

На правах рукописи

Сергеева Екатерина Евгеньевна

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ОБНАРУЖЕНИЯ
МОМЕНТА РАЗЛАДКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА С УСЛОВНОЙ
НЕОДНОРОДНОСТЬЮ**

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Томск – 2012

Работа выполнена в ГОУ ВПО "Национальный исследовательский Томский государственный университет" на кафедре высшей математики и математического моделирования

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Воробейчиков Сергей Эрикович

Официальные оппоненты:

Кошкин Геннадий Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра теоретической кибернетики
Томского государственного университета, профессор

Якупов Рафаэль Тимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математики филиала Кемеровского
государственного университета в г. Анжеро - Судженск,
заведующий кафедрой

Ведущая организация:

ГОУ ВПО "Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники" , г. Томск

Защита состоится: 16 мая 2012 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при ГОУ ВПО "НИ Томский государственный университет" по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, 2-ой уч. корп., ауд. 212 "б".

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34 а.

Автореферат разослан: 13 апреля 2012г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент

П.Ф. Тарасенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Задачи обнаружения момента изменения статистических свойств наблюдаемого процесса (момента разладки) возникают при обработке телеметрических данных, в задачах технической диагностики, в задачах распознавания образов, при использовании алгоритмов контроля за состоянием системы управления (например, для обнаружения разладки в датчиках). Процессы авторегрессионного типа с условной неоднородностью, а именно процессы AR/ARCH и GARCH, позволяют адекватно описывать многие явления. Основное отличие данных процессов состоит в различии между условными и безусловными моментами второго порядка. Условные моменты данных процессов зависят от прошлых состояний.

В настоящее время задача построения последовательных процедур обнаружения моментов разладки процессов AR/ARCH и GARCH остается актуальной, о чем свидетельствует большое количество работ в данной области. Для нахождения момента разладки используются различные модификации метода наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, робастные методы оценивания, численные методы. Существуют методы, позволяющие обнаруживать как одно, так и несколько изменений параметров процесса. Свойства оценок момента разладки, получаемых при использовании известных методов обнаружения, изучаются в асимптотике, при этом не проводится теоретического исследования характеристик процедур - вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия. Однако, на практике время наблюдения системы всегда конечно, поэтому важной является проблема исследования качества используемых процедур при неасимптотической постановке задачи. Представляет интерес разработка алгоритмов, обеспечивающих заданную вероятность принятия верного решения по конечному объему выборки.

Целями настоящей работы являются:

- построение последовательных процедур оценивания неизвестных параметров процессов AR/ARCH и GARCH с заданной среднеквадратической точностью;
- построение последовательных процедур обнаружения момента разладки процессов AR/ARCH и GARCH, обеспечивающих заданные вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия;

- проведение численного моделирования, с целью подтверждения работоспособности построенных процедур.

Для достижения вышеуказанных целей были **поставлены и решены следующие задачи:**

- формализация и решение задач построения последовательных процедур гарантированного оценивания неизвестных параметров процессов AR/ARCH и GARCH;

- построение процедур обнаружения разладки процессов AR/ARCH и GARCH и нахождение верхних границ для характеристик процедур - вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия;

- исследование статистических свойств построенных оценок, таких как среднеквадратическая точность оценки и асимптотическое распределение отклонения оценки от истинного значения параметров;

- доказательство работоспособности разработанных методов и процедур посредством обработки информации, получаемой в результате вычислительных экспериментов.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы системного анализа, теории управления, теории вероятностей, теории случайных процессов, теории аналитических функций, теории матриц, методы обработки информации и имитационного моделирования.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- разработана последовательная процедура гарантированного оценивания неизвестных авторегрессионных параметров процесса $AR(p)/ARCH(q)$, основанная на модифицированном взвешенном методе наименьших квадратов, в предположении, что все параметры процесса являются неизвестными. Предложенная процедура отличается от известных тем, что позволяет строить оценки неизвестных авторегрессионных параметров процесса с любой заданной среднеквадратической точностью;

- построена процедура обнаружения момента изменения параметров процесса $AR(p)/ARCH(q)$. Предложенная процедура отличается от известных тем, что решает задачу обнаружения в предположении, что все параметры процесса являются неизвестными как до, так и после момента разладки. Построенная процедура позволяет обеспечить заданные вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия, что не удается обеспечить для известных

процедур обнаружения;

- разработана последовательная процедура гарантированного оценивания неизвестных параметров процесса $GARCH(p,q)$, основанная на модифицированном взвешенном методе наименьших квадратов. Предложенная процедура отличается от известных тем, что позволяет строить оценки неизвестных параметров процесса $GARCH(p,q)$ с любой заданной среднеквадратической точностью;

- построена процедура обнаружения момента изменения параметров процесса $GARCH(p,q)$. Построенная процедура отличается от известных тем, что позволяет обеспечить заданные вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия, что не удается обеспечить для известных процедур обнаружения;

- разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, реализующий методы обработки информации.

