ТГАСУ, областной тур, 2006 год, 1 курс, предмет

1. Доказать, что для любой точки О внутри эллипса существуют три точки A, B, C на эллипсе, для которых выполняется равенство:

$$\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$$

2. Известно, что определитель n-го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

равен 5461. Найти порядок определителя.

3. Вычислить

$$\sqrt[4]{2006}\cdot\sqrt[8]{2006^2}\cdot\sqrt[16]{2006^3}\cdot\dots$$

4. Отрезок постоянной длины $2a$ движется так, что концы его все время остаются на координатных осях. Найти уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на этот отрезок. Построить геометрическое место таких точек.

5. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

6. Расстояние между графиками функций $y = x^2 + q$ и $y = \sqrt{x-q}$

равно $\dfrac{8023\sqrt{2}}{4}$. Найти q

7. Найти параметрические уравнения функций неявно заданных равенством $x^y = y^x$. Исследовать функцию и построить ее график.

ТГАСУ, областной тур, 2006 год, старшие курсы, предмет

1. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$ от начала координат.

2. Найти положительную дифференцируемую на $[0, +\infty)$ функцию $f(x)$, если известно, что при замене независимой переменной $\xi = \int\limits_0^x f(t)dt$ она переходит в функцию $e^{-\xi}$.

3. Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен J. Доказать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$ также сходится и равен J.

4. Вычислить

$\iint\limits_D y\cdot 3^{-xy}\log_3(1+x^2y^2)\,dx\,dy$, где D – прямоугольник:

$-2005 \le x \le 2005$, $-2006 \le y \le 2006$.

5. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2000} x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2006} x^n$ имеют одинаковые ненулевые радиусы сходимости. Сходится ли ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$?

6. Имеется бесконечно много выключателей, каждый из которых срабатывает с вероятностью $p > \frac{1}{2}$ (т.е., если вы его включили, то с вероятностью p он действительно включен, а с вероятностью $1 - p$ выключен, и наоборот). Доказать, что из них можно составить сколь угодно хороший выключатель (т.е. выключатель, который срабатывает в обе стороны с вероятностью, сколь угодно близкой к 1).

7. Решить уравнение

$$xyy'' + yy' + x^2(y')^3 = 0.$$

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов ИрГТУ, г. Иркутск, 2006 год, 1 курс

1. Даны матрицы $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти $\left(A^{2011} + A^{-1} + E\right)X$. (3 балла)

2. Доказать, что площадь выпуклого плоского многоугольника с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, … , $P_n(x_n, y_n)$ равна

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

(4 балла)

3. Найти x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2005}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2006}$. (3 балла)

4. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. (4 балла)

5. Вычислить $J(y)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$, если известно, что

$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (5 баллов)

6. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известна его фундаментальная система решений $\left\{x,\ e^{2x}, e^{-2x}\right\}$.

(4 балла)

7. Функцию $y=x^2$ на отрезке $[2;4]$ аппроксимировать линейной функцией $y=ax+b$ так, чтобы абсолютное отклонение $\Delta=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|x^2-(ax+b)\right|$ было минимальным. (7 баллов)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
ИрГТУ, г. Иркутск, 2006 год, 2 курс

1. На комплексной плоскости найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^n.$$ (3 балла)

2. Найти общее решение уравнения:

$(y''+5y')\cos^2 y+\left((y')^2+3\cos^2 y\right)\sin 2y=0$. (4 балла)

3. Найти наибольшее значение функции $u=2x+y+5z$ в замкнутой области, ограниченной плоскостями: $-3x+2y-z=1$, $2x-y+3z=-2$, $-x+y+2z=-1$, $x+y+11z=3$, $x+y+11z=7$. (5 баллов)

4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\sum\limits_{i,j}^{n}\dfrac{i^2+j^2}{n^2+i^2+j^2}$, где сумма составлена по всем целым i и j таким, что $i\geq 0,\ j\geq 0,$ $i^2+j^2\leq n^2$. (6 баллов)

5. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)},$$

определить область сходимости полученного ряда. (3 балла)

6. Треугольный биллиардный стол имеет три лузы – по одной в каждом углу. В одной лузе умещается лишь один шар, в двух других – по два шара. На столе находятся три шара, в каждом из которых спрятано по монете. Стол наклоняют так, что все шары скатываются в один угол, но в какой именно – неизвестно. Математическое ожидание «начинки» шаров (или шара), попавших в лузу, составляет $9\dfrac{4}{9}$ рубля. Монеты какого достоинства спрятаны в шарах? (5 баллов)

7. Найти решение уравнения $x^3-\varepsilon x^2+1=0$ при малых $|\varepsilon|$ с точностью до величин ε^2 включительно. (4 балла)

III международная олимпиада по математике для студентов нематематических специальностей ВУЗов, г. Ярославль, 2006 год, личный конкурс

1. Матрица X является решением матричного уравнения

$$AX^2+BX=0,\ \text{где}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\det X=0$. (4 балла)

2. Найти длину вектора $\vec{p} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $\left(\vec{a} \hat{,} \vec{c}\right) = \left(\vec{b} \hat{,} \vec{c}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} < 0$. (4 балла)

3. Два игрока по очереди присваивают коэффициентам уравнения $a_{2n+1} x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \ldots + a_0 = 0$ какие-нибудь действительные значения, при этом уже присвоенные значения менять нельзя. Может ли второй игрок добиться того, чтобы у полученного в результате игры многочлена был выбранный им заранее действительный корень $x_0 \neq 0$? (4 балла)

4. Доказать, что множество точек в $\mathbb{R}^3$, задаваемое уравнением

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + xy - 2yz - xz - 1 = 0$$

находится в шаре радиуса 1 с центром в начале координат.

(6 баллов)

5. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} tg(k-1) tgk}{tg^2 n + n^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$. (8 баллов)

6. Пусть $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, $-$ дважды дифференцируемая функция, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Доказать, что существует такое число $x_0 \in (-1, 1)$, что $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ образуют арифметическую прогрессию. (8 баллов)

7. Пусть $f(x) -$ дважды дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Доказать, что если $g(x) = x f(x^a)$ выпукла (вниз) на $(0, \infty)$, то и $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x^a}\right)$ выпукла (вниз) на $(0, \infty)$.

(8 баллов)

8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,d\,x$, где

$$f(x)=\min_{x\in[0,1]}\max\left\{4x-y,y\right\} \, . \qquad \text{(6 баллов)}$$

III международная олимпиада по математике для студентов нематематических специальностей ВУЗов, г. Ярославль, 2006 год, командный конкурс

1. Доказать, что уравнение $X^2+2X-3E=0$ имеет на множестве квадратных матриц 2006-го порядка по крайней мере 2^{2006} решений. (Здесь $E-$ единичная матрица). (4 балла)

2. 1). Доказать, что функция $f(x),\ \ x\in\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ f(x)\neq 0,\ \left(\exists a>0\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f(x)=f(x-a)\,f(x+a)$ является периодической. (4 балла)

   2). Привести пример такой функции. (4 балла)

3. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{a_k\,a_m}{k+m}\geq 0$. (8 баллов)

4. Значение многочлена с целыми коэффициентами в четырёх целых точках равно 3. Доказать, что многочлен не имеет целых нулей. (6 баллов)

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(tgx\right)^{\sin x}-\left(\sin x\right)^{tgx}}{x^{\pi-1}}$. (4 балла)

6. Сколько решений имеет уравнение $(x-1)e^x-10x+11=0$. (6 баллов)

7. Вычислить $\int\limits_0^2\dfrac{\cos\pi x\,d\,x}{e^x+e}$. (6 баллов)

8. Найти все ограниченные на промежутке $(0,\ \infty)$ решения $y(x)$ дифференциального уравнения $x^2\, y'' - 2x\, y' + (2 - x^2)\, y = 0$.

(8 баллов)

9. Доказать, что решение $y = y(x),\ \ x \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения $y'' + x^2\, y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, обращается в нуль хотя бы в одной точке.

(6 баллов)

10. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} + \ldots \quad .$$

(6 баллов)

Олимпиады 2007 года

ТПУ, 2007 год, I курс

1. Найдите x, если дано, что $x + \sqrt{15}$ и $\dfrac{1}{x} - \sqrt{15}$ являются целыми.

2. Дано уравнение окружности $x^2 + y^2 = 9$. Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат, точку $A(1, 0)$ и касающейся данной окружности.

3. От сосны к берёзе, повернуть направо, пройти столько же, сделать отметку. От сосны к дубу, повернуть налево, пройти столько же, сделать отметку. Копать посередине.
С этими указаниями известного флибустьера Роджера вы прибыли на остров. Берёза цела, дуб есть, сосна пропала. Найдите клад!

4. Докажите существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и найдите его, если

$$x_n = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}} \quad (n \text{ радикалов}).$$

5. Найдите, x если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2006}}{n^x-(n-1)^x} = \dfrac{1}{2007}$.

6. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, если $a,\, b,\, c$ – различные корни уравнения $x^3+px+q=0$.

7. Определите порядок матрицы A, если $\det A = 3$ и $\det(A^2)+\det(2A)=\det(3A)-186$.

8. Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$. Докажите существование и найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$.

ТПУ, 2007 год, старшие курсы

1. Решите уравнение

$$\frac{du}{dx} = u(x) + \int_0^1 x\,u(x)\,dx, \qquad u(0)=1.$$

2. Составьте дифференциальное уравнение прямых, отстоящих на единицу от начала координат.

