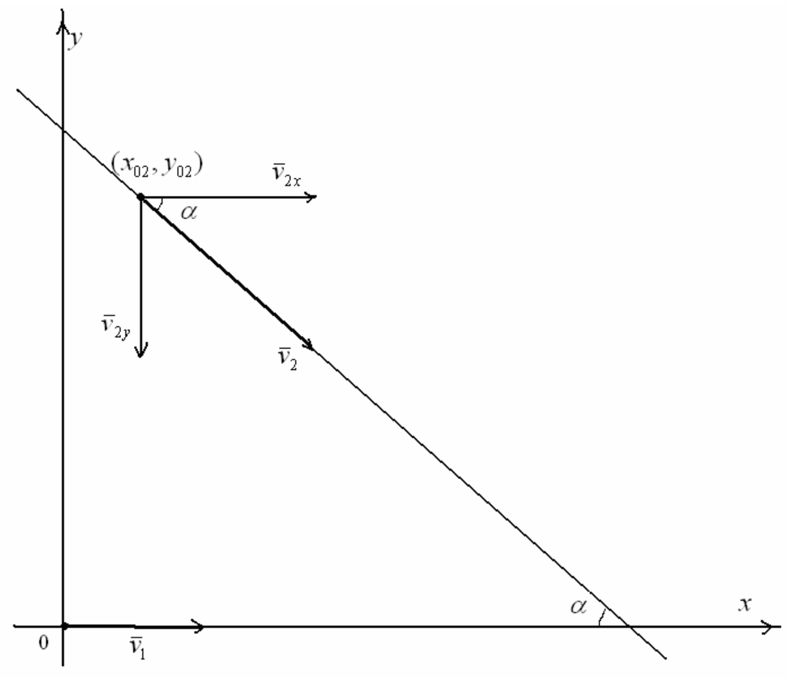
I тур РСО 2010/11 первый курс. ТУСУР

ЗАДАЧА 1. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным направлениям. Если расстояние между пароходами меньше 13 километров, то они находятся в зоне прямой видимости. В 9.00 расстояние между пароходами было 20 километров, в 9.35 - 15 километров и в 9.55 - 13 километров. Укажите промежуток времени в течение которого пароходы будут находиться в зоне прямой видимости. Удастся ли пароходам, не меняя курса, избежать столкновения?

РЕШЕНИЕ.

Пусть начало отсчёта - момент времени 9.00 (t = 0). Выберем декартову систему координат так, чтобы один из пароходов в 9.00 находился в начале координат, а ось абсцисс совпадала с направлением его движения. Обозначим v_1 - скорость этого парохода. Тогда в момент времени t координаты первого парохода $x_1 = v_1 t$, $y_1 \equiv 0$ в силу выбора системы координат. Обозначим координаты второго парохода при $t = 0$ (x_{02}, y_{02}), $\vec{v}_2$ - его скорость $\vec{v}_2 = \vec{v}_{2x} + \vec{v}_{2y} = v_{2x}\vec{i} - v_{2y}\vec{j}$ (v_2- модуль скорости, $v_{2x} > 0$, $v_{2y} > 0$). Знак «-» у проекции на ось OY взят поскольку пароходы сближаются. Пусть направления движения пароходов образуют угол α. Тогда



$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\alpha$, $v_{2y} = v_2 \cdot \sin\alpha$.

В момент времени t координаты второго парохода $x_2 = x_{02} + v_2 \cdot \cos\alpha \cdot t$, $y_2 = y_{02} - v_2 \cdot \sin\alpha \cdot t$.

