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\ x\dfrac{\partial\mu}{\partial z} = 2011\dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\ -\mu - y\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = \mu + x\dfrac{\partial\mu}{\partial x}. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений запишем

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = -\frac{y}{x}\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

и, подставив в третье уравнение, получим

$$-\mu = \mu, \qquad \text{т.е. } \mu = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Решить задачу Коши

$$x^3(y' - x) = y^2, \qquad y(1) = 2.$$

Решение. Сделаем замену $y = x^2 z$, где $z = z(x)$. Тогда $y' = 2xz + x^2 z'$, и уравнение примет вид

$$2xz + x^2 z' - x = xz^2.$$

Далее

$$\frac{x\,dz}{dx} = z^2 - 2z + 1,$$

откуда

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x}$$

и

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{z-1} = \ln|x| + C.$$

Из начального условия $C = 1$, решение задачи Коши

$$y = \frac{2 - \ln|x|}{1 - \ln|x|}x^2.$$

Задача 5. Действительные числа x, y, z, t таковы, что

$$x + y + z + t = 0, \quad x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Найти $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} + t^{2011}$.

Решение. Так как

$$0 = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = x^3 + y^3 + z^3 + (-x - y - z)^3 = -3(x+y)(y+z)(z+x),$$

то $x + y = 0$ или $y + z = 0$ или $z + x = 0$. Пусть для определенности $x + y = 0$, тогда $z + t = -(x + y) = 0$, т.е. $x = -y$, $z = -t$. Значит,

$$x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} + t^{2011} = (-y)^{2011} + y^{2011} + (-t)^{2011} + t^{2011} = 0.$$

Задача 6. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2012}-2\sqrt{n+2011}+\sqrt{n+2010}).$$

Решение. Преобразуем общий член ряда a_n, разбив его на два слагаемых и умножив на сопряженные:

$$a_n=\sqrt{n+2012}-\sqrt{n+2011}-(\sqrt{n+2011}-\sqrt{n+2010})=$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+2012}+\sqrt{n+2011}}-\frac{1}{\sqrt{n+2011}+\sqrt{n+2010}}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\Big(\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}}-\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}\Big)+\Big(\frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}-\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}}\Big)+\ldots,$$

т.е.

$$S_k=\frac{1}{\sqrt{k+2012}+\sqrt{k+2011}}-\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}$$

и

$$S=\lim_{k\to\infty}S_k=-\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}.$$

Задача 7. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых.

Решение. Пусть прямые a и b скрещиваются. Построим отрезок AB – их общий перпендикуляр и плоскость γ, перпендикулярную AB и проходящую через точку O – его середину (см. рис.).

Пусть прямые a' и b' – ортогональные проекции прямых и b на плоскость γ. Тогда любая точка M, лежащая на биссектрисе углов, образованных прямыми a' и b', равноудалена от прямых и b.

Действительно, пусть MC и MD – перпендикуляры, опущенные из точки на прямые a' и b' соответственно, A' и B' – ортогональные проекции точек и D на прямые и b. Тогда $A'M\perp a'$ и $B'M\perp b'$ (по теореме о трех перпендикулярах), значит, $A'M\perp a$ и $B'M\perp b$. Кроме того, прямоугольные треугольники $A'C$ и $B'MD$ равны (по двум катетам), поэтому $A'M=B'M$.

Если точка не принадлежит ни одной из биссектрис указанных углов, то она не равноудалена от сторон угла, следовательно, не равноудалена от прямых и b (если $CM\neq DM$, $A'C=B'D$, то $A'M\neq B'M$).

Таким образом, искомое геометрическое место точек – две перпендикулярные прямые, лежащие в плоскости γ.