**Национальный исследовательский Томский политехнический университет**

# Олимпиада по математике

## 10 марта 2010 год • II – IV курсы

1. Найдите $f(x)$, если $f(0)=1$ и $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases} 2 & \text{при } x<0, \\ \frac{2x^2}{1+x^2} & \text{при } x>0. \end{cases}$

2. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна на $[a;b]$, при чем существует $f''(x)<0$ на $(a;b)$. Покажите, что

$$\int_a^b f(x)dx \ge \frac{1}{2}(b-a) \max_{\text{на}[a;b]} f(x).$$

3. Вычислите $\oint\limits_{(L)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, где

1) $(L_1)$: $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$; 2) $(L_2)$: $\frac{(x-a)^2}{4a^2}+\frac{(y-b)^2}{4b^2}=1$.

4. Дано уравнение $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Какой должна быть функция $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, чтобы общим решением данного уравнения было $y=\frac{x}{\ln|Cx|}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y\,y''+(y')^2 = x'\,y + x\,y' \\ x'\,y + x\,y' = 1 \end{cases}$,

где $x=x(t)$, $y=y(t)$ – искомые функции.

6. Вычислите интеграл с обоснованием всех действий вычисления

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,tg\,\frac{x}{2^n}\right)dx$$

7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{(n)^{n^2}}$.

*Решение каждого задания оформляется на **отдельном** листе бумаги*

Решение каждого задания оценивается в 10 баллов

**Желаем успеха!**