Квадрат расстояния между пароходами $l^2 = (v_1 \cdot t - x_{02} - v_2 \cdot \cos\alpha \cdot t)^2 + (y_{02} - v_2 \cdot \sin\alpha \cdot t)^2$ или

$$l^2 = (x_{02})^2 + (y_{02})^2 - 2[x_{02} \cdot (v_1 - v_2 \cos\alpha) + y_{02} \cdot v_2 \sin\alpha] \cdot t + [(v_1 - v_2 \cdot \cos\alpha)^2 + (v_2 \cdot \sin\alpha)^2] \cdot t^2$$

Несмотря на то, что не заданы ни координаты второго парохода (x_{02}, y_{02}), ни угол α, ни скорости пароходов, можно сказать, что $l^2 = a - bt + ct^2$ -- это квадратный трёхчлен относительно t. Найдём его коэффициенты из условий задачи. Расстояние между пароходами в 9.00 (t= 0) было 20 километров. Поэтому $20^2 = a$ или $a = 400$. Расстояние между пароходами в 9.35 (t = 35) было 15 километров. Поэтому $15^2 = 400 - b \cdot 35 + c \cdot 35^2$. Расстояние между пароходами в 9.55 (t = 55) было 13 километров. Поэтому

$13^2 = 400 - b \cdot 55 + c \cdot 55^2$. Далее составляем и решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -175 = -35b + 35^2 c \\ -231 = -55b + 55^2 c \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b - 35c = 5 \\ 5b - 275c = 21 \end{cases}. \quad \text{Получаем } b = \frac{32}{5},\ c = \frac{1}{25},$$

$$l^2 = 400 - \frac{32}{5} t + \frac{1}{25} t^2.$$

Первый способ. Выделим полный квадрат

$$l^2 = 400 - \frac{32}{5}t + \frac{1}{25}t^2 = \frac{1}{25}\left(t^2 - 160t + 10000\right) = \frac{1}{25}\left((t-80)^2 + 60^2\right).$$

Если расстояние между пароходами 13 километров, то $l^2 = 169$ и $(t-80)^2 + 60^2 = 4225$, то есть $(t-80)^2 = 625 = 25^2$, отсюда $t = 80 \pm 25$. Продолжительность периода прямой видимости 50 минут.

Столкновения между пароходами не произойдёт, так как из вида функции квадрата расстояния $l^2 = \frac{1}{25}\left((t-80)^2 + 60^2\right)$ очевидно, что при $t = 80$ расстояние будет наименьшим и равно 12 километрам.

Второй способ.

В функции $l^2 = 400 - \frac{32}{5}t + \frac{1}{25}t^2$ положим $l^2 = 169$ и выделим полный квадрат:

$$169 = 400 - \frac{32}{5}t + \frac{1}{25}t^2 \;\rightarrow\; -231 \cdot 25 = -2 \cdot 80 \cdot t + t^2 + 6400 - 6400 \;\rightarrow\; 625 = (t-80)^2.$$

Отсюда $t_1 = 55$, $t_2 = 105$. Чтобы показать, что пароходы не столкнутся, надо исследовать квадратный трёхчлен $l^2 = 400 - \frac{32}{5}t + \frac{1}{25}t^2$ ($D < 0$, $l^2 > 0$ при любых t).

Замечание. Если взять за единицу измерения времени 5 минут, то система уравнений:

$$\begin{cases} 400 = a \\ 225 = a + 14b + 49c \\ 169 = a + 22b + 121c \end{cases},$$

Отсюда $a = 400, b = -16, c = 1$, следовательно, $l^2 = t^2 - 32t + 400 = (t-16)^2 + 144$. Расстояние 13 километров при $l^2 = 169$ при $(t-16)^2 = 25$, то есть $t = 16 \pm 5$. Продолжительность этого периода 10 единиц, то есть 50 минут.

Ответ: 50 минут. Столкновения пароходов не будет.

ЗАДАЧА 2. Дана матрица линейного оператора (линейного отображения) в n-мерном пространстве:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\ldots&0\\1&2&0&\ldots&0\\1&1&3&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&1&\ldots&n\end{pmatrix}$$

Найдите все возможные значения углов, образованных собственными векторами, относящимися к попарно-различным собственным числам.

РЕШЕНИЕ.

Найдём собственные числа. Составим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&\ldots&0\\1&2-\lambda&0&\ldots&0\\1&1&3-\lambda&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&1&\ldots&n-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\ldots(n-\lambda)=0$$

Характеристическое уравнение имеет n различных вещественных корней. Собственные числа $\lambda=1,2,3,\ldots,n$.