Теоретическая значимость диссертационного исследования состоит в том, что впервые разработаны процедуры обнаружения момента разладки процессов авторегрессионного типа с условной неоднородностью, а именно $AR/ARCH$ и $GARCH$, в предположении, что параметры рассматриваемых процессов являются неизвестными как до, так и после момента разладки. Построенные процедуры позволяют таким образом выбирать параметры процедуры, чтобы обеспечивать заданные вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия, что не удается обеспечить для известных процедур обнаружения.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут применяться при обработке информации в таких областях, как геофизика, медицинская и техническая диагностика, а также при управлении технологическими процессами и при анализе сигналов. Рассматриваемые в работе модели $AR/ARCH$ и $GARCH$ являются наиболее часто используемыми для описания эконометрических данных. Полученные в работе результаты могут использоваться при обработке информации, получаемой на рынке инвестиций, управлении финансовыми рисками и формировании портфеля инвестиций. Кроме того, полученные теоретические результаты могут быть использованы в соответствующих курсах лекций на математических факультетах университетов.

Достоверность полученных результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое доказательство. Качество

построенных процедур подтверждено проведенным имитационным моделированием.

Положения, выносимые на защиту.

1. Процедура последовательного гарантированного оценивания неизвестных авторегрессионных параметров процесса $AR(p)/ARCH(q)$, гарантирующая заданную среднеквадратическую точность получаемых оценок.

2. Процедура обнаружения момента изменения параметров процесса $AR(p)/ARCH(q)$, позволяющая обеспечивать заданные значения вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия.

3. Процедура последовательного гарантированного оценивания неизвестных параметров процесса $GARCH(p,q)$, гарантирующая заданную среднеквадратическую точность получаемых оценок.

4. Процедура обнаружения момента изменения параметров процесса $GARCH(p,q)$, позволяющая обеспечивать заданные значения вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия.

Реализация и внедрение результатов работы. Рассмотренные в диссертации процедуры оценивания и обнаружения моментов разладки процессов авторегрессионного типа с условной неоднородностью используются в учебном процессе факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета при выполнении курсовых и квалификационных работ.

Апробация работы. Работа выполнялась в рамках научно - исследовательской работы при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ № 09-01-00172, в рамках ФЦП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы", ГК №07.514.11.4069.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры высшей математики и математического моделирования ФПМК ТГУ, а также на следующих конференциях: X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи - Дагомыс, 2009 г.); XII Международном симпозиуме по непараметрическим методам в кибернетике и системному анализу (г. Красноярск, 2010г.); "The 6th international conference on electrical and control technologies"(г. Каунас, Литва, 2011г.); "The 11th international conference on pattern recognition

and information processing" (г. Минск, Беларусь, 2011г.); XII Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике (Казань, 2011г.).

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 5 печатных работах, в том числе 2 - в журналах из перечня ВАК.

Личный вклад. Основные научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Постановка задачи для каждого раздела была выполнена совместно с научным руководителем. В публикации [2] асимптотические результаты для построенной оценки неизвестных параметров процесса GARCH(p,q) были получены совместно с кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры вычислительной техники Томского политехнического университета Ю.Б. Буркатовской. Численные расчеты выполнялись автором самостоятельно, и программа имитационного моделирования разработана автором единолично.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 153 страницы, 35 рисунков, 18 таблиц, библиографический список включает 165 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы построения процедур обнаружения момента разладки, приводится обзор известных результатов, формулируются цели и задачи исследований, обозначены основные пункты научной новизны и практической значимости результатов исследований, представлена структура диссертации.

В первой главе рассматривается задача обнаружения момента разладки процесса AR(1)/ARCH(1) в предположении, что все параметры процесса являются неизвестными как до, так и после момента разладки. Рассмотрение данной задачи выделено в отдельную главу, так как исследуемый процесс записывается в скалярном виде, что позволяет получить желаемый результат при менее жестких требованиях, налагаемых на процесс. При исследовании асимптотических свойств оценки неизвестного авторегрессионного параметра процесса используется подход, отличающийся от подхода для процесса

AR(p)/ARCH(q) и позволяющий упростить анализ. **В первом разделе первой главы** приводится обзор известных процедур оценивания неизвестных параметров процессов авторегрессионного типа с условной неоднородностью.

Во втором разделе первой главы осуществляется постановка задачи. Предполагается, что случайный процесс x_n описывается уравнениями

$$x_{n+1} = \lambda x_n + \sigma_n \varepsilon_{n+1}, \quad \sigma_n = \sqrt{a + bx_n^2}, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - последовательность н.о.р.с.в. с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением, причем для некоторого N величина $E \left\{ \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \right)^{-1} \right\} < \infty$. Все параметры процесса являются неизвестными.