3. Найдите наименьшее значение интеграла

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left| y - x^2 - t \right| dx\,dy \, .$$

4. Запишите уравнение геометрического места точек, равноудалённых от прямых

$$l_1: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad l_2: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

5. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_7$ – корни некоторого многочлена седьмой степени с комплексными коэффициентами. Докажите, что если соответствующие им точки на комплексной плоскости лежат строго внутри некоторого угла в 60^o с вершиной в начале координат (то есть не лежат на сторонах и в вершине этого угла), то все коэффициенты многочлена отличны от нуля.

6. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(S - S_n\right)$, где S – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а S_n – его частичные суммы.

7. Десять рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть первоначально окрашено, а затем смонтировано. Время окраски – 10 минут, время монтажа – 20 минут. После окраски изделие должно 5 минут сохнуть. Как разбить рабочих на маляров и монтажников, чтобы выполнить работу в кратчайшее время? Вычислите это время.

ТУСУР, областной тур, 2007 год, 1 курс, предмет

1. Доказать, что для любой пары различных точек A и B, взятых на графике функции $y_1 = e^x$, существует единственная кривая $y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, являющаяся касательной к графику этой функции в точках A и B.

2. Найти наименьшее натуральное число, для которого остаток от деления на любое целое число от 2 до 7 будет на единицу меньше делителя, а на 11 искомое число делится без остатка.

3. Сколько действительных корней имеет уравнение $x^{(x^x)} - \frac{1}{x^3} = 0$ на полуоси $(0,+\infty)$?

4. Доказать, что если p и q взаимно простые числа и $\frac{p}{q}$ - рациональный корень многочлена $a_0x^n + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, то a_0 делится на q, a_n делится на p.

5. В столовой продаются пирожки с мясом по 10 руб., пирожки с рыбой по 5 руб. и пирожки с капустой по 50 коп. Требуется купить 100 пирожков на 100 рублей. Сколько пирожков каждого вида будет куплено?

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. Даны координаты вершин треугольника $A(5;3;1)$, $B(8;7;1)$, $C(7;5;2)$. Запишите уравнения прямых, на которых расположены биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине *A* треугольника *ABC*.

ТУСУР, областной тур, 2007 год, старшие курсы, предмет

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{R^2} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^{\alpha}}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(tg\,x)-tg(\sin x)}{\sin x-tg\,x}$.

3. Пусть $f_0(x)=\ln\dfrac{1}{x}$, $f_1(x)=\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$, … $f_{n+1}(x)=\ln\left(f_n(x)\right)$.

Пусть a_n - точная верхняя граница области определения функции $f_n(x)$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

4. В баке, объём которого 100 л, находится раствор, содержащий 10 кг соли. В этот бак втекает вода со скоростью 3л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй бак ёмкостью 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Концентрация соли в каждом баке поддерживается равномерной с помощью перемешивания. Какое максимальное количество соли будет во втором баке и через какое время оно достигается?

5. Рассмотрим множество всех квадратных матриц 2 порядка, элементами которых могут быть целые числа 0, 1, 2 или 3. Пусть матрица, случайным образом взятая из этого множества, вырождена. Найти вероятность того, что при этом она не содержит нулей.

6. Найти сумму всех корней степени n из числа i.

7. Задана функция комплексной переменной $f:C\setminus\{0\}\to C$ формулой $\forall z\in C\setminus\{0\}:\ f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$. Существует ли $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z^2}}$? Если существует, то найдите его.

ТПУ, областная, 2007 год, 1 курс, специальность

1. Найти все значения параметра α при котором в области определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^x-a^{\alpha x+2}}}$, $a>0$ есть двузначные целые числа, но нет трехзначного целого числа.

2. Найти наименьшее расстояние от точки $M_0(0;5)$ до точки графика функции $y=\dfrac{16}{\sqrt{3}\,x^3}+5,\quad x>0$.

3. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^a+2^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}}$, $a>0$.

4. Население страны ежегодно возрастает на 2%. Во сколько раз оно увеличится за 200 лет?

5. Доказать неравенство $\dfrac{4}{9}(e-1)<\displaystyle\int_0^1\dfrac{e^x\,dx}{(x+1)(2-x)}<\dfrac{1}{2}(e-1)$.

6. Доказать равенство $\displaystyle\int_0^1\dfrac{arctgx}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{t\,dt}{\sin t}$.

7. Известно, что $a>b>0$. Что больше

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\ldots+a^n} \quad \text{или} \quad \frac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\ ?$$

8. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2n^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

9. Известно, что $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=a$. Какое наибольшее значение может иметь модуль $|z|$ комплексного числа z?

ТПУ, областная, 2007 год, старшие курсы, специальность

1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$.

2. Найти решение уравнения

$$2y'' + (y')^2 = y^2, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

3. Найти наибольшее значение $|\cos z|$, если $|z| \le 1$, $z \in \square$.

4. Доказать, что если бесконечный ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ с положительными слагаемыми сходится, то ряд $\dfrac{u_1}{r_1} + \dfrac{u_2}{r_2} + \ldots$ расходится ($r_n -$сумма членов первого ряда, начиная с n - го, то есть $r_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$).

5. Вершины параллелограмма в декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}$ имеют целочисленные координаты, его площадь равна 3. Известно, что внутри параллелограмма (стороны исключаются) есть две точки с целочисленными координатами. Доказать, что эти точки лежат на одной из диагоналей и делят её на три равные части.

6. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ равна 1. Максимизировать сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

7. На прямолинейном участке дороги длиной a находятся три человека. Какова вероятность P того, что расстояние между любыми двумя «соседями» не меньше b .

СГМУ, областная, 2007 год, 1 курс,
естественнонаучные специальности

1. Построить на плоскости множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $y = \sqrt{xy + y - x}$.

2. Найти область определения функции $y = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x - 2}}$.

3. Известно, что один из корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ – двукратный. Укажите связь между p и q.

4. Частоты x_n и y_n генов a и b соответственно преобразуются в результате одного тура отбора в новые частоты

$$x_{n+1} = \frac{x_n(kx_n + y_n)}{kx_n^2 + 2x_n y_n + ky_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n(ky_n + x_n)}{kx_n^2 + 2x_n y_n + ky_n^2}$$

генов a и b следующего поколения (где коэффициент приспособленности $k = \frac{1}{2}$). Определить частоты предыдущего тура, если известно, что в $(n+1)$ -ом поколении на каждые 40 генов a приходится 33 гена b.

5. Доказать, что числа 49, 4489, 444889, $\ldots$, получаемые вставкой 48 в середину предыдущего числа, являются квадратами целых чисел.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 1 - (x-1)^2$.

7. Доказать эквивалентность $\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \quad x \to \infty$.

Олимпиады 2008 года

ТПУ, 2008 год, 1 курс, предмет

1. Найдите максимальное значение определителя 3-го порядка, составленного из чисел 1 и -1.

2. Не раскрывая скобки, доказать тождество

$\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) =$

$$=\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1c_2-a_2c_1\right)^2+\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2.$$

3. Построить и описать кривую, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x=1+4\cos t-3\sin t, \\ y=4+3\cos t+4\sin t, \end{cases} \qquad t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Найти количество решений системы уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=b, \end{cases}$

в зависимости от параметров $a\ge 0$ и $b\ge 0$.

5. Найти все функции, для которых $f(x)\,f(y)=f(x-y)$.

6. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух её асимптот есть величина постоянная, и найти её.

7. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость функцию

$$\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\ne 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

ТПУ, 2008 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите центр масс однородного тела, заданного в декартовых координатах системой неравенств:

$$\begin{cases} -2000\le z\le 2000 \\ 0\le y\le 3000 \\ |x|\le y\cdot z^{4000} \end{cases}.$$

2. Найдите минимум функции

$$f(x)=x^{-2008}+x^{-2006}+x^{-2004}+\ldots+x^{2004}+x^{2006}+x^{2008}.$$

3. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \ .$$

4. Внутри области, ограниченной непрерывной выпуклой замкнутой кривой, взята точка и через неё проведены хорды. Докажите, что если хорда отсекает сегмент наименьшей (наибольшей) площади S, то данная точка является serединой хорды.

5. Вычислите несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy \, dx$$

6. Поверхности, у которых средняя кривизна равна нулю, называются минимальными. Координаты их точек удовлетворяют уравнению

$$\left(1+\left(z'_x\right)^2\right) z''_{yy} - 2z'_x z'_y z''_{xy} + \left(1+\left(z'_y\right)^2\right) z''_{xx} = 0 \, .$$

Найдите минимальные поверхности вращения.

7. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p \ln \dfrac{n-1}{n+1}$.

8. Элементами квадратной матрицы A размерности $n\times n$ являются случайные числа X_{pq}. Эти величины независимы в совокупности и математическое ожидание каждой из них равно 0, дисперсия каждой из них равна σ^2. Тогда определитель Y матрицы X тоже будет случайной величиной. Найдите его дисперсию $D[Y]$

а) в случае $n=2$;

б) в общем случае.

ТПУ, областной тур, 2008 год, 1 курс, предмет

1. Найдите единичный вектор $\vec{d}$, составляющий равные углы с заданными единичными некомпланарными векторами $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}.$

2. Пусть $A-$ матрица размета $n \times n$ такая, что $A^2 = A$.

Какие значения может принимать определитель матрицы $E - A$?

