Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Олимпиада по математике

16 марта 2011 года • I курс

Задача 1.

На плоскости дано 2011 векторов, причём среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 2010 векторов коллинеарна с вектором, не включённым в эту сумму. Найдите сумму всех 2011 векторов.

Решение.

К каждому из 2011 равенств, соответствующих коллинеарности суммы 2010 векторов оставшемуся вектору, прибавим этот вектор, и учтём, что среди всех векторов есть неколлинеарные.

Запишем 2011 векторных равенств $\sum\limits_{k=1,(k\neq i)}^{2011} \vec{a}_k = \lambda_i a_i$, $i=\overline{1;2011}$. Обозначим сумму всех векторов $\vec{b} = \sum\limits_{k=1}^{2011} \vec{a}_k$. Тогда получим $\vec{b} = \lambda_i a_i + a_i$, $i=\overline{1;2011}$.

Следовательно, $\vec{b} = (\lambda_1 + 1)\vec{a}_1 = (\lambda_2 + 1)\vec{a}_2 = \ldots = (\lambda_{2011} + 1)\vec{a}_{2011}$. Но среди векторов есть неколлинеарные. Пусть, например, это a_1 и a_2. Тогда равенство $(\lambda_1 + 1)\vec{a}_1 = (\lambda_2 + 1)\vec{a}_2$ возможно только в случае $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -1$. Отсюда следует, что $\vec{b} = \sum\limits_{k=1}^{2011} \vec{a}_k = 0$.

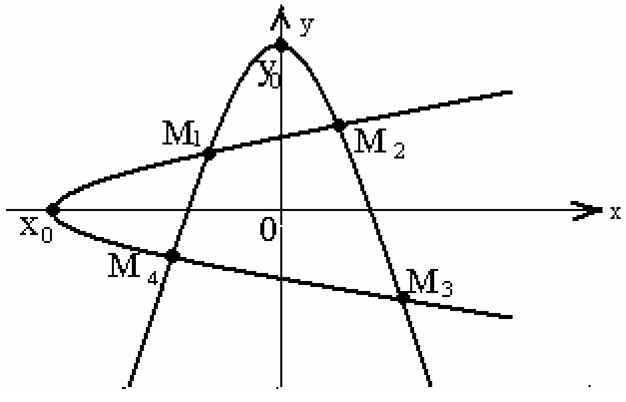
Ответ: $\vec{b} = \sum\limits_{k=1}^{2011} \vec{a}_k = 0$

Задача 2.

На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности. Найдите координаты центра и радиус окружности.

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы оси парабол совпадали с осями координат.



Уравнения парабол запишем в виде $x^2 = -2p(y - y_0)$ и $y^2 = 2q(x - x_0)$, где $p > 0,\ q > 0,\ x_0 < 0,\ y_0 > 0$. Координаты $(x_k; y_k)$ точек пересечения парабол $M_k,\ k = \overline{1;4}$ удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} {x_k}^2 = -2p(y_k - y_0), \\ {y_k}^2 = 2q(x_k - x_0). \end{cases}$

Складывая уравнения системы и выделяя полные квадраты, получим $(x_k - q)^2 + (y_k + p)^2 = p^2 + q^2 + 2py_0 - 2qx_0$. Так как правая часть положительна, то это уравнение окружности с центром в точке $O'(q; -p)$ радиуса $R = \sqrt{p^2 + q^2 + 2(py_0 - qx_0)}$. Все четыре точки $M_k(x_k; y_k),\ k = \overline{1;4}$ лежат на этой окружности.

Ответ: $O'(q; -p),\ R = \sqrt{p^2 + q^2 + 2(py_0 - qx_0)}$.

Задача 3.

Составьте уравнение линии, по которой перемещается середина единичного отрезка, концы которого находятся на параболе $y = x^2$.

Решение.

Выразим через угловой коэффициент k прямой, на которой лежит отрезок, координаты середины отрезка, а затем исключим k.

Пусть $A(x_1; {x_1}^2)$ и $B(x_2; {x_2}^2)$ концы отрезка, $M(x; y)$ его середина. Угловой коэффициент прямой AB $k = \dfrac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$.

Тогда $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{k}{2},\ y = \dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2} = \dfrac{k^4 + k^2 + 1}{4}$, здесь учтено, что $|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + ({x_2}^2 - {x_1}^2)^2 = 1$. Исключая k из параметрических уравнений (k можно рассматривать как параметр), получим явный вид уравнения траектории точки $M(x; y)$: $y = \dfrac{16x^4 + 4x^2 + 1}{4(4x^2 + 1)}$.

Ответ: $y = \dfrac{16x^4 + 4x^2 + 1}{4(4x^2 + 1)}$.

Задача 4.

Найдите предел $\lim\limits_{n \to \infty} A^n$, когда он существует, где $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$, учитывая, что предел матрицы равен матрице из пределов её элементов.