Координаты собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda=1$, находим, решая однородную систему

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0\\1&1&0&\ldots&0\\1&1&2&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&1&\ldots&n-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу системы и преобразуем её. Из каждой строки, начиная с третьей, вычтем вторую строку. Вычеркнем первую строку. Получим матрицу размера $(n-1\times n)$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&\ldots&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&\ldots&0\\1&1&2&0&0&0&0&0&\ldots&0\\1&1&1&3&0&0&0&0&\ldots&0\\1&1&1&1&4&0&0&0&\ldots&0\\1&1&1&1&1&5&0&0&\ldots&0\\1&1&1&1&1&1&6&0&\ldots&0\\1&1&1&1&1&1&1&7&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&1&1&1&1&1&1&\ldots&n-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&2&0&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&1&3&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&1&1&4&0&0&0&\ldots&0\\0&0&1&1&1&5&0&0&\ldots&0\\0&0&1&1&1&1&6&0&\ldots&0\\0&0&1&1&1&1&1&7&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&1&1&1&1&1&1&\ldots&n-1\end{pmatrix}$$

Базисный минор обведён. Неизвестное x_1 - свободное, все остальные зависимые. Из первого уравнения получим $x_2=-x_1$. Пусть $x_1=-1$. Тогда $x_2=1$. Из второго уравнения

$x_3 = 0$. Подставляя $x_3 = 0$ в третье уравнение, получим $x_4 = 0$ и так далее, до $x_n = 0$ (в тексте решения вычисления такого рода будем называть «обратный ход метода Гаусса»). Собственному числу $\lambda = 1$ отвечает собственный вектор (-1,1,0,...,0).

Координаты собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda = 2$, находим, решая однородную систему

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу системы и преобразуем её. Из каждой строки, начиная с четвёртой, вычтем третью строку. Вычеркнем вторую строку. Получим матрицу размера $(n-1 \times n)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \end{pmatrix}$$

В базисный минор включим все столбцы матрицы, кроме второго. Неизвестное x_2 - свободное, все остальные зависимые. Из первого уравнения получим $x_1 = 0$. Из второго уравнения $x_3 = -x_2$. Из третьего уравнения $x_4 = 0$. Далее выполняем обратный ход метода Гаусса до $x_n = 0$. Итак, собственному числу $\lambda = 2$ отвечает собственный вектор (0,-1,1,0,...,0).

Аналогично, для $\lambda = 3$ получится вектор (0,0,-1,1,...,0). Неизвестное x_3 - свободное, все остальные зависимые.

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-3
\end{pmatrix}
$$

Для собственного числа $\lambda = k$, $3 < k < n-1$ запишем матрицу системы (здесь именно в k-й строке на диагонали будет 0). Теперь вычтем (k+1)-ю строку из всех последующих, вычеркнем k-ю строку и получим преобразованную матрицу:

$$
\begin{pmatrix}
1-k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 2-k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 3-k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-k
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1-k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 2-k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 3-k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-k
\end{pmatrix}
$$

В результате выделим невырожденный минор порядка n-1 (это видно из его нижне-треугольной структуры). Неизвестное x_k - свободное, все остальные зависимые. Из k+1-го уравнения получаем соотношение $x_{k+1} = -x_k$, все остальные неизвестные равны 0 (из треугольной структуры обведённых миноров). Таким образом, $\lambda = k$ соответствует собственный вектор, содержащий (-1) на месте k и 1 на месте k+1: (0,...0,-1,1,0,...,0).

Для предпоследнего $\lambda = n-1$, собственный вектор (0,...0,-1,1). Запишем исходную матрицу системы, вычтем (n-1)-ю строку из n-ой, вычеркнем (n-1)-ю строку и получим преобразованную матрицу:

$$
\begin{pmatrix}
2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3-n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 4-n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3-n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 4-n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

В результате выделим невырожденный минор порядка n-1 (это видно из его нижне-треугольной структуры). Неизвестное x_{n-1} - свободное, все остальные зависимые. Из первого уравнения получим $x_1 = 0$, далее выполняем обратный ход метода Гаусса до $x_{n-2} = 0$.