3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{m}>\frac{n}{2} \quad \text{для} \quad m=2^n\ , \quad n\in\square\ , \ n>1.$$

4. Напишите уравнения общих касательных к двум окружностям

$$(x-5)^2+y^2=9 \quad \text{и} \quad x^2+(y-5)^2=16\,.$$

5. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2008}+\sqrt[n]{2007}-1\right)^n.$$

6. Пусть $p(x)-$ многочлен степени n и пусть

$$p(2008)\geq 0,\quad p'(2008)\geq 0,\ \ldots,\quad p^{(n-1)}(2008)\geq 0.$$

Докажите, что действительные корни уравнения $p(x)=0$ не превосходят 2008.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=1; \\ x+y+\cos^2 z=2. \end{cases}$$

8. Элементы последовательности $a_1, a_2, a_3 \ldots$ при любом $n>1$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1$.

Найдите a_{2008}, если $a_1=1,\ a_2=3.$

ТПУ, областной тур, 2008 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите число, которое увеличивается в 2000 раз, если в его десятичной записи поменять местами цифры, стоящие на первом и пятом после запятой местах.

2. Решите уравнение $\boldsymbol{x}\left(2^{1-2\boldsymbol{x}}-1\right)=2^{\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^2}-1$.

3. Найдите производную 2008 порядка от функции $y = arctg\, x$ при $x = 1$.

4. Докажите, что решение задачи Коши

$y' = \dfrac{x(1+\sin^2 y)}{(1+\sin^2 y)\, x^4 + y^2 + 1}$, $y(0) = 0$ удовлетворяет для

$\forall x \ge 0$ неравенству $0 \le y(x) < \dfrac{\pi}{4}$.

5. Вычислите двойной интеграл $I = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, где

$G -$ круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

6. Вычислите предел числовой последовательности a_n, где

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2008n}.$$

7. На бесконечной плоскости случайным образом выбраны три точки. Найдите вероятность того, что они являются вершинами тупоугольного треугольника. Можно предположить, что вероятность лежать на одной прямой равна нулю.

СГМУ, областная, 2008 год, 1 курс, естественнонаучные специальности

1. Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt[1]{1+x} \cdot \sqrt[2]{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+3x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2008]{1+2008x} - 1\right).$$

2. Доказать, что $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{101} + \dfrac{1}{102} + \ldots + \dfrac{1}{1000} > 1$.

3. Вычислить интеграл: $\displaystyle\int \frac{x\,tgx - \ln\cos x}{\left(1+tg^2 x\right)^x}\,dx$.

4. Капитан Сильвер зарыл на необитаемом острове клад. На этом острове растут всего две пальмы: маленькая и большая на расстоянии 400 м друг от друга. Сильвер сообщил пиратам, что расстояние от клада до маленькой пальмы в три раза больше, чем до большой. Какой формы и какой длины должны вырыть траншею пираты, чтобы точно найти клад? Ответ обосновать.

5. Вычислить определитель $\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$.

6. Известно, что квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ удовлетворяет неравенству $|\,f(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$. Каково при этом наибольшее значение a?

7. Построить на плоскости множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$\arccos^2 \frac{2y}{x} + \sqrt[4]{4x - x^2 - y^2} \ge 0.$$

СГМУ, областная, 2008 год, старшие курсы, естественнонаучные специальности

1. Вычислить предел $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\int_1^{\ln x}\frac{e^t}{t}\,dt\right)$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 2x, \text{ если } y(0) = y'(0) = 0.$$

3. Вычислить $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$.

4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2}{n^2-1}$.

5. На берегу озера стоят два дома. Они соединены дорогой, имеющей форму полуокружности. В каждом из них можно поселить до 20 человек. Как следует расселить 30 человек и где выбрать на дороге место для остановки автобуса, чтобы все они вместе тратили на путь до неё как можно меньше времени?

6. Дана функция $y = 2x^2$. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \max(2x^2, y)\,dx\,dy,$$

где $D-$треугольник: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$.

7. 1 апреля 2008 года из Космоса на Землю прибыл монстр. В зависимости от условий в течение некоторого периода он может либо погибнуть с вероятностью $P_{\text{Ï}} = \frac{1}{4}$, либо выжить с вероятностью $P_{\text{Â}} = \frac{1}{4}$, либо разделиться на два таких же монстра с вероятностью $P_{\text{Ä}} = \frac{1}{2}$. Пусть в течение второго цикла с каждым монстром могут произойти те же события и с теми же вероятностями, что и с прибывшим монстром в первом цикле. Найти вероятность того, что в начале третьего цикла после его прибытия на Землю будут существовать два монстра

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов ИрГТУ, г. Иркутск, 2008 год, 1 курс

1. Пусть $(a_i\ a_j)$ скалярные произведения линейно зависимых векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} (a_1\, a_1) & (a_1\, a_2) & \cdots & (a_1\, a_n) \\ (a_2\, a_1) & (a_2\, a_2) & \cdots & (a_2\, a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n\, a_1) & (a_n\, a_2) & \cdots & (a_n\, a_n) \end{vmatrix}.$$ (2 балла)

2. Доказать, что для любых трёх точек параболы с вертикальной осью симметрии выполняется $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$, где $k_1 -$ угловой коэффициент касательной к параболе в произвольной точке с абсциссой x_1, $k_{ij} -$ угловой коэффициент хорды, проходящей через точки на параболе с абсциссами x_i и x_j. (4 балла)

3. К дуге окружности проведены касательные в её концах и середине. Получается два треугольника: один образован хордой дуги и двумя касательными к её концам, другой образован тремя касательными. Найти предел отношения площади большего треугольника к площади меньшего, если длина дуги стремится к нулю. (4 балла)

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$. (5 баллов)

5. Точка двигается по прямой OA с постоянной скоростью υ. Вне этой прямой точка движется со скоростью $k\upsilon$. Точка B не лежит на прямой OA. Под каким углом к прямой OA надо свернуть, чтобы попасть в точку B, двигаясь по двум отрезкам прямых, за наименьшее время? (5 баллов)

6. Найти объём тела, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с высотой h и с основанием a. Поперечное сечение тела – сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента. (7 баллов)

7. В большом бочонке 8 ведер вина. Требуется разлить это вино пополам в две ёмкости, если имеется ещё два пустых бочонка: в один входит 5 ведер, в другой – 3 ведра. Как разлить вино не больше чем за 7 переливаний. (3 балла)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов ИрГТУ, г. Иркутск, 2008 год, 2 курс

1. Вычислить и сравнить интегралы $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\,x}{1+x^4}$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\ d\,x}{1+x^4}$.

(3 балла)

2. Доказать, что если $\frac{d\,y}{d\,x} = \varphi\left(x, y, C_1\right) -$ первый интеграл уравнения

$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = f\,(x, y)$, то общий интеграл уравнения примет вид

$\int \frac{\partial\varphi}{\partial C_1}\left(d\,y - \varphi\, d\,x\right) = C_2$, где $C_1,\ C_2 -$ постоянные. (4 балла)

3. Вычислить

$$\oint\limits_C \left(\frac{e^x}{x^2+y^2}\left(x\cos y + y\sin y\right)d\,y + \frac{e^x}{x^2+y^2}\left(x\sin y - y\cos y\right)d\,x \right),$$

где $C -$замкнутая кривая, окружающая начало координат и не пересекающая себя. (5 баллов)

4. Найти все непрерывные $f\,(x)$, если $x \in \mathbb{R}$, и

$$\iint\limits_D x\cdot f\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)d\,x\,d\,y = \frac{a^2\left(f\,(a) + \sin a - 1\right)}{3},\ \ a \geq 0 \quad \text{и}$$

$D:\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ \ \left|\,y\,\right| \leq x/\sqrt{3},\ \ x \geq 0$. (6 баллов)

5. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью $p -$ одинаковой вероятностью в каждый из k отсеков подводной части корабля. Корабль идёт ко дну, если поражено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну. (4 балла)

6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, если $a_0 = 1,\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} + (-1)^n\,\frac{1}{2}$.

(2 балла)

7. Однажды, в старые времена, двое пастухов продали стадо волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в стаде было волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 рублей за овцу и одного ягнёнка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягнёнка и получил с товарища доплату. Как велика доплата (она выражается целым числом рублей)? (6 баллов)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов, ИрГТУ, г. Иркутск, 2008 год, 3 – 5 курсы

1. Имеются две урны. В одной из них находится шар, о котором известно, что он либо белый, либо чёрный. В другой урне находятся 1 белый шар и 2 чёрных шара. В первую урну кладут белый шар, после чего её хорошо встряхивают и извлекают из неё один шар, который оказывается белым. Как следует действовать, чтобы вероятность извлечь белый шар после проделанных операций была наибольшей: вытаскивать шар, не зная из какой урны мы его извлекаем, или сначала пересыпать содержимое одной урны в другую, и лишь затем тащить шар? (5 баллов)

2. По известному общему решению линейного дифференциального уравнения $y = C_1 x + C_2 chx + C_3 shx - \alpha(x^2+2)$, где $C_1, C_2, C_3 -$ произвольные постоянные, а $\alpha -$ параметр, восстановить само уравнение. (4 балла)

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}$, если $a > b > 0$. (6 баллов)

4. Найти геометрический образ области сходимости ряда на комплексной плоскости

$1 + (z^2+1) + (z^2+1)^2 + (z^2+1)^3 + \ldots + (z^2+1)^n + \ldots$ (3 балла)

5. Найти $y = y(x)$, если $y(0) = 0, \quad y'(1) = 1$, а интеграл $\int\limits_0^1 \left(y^2 + (y')^2 \right) d\,x$ принимает наименьшее значение. (3 балла)

6. Вычислить $\dfrac{2}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots$. (3 балла)

7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \prod\limits_{m=1}^{n} \left(n^2 + m^2 \right)^{\frac{1}{n}}$. (6 баллов)

Олимпиады 2009 года

ТПУ, 2009 год, I курс

1. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число не имеющих общих точек кругов, сумма радиусов которых больше 2009?

2. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, если $a, b, c -$ различные корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

3. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!}{(n+2)!\left(\sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt[3]{n^3-n+2} \right)}.$$

4. Постройте график функции, заданной пределом

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x+1)\, arctg\, \frac{1}{x^{2n}+1}.$$

5. Исследуйте функцию и постройте её график

$$y = x\,arctgx - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)x\,.$$

6. Найдите многочлены наименьшей степени $g(x)$ такие,

чтобы функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x}{x^2+4}\,, & |x| \ge 1 \\ g(x), & |x| < 1 \end{cases}$ была:

1) непрерывна на всей числовой прямой;
2) дифференцируема на всей числовой прямой.

7. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + \sqrt{a_{n+1} + a_n - 2(n+1)^2}\,,$$

где $a_1 = 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Найдите a_{2009} .

ТПУ, 2009год, старшие курсы

1. Доказать равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,.$$

2. Решить задачу Коши

$$2y'' + \left(y'\right)^2 = y^2, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

3. Найти минимум функции

$$f(x) = \sum_{n=-2009}^{2009} x^{2n}\,.$$

4. Найти максимальный и минимальный элементы

последовательности $a_n = \dfrac{2n-3}{4n^2-12n+10}\,.$

5. Найти наибольшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

6. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}\ .$$

7. Вычислить

$$\iint\limits_{D:|x|+|y|\le 1}\left(e^{2009x^2+y}-e^{2009x^2-y}\right)dx\,dy\,.$$

ТГУ, 2009 год, I курс, предмет

1. В n-мерном пространстве ($n>1$) выбрано 2^n точек с координатами $(a_1,a_2,...,a_n)$, где каждое a_i может равняться 0 или 1. Будем говорить, что три такие (различные) точки образуют *малый треугольник*, если у этих точек совпадают координаты, стоящие на всех местах, кроме, быть может, двух [пример: (1,1,1,0,1), (0,1,0,0,1) и (0,1,1,0,1) образуют такой треугольник, поскольку у этих точек совпадают вторые, четвёртые и пятые координаты]. Докажите, что количество различных малых треугольников равно $n(n-1)2^{n-1}$.

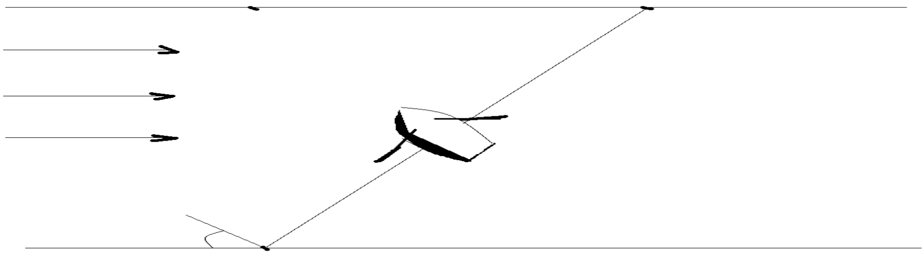
2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1=\dfrac{1}{2},\quad x_{n+1}=x_n-x_n^2,\quad n\in\mathrm{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1.$

3. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y=f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найти p.

4. Сколько положительных решений имеет уравнение $x^e=e^x$? Ответ обосновать.

5. Дан острый угол и точка P внутри него. С помощью циркуля и линейки без шкалы длин впишите в этот угол окружность, проходящую через данную точку.

6. Под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы за время переправы через реку её как можно меньше снесло течением, если скорость течения – 6 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде – 3 км /ч?



7. На астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ взята произвольная точка *M*, лежащая в первой четверти. Через эту точку проведена касательная к астроиде, пересекающая оси в точках *A* и *B*. Докажите, что длина отрезка *AB* не зависит от выбора точки *M*.

ТГУ, 2009 год, старшие курсы, предмет

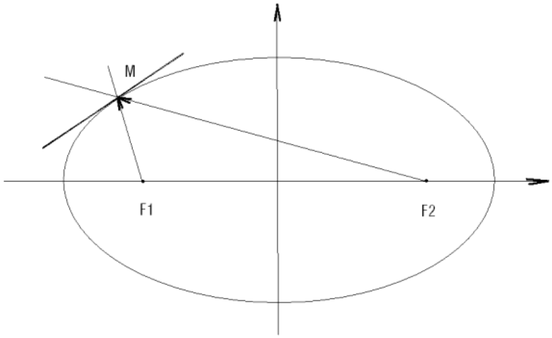
1. На плоскости Oxy дан квадрат с противоположными вершинами $(0,0)$ и $(1,1)$; контур этого квадрата обозначим через C. Постройте элементарную функцию $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такую, что $f(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $(x,y)\in C$.

2. Доказать, что существует и найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n - площадь фигуры, ограниченная кривой $y^2 = (x+\frac{1}{n})x(x+2)$, $x \le 0$, $n \in \mathrm{N}$.

3. Дано множество неотрицательных чисел $\{a_{ij}\}$, где индексы i и j пробегают все пары натуральных чисел. Известно, что при любом натуральном i выполнено $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le 1$. Возможно ли, что при любом натуральном j выполнено $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = +\infty$?

4. С помощью циркуля и линейки (линейка без делений) провести касательную к гиперболе в точке, лежащей на данной гиперболе.

5. Доказать биссекториальное свойство касательной к эллипсу: касательная к эллипсу в произвольной точке M есть биссектриса угла, смежного с углом между фокальными радиусами точки касания.



6. Стержень ломается случайным образом на две части. Каково среднее отношение длины короткого куска к длине длинного куска?

7. Дан отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Рассмотрим произвольное разбиение этого отрезка
$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Под мелкостью разбиения понимаем, как обычно,
$|T| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Найдите $\lim\limits_{|T| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2$.

ТПУ, областная, 2009 год, 1 курс, для естественнонаучных специальностей

1. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно 2. Каждое последующее число равно сумме кубов

цифр предыдущего числа. Доказать, что среди чисел этой последовательности есть одинаковые.

2. Пароход из города A в город B идёт по течению реки 5 суток, а из города B в город A против течения реки 7 суток. Сколько дней будет плыть по течению реки из города A в город B плот.

3. Матрицы A и B размерности соответственно 3×2 и 2×3 таковы, что $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти BA.

4. Дана система векторов $\vec{r}_n \left\{x_{n,}\, y_n\right\},\quad n \in \mathbb{N}$, координаты которых удовлетворяют соотношениям $\begin{cases} x_{n+1}^2 + x_n = y_n\,, \\ y_{n+1} + y_n = x_n + 2. \end{cases}$ Доказать, что все векторы, начиная со второго, имеют длину, большую чем $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

5. Пусть $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Доказать, что найдётся такое число $c \in (0,1)$, что $f'(c)=0$.

6. Пусть x и y – вещественные числа из отрезка $[0,2]$. Докажите неравенство $\dfrac{x}{\sqrt{y^2+4}} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+4}} \le \sqrt{2}$.

7. Консультант по организации труда установил, что грузчик, взяв n кирпичей, поднимет их на m этажей и вернётся вниз (без кирпичей) за время, равное $\dfrac{1}{4}\left(n^2 m + n m^2 + 4n + 100m\right)$ секунд.

Как организовать работу грузчика, чтобы он поднял 1000 кирпичей с нулевого этажа на десятый за минимальное время?
Чему равно это время (рабочее)?

ТПУ, областная, 2009 год, старшие курсы,
для естественнонаучных специальностей

1. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и её максимальное значение равно числу M. Найдите максимальное значение функции $f(at+b)$, где $a,\ b-$ произвольные фиксированные действительные числа.

2. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2{,}009)^{\ln n}}.$$

3. Решить задачу Коши
$$y''-y=x\,y'+1,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

4. Пусть $f(x)$ непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция и для любых $x,y\in[0,1]$ выполняется неравенство $x\,f(y)+y\,f(x)\le 1$.

Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x)\,dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

5. Матрицы A и B размерности соответственно 3×2 и 2×3 таковы, что $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$. Найти BA.

6. На прямолинейном участке дороги длиной 10 км находятся три человека. Какова вероятность того, что расстояние между любыми двумя «соседями» не меньше 2 км.

7. Консультант по организации труда установил, что грузчик, взяв n кирпичей, поднимет их на m этажей и вернётся вниз (без кирпичей) за время, равное $\frac{1}{4}\left(n^2m+nm^2+4n+100m\right)$ секунд.

Как организовать работу грузчика, чтобы он поднял 1000 кирпичей с нулевого этажа на десятый за минимальное время?
Чему равно это время (рабочее)?

Задачи с решениями

Векторная и линейная алгебра

1. Матрицей Грама системы векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ называется квадратная матрица

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(\bar{a}_1,\bar{a}_1) & (\bar{a}_1,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_1,\bar{a}_n)\\ (\bar{a}_2,\bar{a}_1) & (\bar{a}_2,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_2,\bar{a}_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\bar{a}_n,\bar{a}_1) & (\bar{a}_n,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_n,\bar{a}_n)\end{pmatrix},\quad \text{где}\,(\bar{a}_i,\bar{a}_j)\ -$$

скалярные произведения соответствующих векторов. Доказать, что векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы Γ равен нулю.

