

**Национальный исследовательский  
Томский политехнический университет  
Олимпиада по математике  
16 марта 2011 года • I курс**

1. На плоскости дано 2011 векторов, причём среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 2010 векторов коллинеарна с вектором, не включённым в эту сумму. Найдите сумму всех 2011 векторов.
2. На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности. Найдите координаты центра и радиус окружности.
3. Составьте уравнение линии, по которой перемещается середина единичного отрезка, концы которого находятся на параболе  $y = x^2$ .

4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ , когда он существует, где  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,

учитывая, что предел матрицы равен матрице из пределов её элементов.

5. Решите матричное уравнение  $X + AX + XA = B$ , где  $A$  и  $B$  матрицы размера  $n \times n$ , причём  $A^2 = 0$ .

6. Найдите  $n$  из уравнения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx}{n} \right)^{\frac{12}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - 46x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

7. Найдите  $f' \left( \frac{1}{2} \right)$ , если  $f \left( \frac{x}{x+2} \right) \equiv x$ .

8. Постройте эскиз графика функции  $f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$ .

Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой этой кривой при  $x \in [0; 1)$  и прямыми  $y=0$  и  $x=1$ .

*Решение каждого задания оформляется на **отдельном** листе бумаги*

Решение каждого задания оценивается в 10 баллов

**Желаем успеха!**

**Национальный исследовательский  
Томский политехнический университет  
Олимпиада по математике  
16 марта 2011 года • I курс**

1. На плоскости дано 2011 векторов, причём среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 2010 векторов коллинеарна с вектором, не включённым в эту сумму. Найдите сумму всех 2011 векторов.
2. На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности. Найдите координаты центра и радиус окружности.
3. Составьте уравнение линии, по которой перемещается середина единичного отрезка, концы которого находятся на параболе  $y = x^2$ .

4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ , когда он существует, где  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,

учитывая, что предел матрицы равен матрице из пределов её элементов.

5. Решите матричное уравнение  $X + AX + XA = B$ , где  $A$  и  $B$  матрицы размера  $n \times n$ , причём  $A^2 = 0$ .
6. Найдите  $n$  из уравнения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx}{n} \right)^{\frac{12}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - 46x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

7. Найдите  $f' \left( \frac{1}{2} \right)$ , если  $f \left( \frac{x}{x+2} \right) \equiv x$ .

8. Постройте эскиз графика функции  $f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$ .

Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой этой кривой при