Региональная олимпиада по математике
I курс
ТГАСУ, 25 апреля 2010г.

Решения

Задача 1. Числовая последовательность задана соотношением
$$u_1 = b,\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2,\ n \ge 1.$$
При каких значениях a и b последовательность $\{u_n\}$ сходится? Чему равен предел?

Решение. Имеем $u_{n+1} = u_n{}^2 + u_n - 2au_n + a^2 = u_n + (u_n - a)^2$, откуда $u_{n+1} \ge u_n$. Если предел A существует, то $A = A + (A-a)^2$ и $A = a$. Поэтому, как только для некоторого i $u_i > a$, так все u_j при $j > i$ тоже больше a и предел не существует.

$u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \le a \ \Rightarrow u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 - a \le 0$,

$D = (1-2a)^2 - 4(a^2 - a) = 1,\ u_{n_1} = a-1,\ u_{n_2} = a$,

$a - 1 \le u_n \le a \ \Rightarrow a - 1 \le b \le a$.

Обратно, при $a-1 \le u_n \le a$ получаем, что $u_{n+1} \ge u_n \ge a-1$, $u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2 \le u_n + (a - u_n) = a$. Поэтому при $a - 1 \le b \le a$ последовательность ограничена сверху и имеет пределом число a.

Задача 2. Найти уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы $y^2 = -4ax$ на касательные к этой параболе.

Решение. Найдем уравнение касательной l_1, проведенной к параболе в точке (x_0, y_0).

$$y^2 = -4ax \ \Rightarrow y' = -\frac{2a}{y},\ y'(x_0) = -\frac{2a}{y_0},\ x_0 = -\frac{y_0^2}{4a} \ \Rightarrow$$

$y - y_0 = -\dfrac{2a}{y_0}\left(x + \dfrac{y_0^2}{4a}\right)$ - уравнение касательной, или $4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0$. Тогда уравнение перпендикуляра l_2 к l_1, опущенного из точки $(0{,}0)$, имеет вид $\dfrac{x}{4a} = \dfrac{y}{2y_0}$ или $xy_0 - 2ay = 0$.

Координаты (x, y) точки пересечения l_1 и l_2 находятся из системы

$$\begin{cases} 4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0 \\ y_0 x - 2ay = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \dfrac{y_0^3}{2(y_0^2 + 4a^2)} \\ x = \dfrac{ay_0^2}{y_0^2 + 4a^2} \end{cases}.$$

Исключая параметр y_0, получаем $xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$.

Задача 3. В каждой вершине треугольной пирамиды написано число. На каждом ребре написано число, равное сумме чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна 3 и сумма их квадратов равна 3. Доказать, что сумма их кубов также равна 3.

Решение. Пусть в вершинах пирамиды стоят числа x_1, x_2, x_3, x_4. Из условия задачи составляем следующие уравнения:

$$(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_1+x_4)+(x_2+x_3)+(x_2+x_4)+(x_3+x_4)=3,$$

$$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+x_4)^2+(x_2+x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_4)^2=3.$$

Из первого уравнения находим $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Второе уравнение легко преобразуется к виду $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2+2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)=3$, откуда находим $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$.

Нетрудно убедиться, что

$$(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+(x_1+x_4)^3+(x_2+x_3)^3+(x_2+x_4)^3+(x_3+x_4)^3=$$
$$=3(x_1+x_2+x_3+x_4)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)=3.$$

Задача 4. Функция $\varphi(x)$ дважды дифференцируема на полуоси $[0,+\infty)$. Известно, что $\varphi(x)>0$, $\varphi'(x)>0$ и $\dfrac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2}\le 2$ для всех $x\in[0,+\infty)$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}=0$.

Решение. Обозначим $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$. Имеем

$$f'(x)=-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)},\quad f''(x)=\frac{2(\varphi'(x))^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi(x))^3},$$

откуда $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $\dfrac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}=2-\dfrac{\varphi''(x)\varphi(x)}{(\varphi'(x))^2}\ge 0$, т.е. $f''(x)\ge 0$ при $x\ge 0$.

Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$. Так как $f'(x)<0$ при $x\ge 0$ и f' монотонно не убывает на $[0,+\infty)$, то существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=c\le 0$.

Если $c<0$, то $f'(x)\le c$, $f(x)\le cx+f(0)$ при всех $x\ge 0$, что невозможно ввиду положительности f на $[0,+\infty)$. Значит, $c=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}=0$.