Решение. *Необходимость.* Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, т.е. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ (*), причем, по крайней мере, одно из $\lambda_i \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$. Умножим скалярно обе части (*) сначала на $\vec{a}_1$, затем на $\vec{a}_2$, и так далее. Получим

(1) $\lambda_1(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \ldots + \lambda_n(\vec{a}_1, \vec{a}_n) = 0$

(2) $\lambda_1(\vec{a}_2, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_2, \vec{a}_2) + \ldots + \lambda_n(\vec{a}_2, \vec{a}_n) = 0$

… ……………………………………………

(n) $\lambda_1(\vec{a}_n, \vec{a}_1) + \lambda_2(\vec{a}_n, \vec{a}_2) + \ldots + \lambda_n(\vec{a}_n, \vec{a}_n) = 0$

Равенства (1) – (n) будем рассматривать как систему уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Чтобы нашлось нетривиальное решение системы, надо, чтобы ее определитель был равен 0: $\det \Gamma = 0$. *Достаточность* доказывается аналогично.

2. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - четыре луча, исходящие из одной точки, α_{ij} - угол между лучами $l_i,\ l_j$. Показать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\ \cos\alpha_{21} & 1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & 1 & \cos\alpha_{34} \\ \cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Поставим в соответствие лучам l_i единичные векторы $\vec{l}_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Они линейно зависимы, поэтому можно воспользоваться результатом задачи 1.

3. Доказать, что каковы бы ни были элементы определителя третьего порядка, все его члены разложения не могут иметь одинаковые знаки.
Решение. Обозначив элементы определителя через a_{ij} ($i,\ j = 1, 2, 3$) и раскрыв его, предположим, что все шесть слагаемых имеют одинаковые знаки, например, положительны. Тогда, (1) $a_{11}a_{22}a_{33} > 0$, (2) $a_{12}a_{23}a_{31} > 0$, (3) $a_{13}a_{21}a_{32} > 0$, (4) $a_{13}a_{22}a_{31} < 0$, (5) $a_{12}a_{21}a_{33} < 0$, (6) $a_{11}a_{23}a_{32} < 0$. Перемножив почленно неравенства (1- 4), получим $a_{11}a_{23}a_{32}(a_{13})^2(a_{22})^2(a_{31})^2 a_{21}a_{12}a_{33} < 0$. Последнее неравенство

противоречит (5) - (6). Аналогичное противоречие получаем, предположив, что все шесть слагаемых в разложении определителя отрицательны.

4. Пусть даны k k - разрядных чисел, каждое из которых делится на данное число m нацело. Рассмотрим определитель k - ого порядка, составленный следующим образом: каждая строка его - k цифр по порядку соответствующего числа. Доказать, что определитель тоже делится на m нацело.

Решение. Пусть данные числа имеют вид:
$a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}$, $a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}$, $\cdots\cdots$, $a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk}$, где a_{ij} - цифра, стоящая в j - ом разряде i - го числа. Имеем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \textit{умножаем первый столбец на } 10^k, \\ \textit{второй на } 10^{k-1}, \ldots, \textit{предпоследний на } 10, \\ \textit{и складываем с последним столбцом} \end{array} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk} \end{vmatrix}$$, который делится на m, так как каждый элемент последнего столбца делится на m.

5. Дан треугольник $\Delta A_1A_2A_3$. На его сторонах (или продолжениях сторон) берутся произвольные точки $L \in A_1A_2$, $M \in A_2A_3$, $N \in A_3A_1$. Известно, что $\frac{A_1L}{LA_2} = \lambda$, $\frac{A_2M}{MA_3} = \mu$, $\frac{A_{3N}}{NA_3} = \nu$. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, что точки L, M, N лежат на одной прямой, является $\lambda\mu\nu = -1$.

Решение. Обозначим $A_i(x_i, y_i)$, где $i = 1,2,3$, $L(x_6, y_6)$, $M(x_5, y_5)$, $N(x_4, y_4)$. Имеем $x_6 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_6 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$,

$x_5 = \dfrac{x_2 + \mu x_3}{1+\mu}$, $y_5 = \dfrac{y_2 + \mu y_3}{1+\mu}$, $x_4 = \dfrac{x_3 + \nu x_1}{1+\nu}$, $y_4 = \dfrac{y_3 + \nu y_1}{1+\nu}$. Чтобы точки L, M, N лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $S_{\Delta LMN} = 0$, то есть

$\frac{1}{2}\left|(x_4 y_5 + x_5 y_6 + x_6 y_4) - (x_4 y_6 + x_6 y_5 + x_5 y_4)\right| = \ldots$

$\ldots = \frac{1}{2}\left[S_{\Delta A_1 A_2 A_3} + \lambda\mu\nu S_{\Delta A_1 A_2 A_3}\right] = 0$. Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = -1$.

6. Определить геометрическое место вершин парабол

$y = x^2 - \dfrac{4mx}{1+m^2} + \dfrac{1+4m^2+m^4}{(1+m^2)^2}$, где $-\infty < m < +\infty$.

Решение. Представим уравнение параболы в виде

$y = \left(x - \dfrac{2m}{1+m^2}\right) + \dfrac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$, откуда параметрические уравнения

вершин: $x = \dfrac{2m}{1+m^2}$, $y = \dfrac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$. Чтобы исключить параметр m,

выразим из первого уравнения $\dfrac{m}{1+m^2}$ через x, возведем результат в

квадрат и сложим с y. Получим $2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y = \dfrac{2m^2+1+m^4}{(1+m^2)^2} = 1$.

Отсюда ответ: геометрическое место точек, являющихся вершинами данных парабол, есть парабола $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Предел, производная, исследование функций

7. При каких условиях уравнение $x^3 + hx + q = 0$ имеет:

а) один действительный корень, б) два действительных корня?

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^3 + hx + q$, $y' = 3x^2 + p$. Тогда

а) если $p \geq 0$, то функция монотонно возрастает и, следовательно, исследуемое уравнение имеет единственный корень.

б) Пусть $p < 0$. Тогда экстремум функции достигается в двух точках $x_1 = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Ясно, что уравнение будет иметь три действительных корня только в случае, если значения функции в точках экстремума будут противоположны по знаку, то есть $y(x_1)y(x_2) < 0$. Отсюда получим искомое условие $27q^2 + 16p^3 < 0$.

8. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$.

Решение. Рассмотрим поведение функции $y(x)$ на различных промежутках: а) $0 \le x < 1$;

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^n}{n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1.$$

б) $x = 1$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = 1.$

в) $1 < x < 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} x\sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{x^n} + \dfrac{x^n}{2^n}} = x.$

г) $x = 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot 2} = 2.$

д) $x > 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n + \left(\dfrac{2}{x}\right)^n + 1} = \dfrac{x^2}{2}.$

е) $-2 \le x \le -1 -$ предела не существует.

ж) $x < -2$; $\quad y = \dfrac{x^2}{2}.$

9. Доказать, что функция $y = 2\operatorname{arctg} x - \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ равна 0 при $|x| < 1$ и равна $4\operatorname{arctg} x - \pi$ при $|x| > 1$.

Решение. Вычислим производную от функции $y(x)$:

$$y' = \frac{2}{1+x^2}\left(1 - sign(1-x^2)\right) =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{1+x^2}, & если \quad |x|>1\\ 0, & если \quad |x|<1.\end{cases}$$ Но тогда $y=\begin{cases}4arctg\,x+c_2, & если \ |x|>1\\ c_1, & если \ |x|<1\end{cases}.$

Постоянные c_1 и c_2 определим, вычислив значения $y(0)$ и $y(1)$. Так как $y(0)$, то и $c_1=0$. Так как функция $y=$ $2\text{arctg}\,x$ $-\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в точке $x=1$, то $4\text{arctg}1+c_2=0$ и $c_2=-\pi$.

10. Доказать, что существуют единственные $a\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ и $b\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, такие, что $a<b$ и $\sin(\cos\ a)=a$, $\cos(\sin\ b)=b$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sin(\cos\ x)-x$, где $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем: $y(0)=\sin 1>0,\quad y(\frac{\pi}{2})=-\dfrac{\pi}{2}<0$.

$y'=[\cos(\sin\ x)](-\sin\ x)-1<0$ в $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому существует, при том единственная, точка $a\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, в которой $y(a)=\sin(\cos\ a)-a$, откуда $\sin(\cos\ a)=a$. Аналогично решается вторая часть задачи.

11. Известно, что существуют оба экстремума функции $y=ax^3+bx^2+cx+d$, а прямая, проходящая через экстремальные точки, проходит и через начало координат. Определить зависимость между коэффициентами a, b, c, d.

Решение. Имеем $y'=3ax^2+2bx+c=0\quad(*)$. Оба корня уравнения (*) существуют, обозначим их x_1 и x_2. Условия принадлежности точек $(x_1,\ y_1)$, $(0,0)$, $(x_1,\ y_2)$ одной прямой запишем в виде:

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d}{ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d}$. После очевидных тождественных преобразований получим: $(x_1-x_2)\left[ax_1x_2(x_1+x_2)+bx_1x_2-d\right]=0$. Так как $x_1\neq x_2$, имеем $ax_1x_2(x_1+x_2)+bx_1x_2-d=0$. Воспользовавшись теоремой Виета, получим $a\cdot\frac{c}{3a}\left(-\frac{2b}{3a}\right)+b\cdot\frac{c}{3a}-d=0$ или $bc-9ad=0$.

12. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение 6 при $x = 1$ и минимальное значение 2 при $x = 3$.