Решение.

Степень матрицы найдём методом математической индукции:

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix} a^3 & a^2+a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A^{n-1}=\begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}$, тогда

$A^n=A^{n-1}A=\begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$. Так как

$a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1=\dfrac{1-a^n}{1-a}$, то при $|a|<1$ существует

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}a^n & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{n\to\infty}a^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5.

Решите матричное уравнение $X+AX+XA=B$, где A и B матрицы размера $n\times n$, причём $A^2=0$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на A слева и на $E-A$ справа, найдём AX, а затем из исходного уравнения найдём X:

$A(X+AX+XA)(E-A)=AB(E-A)$, учитывая, что $A^2=0$,

$A(AX+X(A+E))(E-A)=AB-ABA$,

$AX(E^2-A^2)=AB-ABA,\ AX=AB-ABA$. Подставим AX в исходное уравнение: $X+XA=B+ABA-AB,\ X(E+A)=B+ABA-AB$. Умножим обе части равенства справа на $E-A$: $X=(B+ABA-AB)(E-A)$, откуда $X=B-AB-BA+2ABA$.

Ответ: $X=B-AB-BA+2ABA$.

Задача 6.

Найдите n $(n\in\mathbb{N})$ из уравнения

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx}{n}\right)^{\frac{12}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-46x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

Второй замечательный предел (1^∞):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-46x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-45x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{-45x}\frac{-45x}{(1-x)x}}=\exp(-45).$$

Положим $\alpha_n(x)=\dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx}{n}-1$, $\alpha_n(x)\to 0$ при $x\to 0$.

Тогда предел в левой части уравнения $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx}{n}\right)^{\frac{12}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha_n(x)\right)^{\frac{1}{\alpha_n(x)}\frac{12\alpha_n(x)}{x^2}}=\exp\lim_{x\to 0}\left(\frac{12\alpha_n(x)}{x^2}\right)=\exp\lim_{x\to 0}\left(\frac{12\alpha'_n(x)}{2x}\right)=$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\left(\frac{-6(\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx)}{nx}\right)=$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\left(\frac{-6(\cos x+2^2\cos 2x+\ldots+n^2\cos nx)}{n}\right)=\exp\frac{-6(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n}=$$

$\exp\dfrac{-6n(n+1)(2n+1)}{6n}=\exp\left(-(n+1)(2n+1)\right)$. Для нахождения n решим уравнение $(n+1)(2n+1)=45$. Отсюда $n=4\in\mathbb{N}$.

Ответ: $n=4$.

Задача 7.

Найдите $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f\left(\frac{x}{x+2}\right) \equiv x$.

Решение.

Дифференцируя обе части тождества, получим $f'\left(\frac{x}{x+2}\right) \cdot \frac{2}{(x+2)^2} \equiv 1$.

Положим $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$, откуда следует $x = 2$ и $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8$.

Ответ: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8$.

Задача 8.

Постройте эскиз графика функции $f(x) = arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

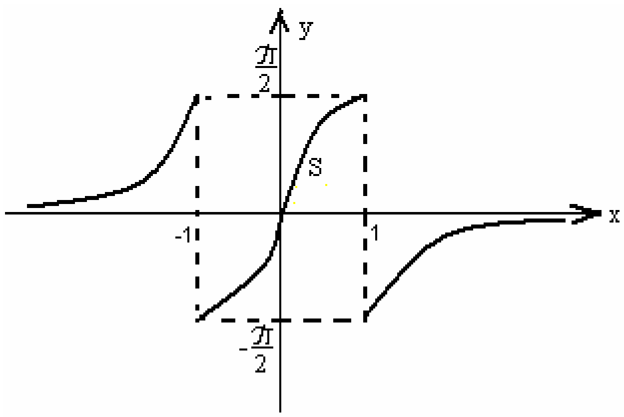
Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой этой кривой при $x \in [0;\, 1)$ и прямыми $y=0$ и $x = 1$.

Решение.

Функция $f(x) = arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ – нечётная, $x = \pm 1$ – точки разрыва первого рода. Достаточно провести её исследование для $x \in [0;\, 1) \cup (1;\, \infty]$.

Имеем $f(1 \mp 0) = \pm \frac{\pi}{2}$, $f(\infty) = 0$; $f'(x) = 2(1+x^2)^{-1}$, $(x \neq 1)$;

$f''(x) = -4x(1+x^2)^{-2}$. Следовательно, $f(x)$ возрастает на каждом промежутке области определения, $O(0;0)$ – точка перегиба, при $x > 0$ график выпуклый вверх, при $x < 0$ выпуклый вниз. Эскиз графика функции изображён на рисунке.



Вычислим площадь S:

$$S=\int_0^1 arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 f(x)\,dx=x\,f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\,df(x)=\frac{\pi}{2}-2\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

Ответ: $S=\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$.