Задача 5. Доказать, что n-ый член F_n последовательности Фибоначчи $F_1=1, F_2=2,\ldots,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\ge 3)$ можно представить в виде определителя n-го порядка

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & \text{O} & \\ & 1 & 1 & -1 & & & & \\ & & . & . & . & & & \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & . & . & . & \\ & \text{O} & & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Обозначим заданный определитель n-го порядка через D_n. Нетрудно видеть, что

$$D_1 = 1,\; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Для того чтобы последовательность определителей D_n совпадала с последовательностью чисел Фибоначчи, необходимо доказать, что D_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $\boldsymbol{D_n = D_{n-1} + D_{n-2}}$ $(n \geq 3)$.

Разложим D_n по элементам 1-ой строки

$$D_n = D_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} =$$

Разложим второй определитель по 1-му столбцу

$$= D_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = D_{n-1} + D_{n-2}.$$

Задача 6. Пусть a, b и n - целые положительные числа, такие, что $a > b$, $n > b$ и $a^n + b^n = c^n$. Доказать, что число c не может быть целым.

Решение. Поскольку $a^n + b^n = c^n$, то $a < c$. Кроме того, $(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \cdots + 1$. Так как $b < n$ и $b^{n-1} < a^{n-1}$, то $(a+1)^n > a^n + b^n$ или, что тоже, $c^n < (a+1)^n$, откуда $a < c < a+1$, а поскольку c лежит между двумя последовательными целыми числами, то c не может быть целым числом.

Задача 7. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ - векторы в трехмерном пространстве. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} (\vec{x}_1,\vec{y}_1) & (\vec{x}_1,\vec{y}_2) \\ (\vec{x}_2,\vec{y}_1) & (\vec{x}_2,\vec{y}_2) \end{vmatrix} = ([\vec{x}_1,\vec{x}_2],[\vec{y}_1,\vec{y}_2])$$

(здесь $(\vec{x},\vec{y})$ - скалярное произведение, а $[\vec{x},\vec{y}]$ - векторное произведение).

Решение. Пусть $\vec{x}_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}$, $\vec{x}_2 = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\}$, $\vec{y}_1 = \{y_1^1, y_1^2, y_1^3\}$, $\vec{y}_2 = \{y_2^1, y_2^2, y_2^3\}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} (\vec{x}_1,\vec{y}_1) & (\vec{x}_1,\vec{y}_2) \\ (\vec{x}_2,\vec{y}_1) & (\vec{x}_2,\vec{y}_2) \end{vmatrix} = (\vec{x}_1,\vec{y}_1)(\vec{x}_2,\vec{y}_2) - (\vec{x}_2,\vec{y}_1)(\vec{x}_1,\vec{y}_2) =$$

$$= \left(x_1^1 y_1^1 + x_1^2 y_1^2 + x_1^3 y_1^3\right)\left(x_2^1 y_2^1 + x_2^2 y_2^2 + x_2^3 y_2^3\right) - \left(x_2^1 y_1^1 + x_2^2 y_1^2 + x_2^3 y_1^3\right)\left(x_1^1 y_2^1 + x_1^2 y_2^2 + x_1^3 y_2^3\right),$$

$$[\vec{x}_1,\vec{x}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(x_1^2 x_2^3 - x_2^2 x_1^3\right) - \vec{j}\left(x_1^1 x_2^3 - x_2^1 x_1^3\right) + \vec{k}\left(x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2\right),$$

$$[\vec{y}_1,\vec{y}_2] = \vec{i}\left(y_1^2 y_2^3 - y_2^2 y_1^3\right) - \vec{j}\left(y_1^1 y_2^3 - y_2^1 y_1^3\right) + \vec{k}\left(y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2\right),$$

$$([\vec{x}_1,\vec{x}_2],[\vec{y}_1,\vec{y}_2]) = \left(x_1^2 x_2^3 - x_2^2 x_1^3\right)\left(y_1^2 y_2^3 - y_2^2 y_1^3\right) + \left(x_1^1 x_2^3 - x_2^1 x_1^3\right)\left(y_1^1 y_2^3 - y_2^1 y_1^3\right) +$$
$$+ \left(x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2\right)\left(y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2\right).$$

Легко проверить, что

$$\left(x_1^1 y_1^1 + x_1^2 y_1^2 + x_1^3 y_1^3\right)\left(x_2^1 y_2^1 + x_2^2 y_2^2 + x_2^3 y_2^3\right) - \left(x_2^1 y_1^1 + x_2^2 y_1^2 + x_2^3 y_1^3\right)\left(x_1^1 y_2^1 + x_1^2 y_2^2 + x_1^3 y_2^3\right) =$$
$$= \left(x_1^2 x_2^3 - x_2^2 x_1^3\right)\left(y_1^2 y_2^3 - y_2^2 y_1^3\right) + \left(x_1^1 x_2^3 - x_2^1 x_1^3\right)\left(y_1^1 y_2^3 - y_2^1 y_1^3\right) + \left(x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2\right)\left(y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2\right).$$