Решение. Так как $p'(1)=p'(3)=0$, то $p'(x)-$ многочлен степени не меньше, чем 2 и $p(x)$ – многочлен степени не меньше, чем 3. Положив $p'(x)=A(x-1)(x-3)=A(x^2-4x+3)$, из условий $p''(1)<0$ и $p''(3)>0$ получим $A > 0$. Далее получим

$$p(x)=A\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)+B,\text{ откуда } p(1)=\frac{4}{3}A+B=6 \text{ и } p(3)=B=2.$$

Следовательно, $B = 2$ и $A = 3$. Окончательно, $p(x)=x^3-6x^2+9x+2$.

13. Дано $S_1=\sqrt{2},\quad S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $S_n<2$. Тогда $S_{n+1},$ очевидно, тоже меньше 2. Так как $x+2>x^2$ при $0 < x < 2$, то $S_{n+1}>S_n$. Поэтому $\{S_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает. Обозначив её предел S, получим $S=\sqrt{S+2},$ или $S^2=S+2,$ откуда либо $S=-1,$ либо $S = 2$. Первый случай невозможен, так что $S = 2$.

14. Пусть $\{x_n\}-$ последовательность такая, что $x_0=25,\ x_n=arctg\,x_{n-1}$. Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $y(x)=arctg\,x$. При $x = 0$ $y(x) = 0$; при $x > 0$

$y'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} < 1,$ так что при $x > 0$ $y(x) < x$. Поэтому

последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает; для каждого n $x_n > 0$, так что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$. Переходя к пределу в соотношении $x_{n+1} = arctg\, x_n$ (что возможно в силу непрерывности функции y (x) на $(-\infty,+\infty)$, имеем $a = \operatorname{arctg} a$, откуда $a = 0$.

15. Существует ли функция, значение которой конечно в каждой точке отрезка $[0,1]$, но не ограниченная в любой окрестности любой точки этого отрезка?

Решение. Такой функцией f (x) является, например, функция, равная 0 для любого иррационального x, а для рационального x, представленного в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, равная q.

16. Определить λ и μ таким образом, чтобы имело место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu\right) = 0.$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (\lambda x + \mu)) = 0,$ откуда $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (в данном случае $\lambda = -1$), $\mu = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - \lambda x)$ (в данном случае $\mu = 0$).

17. Пусть $f(x)$ – нечётная дифференцируемая на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция. Доказать, что а) $f'(x)$ – четная функция. б) Верно ли обратное утверждение?

Решение. Дифференцируя почленно равенство $f(-x) = -f(x)$, получаем $f'(-x) = f'(x)$. В обратную сторону утверждение неверно. В этом легко убедиться, взяв, например, функцию $f(x) = x+1$.

18. Функция f (x) имеет на полуоси $(0, +\infty)$ непрерывную производную, f (0) = 1, $|f(x)| \le e^{-x}$ при всех $x \ge 0$. Доказать, что существует такая точка x_0, что $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$. Имеем $\varphi(0) = 0$; при $x \geq 0$ $\varphi(x) \leq 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому существует точка x_0, в которой функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения; в точке x_0 производная функция $\varphi'(x_0) = 0$, то есть $f'(x_0) + e^{-x_0} = 0$ и $f'(x_0) = -e^{-ч_0}$.

19. Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале (- a, a), и пусть последовательность $f^{(n)}(x)$ сходится равномерно на интервале (- a, a). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

Решение. Пусть $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$. Почленно интегрируя,

получим $\int\limits_0^x g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\right) = g(x) - 1$. Отсюда видно,

что $g(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению g'(x) = $g(x)$ и начальному условию $g(0) = 1$, то есть g(x) = e^x .

Интегральное исчисление

20. Определить объём тора (тела, полученного вращением круга радиуса R вокруг не пересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно d.

Решение. Пусть тор получается вращением окружности $y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно оси Ox; тогда его объём равен

$$\pi\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\pi d\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi dR^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = 2\pi^2 dR^2 .$$

21. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не зависит от величины α.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} + \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = J_1 + J_2 .$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = 1/y$; тогда

$$J_1 = \int\limits_1^\infty \frac{dy}{\left(1+y^2\right)\left(1+y^{-\alpha}\right)}; \quad J_1 + J_2 = \int\limits_1^\infty \Big(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \Big) \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2},$$

что не зависит от величины α.

22. Доказать, что если уравнение $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x_n^n = 0$ имеет коэффициенты $c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ такие, что

$\frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, то оно имеет по крайне мере один действительный корень, заключенный между нулем и единицей.

Решение. Обозначим левую часть уравнения $P_n(x)$. Проинтегрируем обе части равенства $P_n(x) = 0$,

получим: $c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + A = 0$. Левую часть этого уравнения обозначим $P_{n+1}(x)$. Имеем $P_{n+1}(x) = 0$. Функция $P_{n+1}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке [0;1] (дифференцируема, непрерывна, и $P_{n+1}(0) = A$, $P_{n+1}(1) = A + 0 = A$). Тогда найдется точка $x_0 \in [0;1]$, в которой $P'_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = 0$.

23. Подобрать форму сосуда (поверхность вращения) так, чтобы сосуд можно было использовать в качестве водяных часов (понижение уровня воды в сосуде x должно быть строго пропорционально времени t).

Решение. Пусть $x = F(y)$ – площадь поперечного сечения сосуда. За время dt должно вытечь $F(y)dx$ воды. С другой стороны, за это же

время вытекает $k\sqrt{2gh-2gx}\,dt$ воды. Имеем: $F\,dx = k\sqrt{2gh-2gx}\,dt$. Но,
по условию, $dt = c\,dx$ и $F = \pi y^2$. Откуда уравнение поверхности сосуда:
$\pi y^2 = ck\sqrt{2g}\,(h-x)^{\frac{1}{2}}$. Или $y^4 = a^4(h-x)$.

24. Известно, что $y = g(x)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$ и существует $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$. Доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_{-1}^{0} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_{0}^{1} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx +$$

$$+\int\limits_{1}^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \left| \begin{array}{ll} y = x-\dfrac{1}{x}, & x_{1/2} = \dfrac{y}{2} \pm \dfrac{\sqrt{y^2+4}}{2} \\ x^2 - xy - 1 = 0, & dx = \dfrac{dy}{2} \pm \dfrac{y\,dy}{2\sqrt{y^2+4}} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int\limits_{0}^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int\limits_{0}^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy == \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy +$$

$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\dfrac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\dfrac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy$. Последние два интеграла сходятся ($g(y)$ - интегрируема, а $\left|\dfrac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right| < 1$) и равны. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(y-\frac{1}{y}\right)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy.$$

25. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута. Кроме того, $f'(1) < 2f(x)$ на этом отрезке. Показать, что $\int\limits_0^1 f(x)dx > 0$.

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta)(x-1)^2}{2!}$. Так как $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута, ее вторая производная неотрицательна, $f''(\theta) \geq 0$, $\theta \in (0;1)$ и третье слагаемое в разложении неотрицательно. Тогда $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1)$. По условию $\frac{f'(1)}{2} > f(1)$, поэтому $f(x) < \frac{f'(1)}{2} + f'(1)(x-1) = f'(x - \frac{1}{2})$. Отсюда

$$\int\limits_0^1 f(x)dx > f'(1)\int\limits_0^1 (x - \tfrac{1}{2})dx = f'(1)\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}\Bigg|_0^1 = 0.$$

26. Внутри непрерывной выпуклой замкнутой кривой взята точка и через нее проведены хорды. Доказать, что если хорда отсекает сегмент наименьшей (наибольшей) площади, то данная точка является серединой хорды. Справедливо ли обратное утверждение? Какие результаты вытекают из данного утверждения для окружности.

Решение. Введем полярную систему координат, поместив полюс в данную точку O. Пусть уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$. Следует показать, что $\rho(\varphi_0) = \rho(\varphi_0 + \pi)$, где φ_0 - угол, при котором хорда отсекает наименьшую или наибольшую площадь. Исследуем на экстремум функцию $S(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

$S'(\varphi_0) = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} = \frac{1}{2}\left[\rho^2(\varphi_0 - \pi) - \rho^2(\varphi_0)\right] = 0$. Отсюда следует $\rho(\varphi_0 + \pi) = \rho(\varphi_0)$, что означает, что точка O лежит на середине хорды.

27. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая получается при вращении линии $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$ вокруг оси OX, $x \in [0;\infty)$.

Решение.

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \pi \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-2x}(-2\sin x - \cos x)}{5} \right]\Bigg|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2(2k+1)\pi} + e^{-2(2k\pi)}}{5} =$$

$$= \frac{\pi}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2(2k+1)\pi} + e^{-4k\pi} \right) = \frac{\pi}{5}\left(1 + \frac{1}{e^{2\pi}} + \frac{1}{e^{4\pi}} + \cdots\right) = \frac{\pi}{5\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right)} = \frac{\pi e e^{2\pi}}{5(e^{2\pi} - 1)}$$

28. Пусть функция периодическая с периодом ω и интегрируемая на каждом конечном отрезке действительной оси. Доказать, что необходимым и достаточным условием периодичности функции $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ с тем же самым периодом является $\int_0^{\omega} f(t)dt = 0$.

Решение. Имеем $F(x+\omega) = \int_0^{x+\omega} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+\omega} f(t)dt$.

Тогда $F(x+\omega) - F(x) = = \int_x^{x+\omega} f(t)dt = \int_0^{\omega} f(t)dt$ в силу периодичности функции $f(x)$, откуда доказательство очевидно.

29. Найти все функции $f(x) \geq 0$, определенные на $[0;1]$ и такие, что $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^1 xf(x)dx = A$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx = A^2$, где A - данное действительное число.