Для последнего $\lambda = n$ запишем исходную матрицу системы, вычеркнем n-ю строку и получим преобразованную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2-n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2-n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

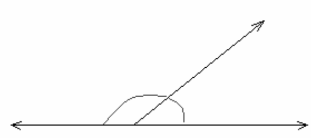
Неизвестное x_n - свободное, все остальные зависимые. Из первого уравнения получим $x_1 = 0$, далее выполняем обратный ход метода Гаусса до $x_{n-1} = 0$. Полагаем $x_n = 1$.Таким образом, $\lambda = n$ соответствует собственный вектор (0,...0,0,1).

Итак, совокупность n линейно-независимых собственных векторов:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\lambda = 1 & (& -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 &) \\
\lambda = 2 & (& 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 &) \\
\lambda = 3 & (& 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 &) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda = n-1 & (& 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 &) \\
\lambda = n & (& 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 &)
\end{array}$$

Если значения λ отличаются на 2 и более, то собственные векторы ортогональны, так как очевидно, что их скалярное произведение равно 0. Угол между ними 90 градусов. Модули всех собственных векторов, кроме последнего, равны $\sqrt{2}$, для последнего модуль равен 1. При $\lambda = n - 1$ и $\lambda = n$ получим $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то есть угол между собственными векторами в этом случае будет 45 градусов.

Замечание. Здесь может получиться угол 135 градусов. Это зависит от выбора значений свободных неизвестных. Можно один из двух векторов умножить на число «-1». Он будет на той же самой прямой, т.е. соответствует тому же λ, но угол получится $180 - \varphi$. Таким образом, для пары собственных векторов можно найти как острый угол φ, так и дополняющий угол $180 - \varphi$. (см. рисунок).

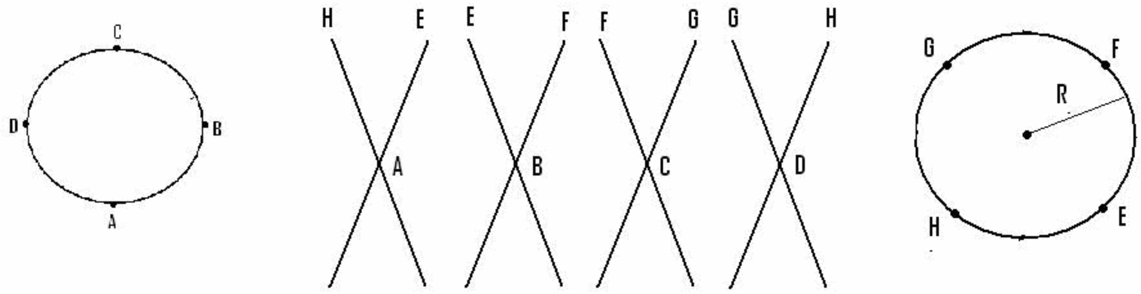


Если λ - соседние целые числа, то можно взять два собственных вектора вида: (0,-1,1,0,...,0) и (0,0,1,-1,...,0). Угол между ними вычисляется как $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)$ и равен 120 градусам.

Замечание. Если один из векторов противоположно ориентирован, то получим угол 60 градусов.

Ответ. 45 (135), 120 (60) и 90 градусов.

ЗАДАЧА 3. Требуется изготовить конструкцию высотой 2 метра в форме однополостного гиперболоида вращения. На высоте 1 метр находится обруч наименьшего радиуса, равного 1 метр. На нём в точках A, B, C, D следует закрепить 4 крестовины из стержней (см. чертёж).



Имеется 2 обруча радиуса $R>1$, один из которых находится на высоте 2 метра, второй находится в основании конструкции. На верхний обруч следует приварить концы E, F, G, H так, чтобы угол между стержнями в каждой из точек E, F, G, H был 30^0. Вычислите значение радиуса R.