Решение. Имеем $\int_0^1 A^2 f(x)dx = A^2$ (1); $\int_0^1 2Axf(x)dx = 2A^2$ (2); $\int_0^1 x^2 f(x)dx = A^2$ (3). Сложим (1) и (3) и вычтем (2), получим $\int_0^1 \left[A^2 f(x) - 2Axf(x) + x^2 f(x)\right]dx = 0$ или $\int_0^1 (A-x)^2 f(x)dx = 0$. Но такое равенство возможно только в случае $f(x) \equiv 0$.

Числовые и функциональные ряды.

30. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$?

Решение. Ряд сходится, если сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Но $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$, и исходный ряд сходится.

31. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^x}$.

Решение. Рассмотрим $f(x)\ln^2 3 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-nx} = \frac{1}{3^x - 1}$ при $x > 0$.

Нетрудно проверить, что данный ряд можно дважды почленно продифференцировать на промежутке $(0,.\infty)$, так что

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{nx}} = \frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = f'(1) = \frac{3}{2}.$$

32. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi}{90}$. Вычислить $\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию и возьмем интеграл по частям. Имеем: $\frac{x^3}{e^x-1}=x^3\cdot\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Так как $x\in[0;\infty]$, $e^{-x}<1$, разложим дробь $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ по степеням e^{-x}: $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$. Но тогда $\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}=$

$$=\int_0^{\infty}x^3(\ e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x^3, & dv=(e^{-x}+e^{-2x}+\ldots)dx \\ du=3x^2dx, & v=-(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+\ldots) \end{array}\right|=$$

$$=-x^3(e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-2x}+\ldots)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}3x^2(e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-2x}+\ldots)dx=\cdots$$

$$\ldots=-6\left(e^{-x}+\frac{1}{2^4}e^{-2x}+\ldots+\frac{1}{n^4}e^{-nx}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\infty}\ =\ 6\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}.$$

33. Исходя из выражения

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$, вычислить сумму

$$\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}+\ldots$$

Решение. Прологарифмируем данное выражение: $\ln(1+x)$ + $+\ln(1+x^2)$ + $\ln(1+x^4)+\ln(1+x^{2^{n-1}})$ = $\ln(1-x^{2^n})$ - $\ln(1-x)$, а результат продифференцируем:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}-1}}{1+x^{2^{n-1}}}=-\frac{2^n x^{2^n-1}}{1-x^{2^{n-1}}}+\frac{1}{1-x}.$$

Умножив обе части последнего равенства на x, получим: $\frac{x}{1+x}+$ $+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}=\frac{x}{1-x}-\frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}}$. Очевидно, $x\neq\pm1$.

34. Цепь под влиянием собственного веса принимает форму кривой $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. Показать, что при малых x можно заменить цепную линию параболой $y=\frac{x^2}{2a}+a$.

Решение. Разложив функцию $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ по степеням x, получим:

$$y=\frac{a}{2}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots+1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}-\ldots)=\frac{a}{2}(2+\frac{x^2}{a^2}+\ldots)=$$
$$\frac{x^2}{2a}+a+o(x^2).$$

35. Доказать, что $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству: $e^n>\frac{n^n}{n!}$.

Но, разложив e^n по степеням n (это возможно, так как область сходимости ряда для e^x $(-\infty;\infty)$), убеждаемся, что правая часть неравенства - только одно из слагаемых в разложении e^n.

36. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$, $k\in\mathrm{N}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}-\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}\right].$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right],$$

откуда при $n\to\infty$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k\cdot k!}$.

37. Определить порядок убывания общего члена и исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

Решение. $\displaystyle a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})=\ln^p(1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots)\sim$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots\right]^p\sim\left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right]^p\sim\frac{1}{2^p}\frac{\pi^{2p}}{n^{2p}}+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}\right)\sim\frac{1}{n^{2p}}.$$

Поэтому при $p>\frac{1}{2}$ ряд сходится.

38. Обозначим $\ln\ln n=\ln_2 n$, $\ln\ln\ln n=\ln_3 n$, …. Доказать теорему: ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если для некоторых m, a, c

$$|u_n|<\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a},\quad a>1$$ и расходится, если

$$|u_n|>\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a},\quad a<1.$$

Указание. Рассмотреть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, где

$\displaystyle v_n=\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a}$. Можно показать, что члены этого ряда, начиная с некоторого номера k, положительны и монотонно убывают. Поэтому сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ можно выяснить, воспользовавшись интегральной теоремой Коши:

$$\int_k^{\infty} \frac{c\,dx}{x\ln x\ln_2 x\ln_3 x\ldots\ln_{m-1} x(\ln_m x)^a} = \left.\frac{c(\ln_m x)^{1-a}}{1-a}\right|_k^{\infty} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c(\ln_m k)^{1-a}}{a-1}, & \text{если} \quad a>1 \\ \infty, & \text{если} \quad a<1. \end{cases}$$

Далее воспользоваться признаком сравнения.

39. Показать, что $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}$, (считаем $x^x=1$ при $x=0$).

Решение. Имеем $x^x = e^{x\ln x}$, поэтому $\int_0^1 x^x\,dx = \int_0^1 e^{x\ln x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,dx$. Рассмотрим интеграл $F(n,k) =$

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,dx = \left.\frac{x^{n+1}(\ln x)^k}{n+1}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{k x^n(\ln x)^{k-1}}{n+1}\,dx =$$

$= -\dfrac{k}{n+1}F(n,k-1)$, для $n \ge 0, n\in \mathrm{N}, k\ge 1, k\in \mathrm{N}$. Откуда

$$F(k,k) = = (-1)^k k!(k+1)^{-k}F(k,0) = (-1)^k k!(k+1)^{-k}\int_0^1 x^k\,dx =$$

$(-1)^k k!(k+1)^{-(k+1)}$.

Наконец, $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$.

40. Вдоль прямого шоссе на расстоянии 500 метров друг от друга стоят два дома. В каждом из них можно поселить до 20 человек. Как следует расселить 30 человек и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы все они вместе тратили на путь до нее как можно меньше времени?

Решение. Выбрав систему координат XOY так, что ось OX направлена вдоль шоссе и расположение первого дома соответствует $x=0$, обозначим через x координату остановки, а через y - количество жильцов в первом доме. Согласно условиям задачи, надо минимизировать функцию $S(x,y)=xy+(500-x)(30-y)$, заданную в области $0\le x\le 500$, $0\le y\le 30$. Действуя по стандартной методике, получим $S_{\min}=500$. Это наименьшее значение функция достигает в точках (0,20) и (500,10). Откуда следует вывод: остановку надо делать возле одного из домов, в котором и следует поселить 20 человек.

41. Пусть функция $f(x,y)$, определенная в круге $x^2+y^2\le 1$ и имеющая непрерывные частные производные, удовлетворяет неравенству $|f(x)|\le A$. Доказать, что найдется такая точка в круге, в которой $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\le (2A)^2$.

Решение. Допустим, что для всех точек (x,y) круга $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=(gradf)^2>(2A)^2$. Построим теперь кривую L наискорейшего подъема (или спуска), проходящую через точку $(0,0)$. Так как $gradf\ne 0$ в круге, то $f(x,y)$ внутри круга не имеет экстремумов и поэтому кривая L выходит на границу круга, причем ее длина не меньше 1. Для элементарного участка Δl кривой $gradf$ совпадает по направлению с Δl, поэтому $\Delta f=|gradf|\cdot\Delta l=\dfrac{\partial f}{\partial l}\cdot\Delta l$ и $f(\tilde{x},\tilde{y})-f(0,0)=\int\limits_L |gradf|dl$, где $(\tilde{x},\tilde{y})$ - точка кривой L, лежащая на границе круга. Но так как, по предположению, $|grad f| > 2A$, то

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(0,0) = \int\limits_L |grad f| dl > 2A \int\limits_L dl \le 2A.$$. Откуда

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) > f(0,0) + \int\limits_L |grad f| dl \ge f(0,0) + 2A.$$ Но, по условию,

$|f(0,0)| \le A$, поэтому $f(\tilde{x},\tilde{y}) > 2A - A = A$. С другой стороны, по условию, и на границе $f(\tilde{x},\tilde{y}) \le A$. Полученное противоречие и доказывает, что в круге имеется точка (x,y), в которой

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \le (2A)^2 .$$

42. По поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + 2y^2$, движется точка в направлении наискорейшего спуска. Начальное положение точки имеет координаты $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Найти путь, пройденный точкой до окончания спуска.

Решение. Пусть масса точки $m = 1$**.** Тогда по закону сохранения энергии $g(z_0 - z) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$, откуда

$$\sqrt{2g}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}$$ и

$$\sqrt{2g} \cdot t = \int\limits_{M_0(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})}^{O(o,o,o,)} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}} dz$$. Наискорейший спуск

происходит, когда интеграл в правой части последнего равенства минимален. Эта задача является классической задачей вариационного исчисления. Имеем: $\Phi = F + \lambda(z)\varphi$, где $F = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}}$, $\lambda(z)$ - множитель Лагранжа, $\varphi = x^2 + 2y^2 - z$. Уравнения Эйлера принимают вид: $\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=0 \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \end{cases}$, откуда уравнения линии

наискорейшего спуска: $\begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ y-\frac{1}{2}x^2=0 \end{cases}$ и сам путь

$$L=\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^2+(2x+3x^3)^2}\,dx\right|=\frac{5\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{4}.$$

43. Какой интеграл больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

Решение. Имеем: $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dx = \left|\begin{matrix} xy=z \\ x=\dfrac{z}{y}\end{matrix}\right| =$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y}\int_0^y z^z dz = \left|\begin{matrix} \int\limits_0^y z^z dz = u, & du = y^y dy \\ \dfrac{dy}{y}=dv, & v=\ln y \end{matrix}\right| = \ln y\int_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$$

$-\int\limits_0^1 y^y \ln y dy$. Тогда $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy - \int\limits_0^1 x^x dx = \ln y\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$

$-\int\limits_0^1 y^y(\ln y+1)dy = \ln y\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} - y^y\Big|_0^1 = 0$, так как $y^y\Big|_0^1 = 0$,

и $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^y z^z dz$.