Справка. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

РЕШЕНИЕ. Декартову систему координат расположим так, чтобы ось OZ проходила по оси вращения, а плоскость XOY - через обруч наименьшего радиуса. Каноническое уравнение гиперболоида вращения (т.е. $a=b$) имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Так как радиус наименьшего сечения по условию равен 1 ($a=1$), уравнение примет вид $x^2+y^2-\frac{z^2}{c^2}=1$. Начало координат находится в центре окружности - сечения наименьшего радиуса. Тогда верхний обруч соответствует $z=1$, для него уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=1+\frac{1}{c^2}$, то есть его радиус связан с параметром c так: $R^2=1+\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+1}{c^2}$.

Пусть координаты точки $A(1,0,0)$, тогда $B(0,1,0)$. Эти точки принадлежат гиперболоиду. Прямые AE и BE, прямолинейные образующие гиперболоида, лежат в вертикальных плоскостях с уравнениями $x=1$ и $y=1$. Покажем это методом сечений.

Замечание. Если ничего не знать о прямолинейных образующих, то факт, что поверхность гиперболоида содержит прямые, также можно установить с помощью канонического уравнения гиперболоида методом сечений.

Если положить $x^2=1$ (сечения плоскостями $x=\pm 1$, содержащими точки A и C), получим $y^2=\dfrac{z^2}{c^2}$, отсюда $y=\pm\dfrac{z}{c}$. Если положить $y^2=1$ (сечения плоскостями $y=\pm 1$, содержащими точки B и D) получим $x^2=\dfrac{z^2}{c^2}$, отсюда $x=\pm\dfrac{z}{c}$.

Итак, общие уравнения искомых прямых (выберем знаки «+», т.к. точка E находится в I октанте) AE: $\begin{cases} y=\dfrac{z}{c} \\ x=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y-\dfrac{z}{c}=0 \\ x=1 \end{cases}$; BE: $\begin{cases} x=\dfrac{z}{c} \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-\dfrac{z}{c}=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Находим направляющие векторы этих прямых:

$$l_{AE}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{c} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{c}j-k=\left(0,-\frac{1}{c},-1\right)\parallel(0,1,c)$$

$$l_{BE}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{c} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{c}i+k=\left(\frac{1}{c},0,-1\right)\parallel(1,0,c)$$

Замечание. Также можно перейти к параметрическим уравнениям прямых, работая с неопределённой системой и получить направляющие векторы из них.

Угол между прямыми AE и BE вычисляется как $\arccos\left(\dfrac{(l_1,l_2)}{|l_1|\cdot|l_2|}\right)=\arccos\left(\dfrac{c^2}{1+c^2}\right)$. Если между прямыми AE и BE угол 30 градусов, то $\dfrac{c^2}{1+c^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{R^2}$, и $R=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$.

Замечание. Координаты точки $E(1,1,c)$.

Ответ. $R=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

ЗАДАЧА 4. Докажите, что последовательность $a_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ имеет предел.

РЕШЕНИЕ. Все члены последовательности $a_n > 0$ как суммы *n* положительных чисел.

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$, то есть $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in N$. Последовательность монотонно возрастает.

Докажем, что последовательность ограничена сверху. Разложим дробь на сумму элементарных дробей: $\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$, $A = C = \frac{1}{2}, B = -1$, тогда

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right)$. Разобьём исходную сумму на три суммы, во второй и третьей суммах слагаемые перенумеруем

$$a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right)$$

суммы взаимно сокращаются, так как коэффициенты при них $\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$.

В итоге получим выражение $a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{4}$

Отсюда видно, что последовательность ограничена сверху.
Монотонно возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел.

Замечание. Предел равен $\frac{1}{4}$.

ЗАДАЧА 5. Опишите множество всех многочленов четвёртой степени $P_4(x)$, каждый из которых не содержит нечётных степеней *x* и удовлетворяет условиям $P_4(0) = P_4(a) = 1$, $P_4{}'(1) = 0$, где $a \in R$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим коэффициенты многочлена: $P_4(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ ($A \neq 0$).
Во-первых, очевидно, что $P_4(0) = C$, поэтому $C = 1$.
$P_4(a) = Aa^4 + Ba^2 + 1 = 1$, поэтому $Aa^4 + Ba^2 = 0$. Отсюда получаем $B = -Aa^2$.
Теперь обратимся к условию на производную: $P_4'(x) = 4Ax^3 + 2Bx$. Поэтому
$P_4{}'(1) = 4A + 2B = 0, \quad B = -2A$.
Условия задачи позволяют составить систему уравнений с тремя неизвестными *a*, *A*, *B:*
$\begin{cases} B = -Aa^2 \\ B = -2A \end{cases}$ общее решение которой: $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ B = -2A \end{cases}$, параметр A - свободное неизвестное.
В итоге, можно задать множество всех многочленов с указанными свойствами:
$P_4(x) = Ax^4 - 2Ax^2 + 1$.

Замечание. В принципе, свободным неизвестным можно выбрать параметр *B*.

ОТВЕТ. $P_4(x) = Ax^4 - 2Ax^2 + 1$.

ЗАДАЧА 6. Вычислите, если он существует, предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}$.

РЕШЕНИЕ.

Выполним преобразования. Для выражения в знаменателе используем формулу разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\frac{e^x-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}=\frac{(e^x-1)+(1-\cos^2 x)}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}.$$

Видим, что преобразованное выражение содержит $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$. При переходе через точку $x=0$ $\sin\frac{x}{2}$ меняет знак с «-» на «+», выражение $\dfrac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}$ в окрестности точки $x=0$ имеет положительные значения. Таким образом,

$$\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=-\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}} \quad \text{при } x\to 0-0$$

$$\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}} \quad \text{при } x\to 0+0$$

Находим односторонние пределы методом замены на эквивалентные бесконечно малые

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^x-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^x-1+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=\ \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{x+x^2}{\pm\sin\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{x+x^2}{\pm x}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\left(\pm 1\pm x\right)=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Поскольку односторонние пределы не равны друг другу, предел не существует.

Замечание. В точке $x=0$ данная функция имеет разрыв первого рода.

ЗАДАЧА 7. Даны уравнения движения материальной точки $\{x(t)=t^2, y(t)=1-t^3\}$. Касательные к её траектории отсекают от первого координатного угла треугольники. Найдите наименьшую из возможных площадей таких треугольников.

РЕШЕНИЕ.

Способ 1. Для кривой, заданной параметрически, уравнение касательной в точке $t=t_0$, ($x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$) имеет вид: $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}$.

Для данной в условии задачи кривой и произвольного значения параметра t получим уравнение касательной $\dfrac{y-(1-t^3)}{-3t^2}=\dfrac{x-t^2}{2t}$, которое преобразуется к $y+\dfrac{3}{2}tx=\dfrac{1}{2}t^3+1$. Находим точки пересечения касательной с осями координат. Подставим в уравнение касательной $x=0$, получим точку $\left(0,\dfrac{t^3}{2}+1\right)$ пересечения касательной с осью OX. Подставим в полученное уравнение $y=0$, получим точку $\left(\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2}{3t},0\right)$ пересечения касательной с осью OY.

Площадь треугольника, который касательная отсекает от первого координатного угла, равна $S(t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^3}{2}+1\right)\left(\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2}{3t}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{t^3}{2}+1\right)\left(t^2+\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{t^5}{2}+2t^2+\dfrac{2}{t}\right)$. Находим экстремум функции $S(t)$. $S'(t)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5t^4}{2}+4t-\dfrac{2}{t^2}\right)=0$. Для отыскания стационарных точек при условии $t\neq 0$ получим уравнение $5t^6+8t^3-4=0$, обозначим $t^3=u$ и решим квадратное уравнение $5u^2+8u-4=0$, $u=\dfrac{-8\pm\sqrt{144}}{10}=\dfrac{-4\pm 6}{5}$. Для нашей задачи имеет смысл только положительное значение u, так же как и t, (так как при отрицательном, треугольник не в 1-й четверти). $u=t^3=\dfrac{2}{5}$, $t=\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$. Производная $S'(t)$ при переходе через точку $t=\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ меняет знак с «-» на «+», поэтому в данной точке минимум. Вычисляем площадь соответствующего треугольника

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+1\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)=\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right).$$

Замечание. Можно также выразить $y(x)$ явно и использовать уравнение касательной $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

явное выражение $y(x)=1-x^{\frac{3}{2}}$.