44. Найти наибольшее значение функции в замкнутой области, ограниченной плоскостями $-3x+2y-z=1$, $2x-y+3z=-2$, $-x+y+2z=-1$, $x+y+11z=3$, $x+y+11z=7$.

Решение. Видно, что данная область есть отрезок прямой $\begin{cases}-3x+2y-z=1\\ 2x-y+3z=-2\end{cases}$, заключенный между плоскостями $x+y+11z=3$ и $x+y+11z=7$. Так как функция $u=2x+y+5z$ линейно зависит от своих аргументов, то наибольшее значение должно достигаться на одном из концов отрезка. Имеем $u_{\max}=34$ в точке $(-18,-18,2)$.

45. Пусть $f(x_1,x_2)$ – функция двух переменных, каждая из которых может принимать только два значения: 0 и 1. Показать, что $f(x_1,x_2)$ можно представить в виде $f(x_1,x_2)=$ $=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_1x_2$, где a_i – постоянные $(i=0,1,2,3)$.

Решение. Имеем: $f(0,0)=a_0$, $f(1,0)=a_0+a_1$, $f(0,1)=a_0+a_2$, $f(1,1)=a_0+a_1+a_2+a_3$. Рассматривая полученные равенства как систему уравнений относительно a_i, видим, что она совместна, так как ее определитель отличен от нуля.

Дифференциальные уравнения

46. Известно, что $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+tg^2 x$. Найти $f(x)$ при $0<x<1$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x=y$. Тогда

$$f'(y)=1-2y-\frac{y}{1-y}=-2y+\frac{1}{1-y},$$

$$f(y)=\int\left(-2y+\frac{1}{1-y}\right)dy=-y^2-\ln(1-y)+c,$$

$$f(x)=-\left(x^2+\ln(1-x)\right)+c \quad \text{при } 0<x<1.$$

47. Доказать, что при $a>b>1$ выполняется неравенство $a^{b^a}>b^{a^b}$.

Решение. После двойного логарифмирования неравенство приводится к виду $\ln\ln a + a\ln b > \ln\ln b + b\ln a$ или, если обозначить $x = \dfrac{\ln a}{\ln b} > 1$, $y =$ $\ln b > 0$, к виду $\ln x > y\left(xe^{y} - e^{xy}\right)$. Пусть $\varphi(x, y) = xe^{y} - e^{xy}$, тогда $\varphi_y{}'(x, y) = xe^{y} - xe^{xy} < 0$, так что $\varphi(x, y) < \varphi(x, 0) = x - 1$. Если $\varphi(x, y) \le 0$, то $\ln x > y\varphi(xy)$. Тогда $\varphi(x, y) = e^{y}\left(x - e^{(x-1)y}\right) > 0$ и $(x-1)y < \ln x$, то есть снова $\ln x > (x-1)y > y\varphi(x, y)$.

48. Решить уравнение $\int\limits_0^1 f(tx)dt = nf(x)$.

Решение. Имеем: $\int\limits_0^1 f(tx)dt = \left| \begin{array}{l} tx = z \\ dt = \dfrac{dz}{x} \end{array} \right| = \int\limits_0^x f(z)\dfrac{dz}{x}$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\int\limits_0^x f(z)dz = nxf(x)$.

Дифференцируя обе части последнего равенства по x, получим

$f(x) = nf(x) + nxf'(x)$, откуда $f(x) = cx^{\frac{1-n}{n}}$.

49. Решить уравнение $y'\cos y = x - \sin y$.

Решение. Обозначим $\sin y = z$. Тогда исходное уравнение примет вид : $z' - x = z$. Откуда $z = \left(xe^{x} - e^{x} + c\right)e^{-x}$, откуда $\sin y = x - 1 + ce^{-x}$.

50. Доказать, что уравнение $y' + py = q(x)$, где $p \ne 0 -$ постоянная, а $q(x) -$ периодическая с периодом T функция, имеет одно периодическое решение (с тем же периодом).

Решение. Очевидно, общее решение уравнения имеет вид

$y(x) = \left(C + \int\limits_0^x q(t)e^{pt}dt \right)e^{-px}$. Чтобы решение было периодическим,

необходимо, чтобы для любого x выполнялось:

$$\left(C+\int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-p(x+T)}=\left(C+\int_0^{x} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}$$, или

$$\left(C+\int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-pT}= C+\int_0^{x} q(t)e^{pt}dt$$. (*) Так как

$q(x)-$периодическая функция, то $\int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt=$

$$\int_0^{T} q(t)e^{pt}dt+\int_T^{x+T} q(t)e^{pt}dt=\left|t=z+T\right|=$$

$$=\int_0^{T} q(t)e^{pt}dt+\int_0^{x} q(z+T)e^{p(z+T)}dz=\int_0^{T} q(t)e^{pt}dt+e^{pT}\int_0^{x} q(z)e^{pz}dz$$ и

равенство (*) примет вид $\left(C+\int_0^{T} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}=C$. Откуда $C=$

$\dfrac{e^{-pt}}{1-e^{-pt}}\int_0^{T} q(t)e^{pt}dt$. При таком значении постоянной C решение $y(x)$ дифференциального уравнения будет единственным и периодическим с периодом T.

51. Поверхность $z(x,y)$, у которой средняя кривизна равна нулю, называется минимальной. Известно, что координаты точек таких поверхностей удовлетворяют уравнению:

$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0$, где $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$,

$s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$. Найти минимальные поверхности вращения.

Решение. Известно, что поверхность вращения имеет уравнение вида: $z(x,y)=f(x^2+y^2)$. Обозначив $x^2+y^2=r^2$, имеем $z=f(r^2)$

и $p=\dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2x$, $q=\dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2y$, $r=2\dfrac{dz}{d(r^2)}+\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4x^2$,

$$s=\frac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4xy\,,\qquad t=2\frac{dz}{d(r^2)}+\frac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4y^2\,.$$

Подставляя p, q, r, s, t в исходное уравнение, получим: $4\dfrac{dz}{d(r^2)}$ +

$4\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot r^2+\left(\dfrac{dz}{d(r^2)}\right)^2\cdot r^2=0$. (*) Но так как $\dfrac{dz}{d(r^2)}=\dfrac{1}{2r}\dfrac{dz}{dr}$,

$\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}=\dfrac{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}}{4r^2}$, то (*) принимает вид: $\dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr}+\dfrac{d^2z}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{dz}{dr}\right)^2=0$.

Решая это уравнение, получим функции, задающие искомые поверхности: $z(x,y)=c_1\ln(r+\sqrt{r^2-c_1{}^2})+c_2$.

52. Известно, что $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+tg^2 x$. Найти $f(x)$ при $0<x<1$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x=y$. Тогда

$$f'(y)=1-2y-\frac{y}{1-y}=-2y+\frac{1}{1-y}\,,$$

$$f(y)=\int\left(-2y+\frac{1}{1-y}\right)dy=-y^2-\ln(1-y)+c\,,$$

$$f(x)=-(x^2+\ln(1-x))+c \quad \text{при } 0<x<1.$$

53. Доказать, что краевая задача $\begin{cases} y''=e^x y, & x\in(0,1) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ не имеет другого решения, кроме $y(x)\equiv 0$.

Решение. Если $y(x)\neq 0$, то либо при некотором $x_1\in(0,1)$ $\max\limits_{x\in(0,1)} y(x)=y(x_1)>0$ и тогда $y''(x)\le 0$ (*), либо при некотором

$x_2 \in (0,1)$ $\min\limits_{x\in(0,1)} y(x) = y(x_2) < 0$, и тогда $y''(x) \geq 0$ (**). Но в силу исследуемого уравнения должно быть $y''(x_1) = e^{x_1} y(x_1) > 0$, $y''(x_2) = e^{x_2} y(x_2) < 0$, что противоречит неравенствам (*) и (**).

Литература

1. Садовничий В. А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Наука, 1978.
2. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике: Т.1, 2, 3. – М.: ОГИЗ, 1947.
3. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. – М.: ИЛ, 1963.
4. Тоноян Г. А., Сергеев В. Н. Студенческие математические олимпиады. – Ереван: ЕГУ,1985.
5. Сергеев В. Н. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. – Омск: ОПИ, 1975.
6. Шубин М. А. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ,1975.
7. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ,1987.
8. Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly» : Сборник. Пер.с англ. / Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Учебное издание

ШАХМАТОВ Валерий Михайлович

ЛИСОК Александр Леонидович

ТАРБОКОВА Татьяна Васильевна

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Научный редактор

доктор наук, профессор К. П. Арефьев

Редактор Н. Я. Горбунова

Вёрстка В. М. Шахматова

Подписано к печати 00. 00. 2009

Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка»

Печать XEROX Усл. печ. л. 0.0. Уч.-изд. л. 0,00.

Заказ 000. Тираж 300 экз.

Для заметок