Процесс (1) является устойчивым при каждом наборе параметров. Предполагается, что значение авторегрессионного параметра λ изменяется в момент времени θ с λ_0 на λ_1 , причем $|\lambda_0 - \lambda_1|^2 \geq \Delta > 0$, где Δ является известным значением. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса x_n обнаружить момент разладки.

Для построения процедуры обнаружения разладки процесса необходимо построить статистику, поведение которой после разладки существенно изменится. Предлагается строить процедуру обнаружения с использованием последовательных оценок с гарантированной точностью неизвестного авторегрессионного параметра процесса. Это позволяет определять характеристики процедуры - вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия.

В третьем разделе первой главы предлагается последовательная процедура оценивания, основанная на модифицированном взвешенном методе наименьших квадратов со специальным образом подобранными весами, гарантирующая заданную среднеквадратическую точность вычисляемой оценки. Оценка неизвестного авторегрессионного параметра процесса имеет вид

$$\lambda^*(H) = \frac{1}{H} \sum_{k=N+1}^{\tau(H)} v_k \frac{x_k}{m_k} \frac{x_{k+1}}{m_k}, \quad m_k = \max(1, |x_k|), \quad (2)$$

где случайный момент остановки при построении оценки определяется из условия

$$\tau = \tau(H) = \inf \left\{ l \geq n + 1 : \sum_{k=N+1}^l v_k \left(\frac{x_k}{m_k} \right)^2 \geq H \right\}. \quad (3)$$

Параметр процедуры оценивания H определяет точность получаемой оценки.

Весовые коэффициенты v_k выбираются в виде

$$v_k = \frac{1}{\Gamma_N}, \quad \Gamma_N = \sum_{k=N_0}^N \frac{\max(x_{k+1}^2, (x_{k+1} - x_k)^2)}{\min(1, x_k^2)} E \left(\sum_{k=N_0}^N \varepsilon_{k+1}^2 \right)^{-1}, \quad (4)$$

а последний весовой коэффициент v_τ находится из условия

$$\sum_{k=N+1}^{\tau} v_k \left(\frac{x_k}{m_k} \right)^2 = H. \quad (5)$$

Свойства построенной оценки формулируются и доказываются в следующих теоремах.

Теорема 1.1 *Для любого $H > 0$ момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица, и среднеквадратическое отклонение оценки $\lambda^*(H)$ от истинного значения параметра λ оценивается сверху величиной*

$$E \{ \lambda^*(H) - \lambda \}^2 \leq \frac{1}{H}. \quad (6)$$

Теорема 1.1 устанавливает свойство гарантированности построенной оценки в среднеквадратическом смысле.

Теорема 1.2 *Если процесс (1) является устойчивым, случайные величины ε_n имеют плотность f , такую, что выполняется $E \{ \ln(b \varepsilon_t^2) \} < 0$, $|\lambda| < 1$, $E\varepsilon_n^4 = C < \infty$, то для достаточно больших H*

$$P\{ |\lambda^*(H) - \lambda|^2 > x \} \leq 2 \left\{ 1 - \Phi \left(\sqrt{xH} \right) \right\}. \quad (7)$$

В четвертом разделе первой главы предлагается последовательная процедура обнаружения разладки процесса (1). Процедура обнаружения состоит в следующем: на первом этапе определяются интервалы $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$, $i \geq 1$. На каждом из этих интервалов строится оценка $\lambda_i^*(H)$ (2) процесса (1). На втором этапе составляется статистика J_i , соответствующая интервалу $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$, для $i > m$

$$J_i = (\lambda_i^*(H) - \lambda_{i-m}^*(H))^2. \quad (8)$$

Эта статистика характеризует квадрат отклонения оценок с номерами i и $i - m$. На третьем этапе задается пороговое значение $\delta : 0 < \delta < \Delta$ и решение о наличии разладки принимается при превышении статистикой J_i порогового

значения δ . Если $J_i > \delta$ и принимается решение о наличии разладки, а при этом $\tau_i < \theta$, то имеет место ложная тревога. Если $J_i > \delta$ и принимается решение о наличии разладки, а при этом $\tau_{i-m} < \theta < \tau_{i-1}$, то имеет место запаздывание в обнаружении.

Верхние границы для характеристик процедуры обнаружения - вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия при неасимптотической постановке задачи формулируются и доказываются в теореме 1.3, при асимптотической - в теореме 1.4.

Теорема 1.3 Пусть $0 < \delta < \Delta$, тогда вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ на любом интервале наблюдений $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$ ограничены сверху величинами

$$P_0 = P_0(H, \delta) \leq \frac{4}{H\delta}, \quad P_1 = P_1(H, \delta) \leq \frac{4}{H(\sqrt{\delta} - \sqrt{\Delta})^2}. \quad (9)$$

Оценки сверху для вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия (9) были получены при помощи неравенства Чебышева. Так как неравенство Чебышева является довольно общим, то полученные оценки оказываются достаточно грубыми. Более точные, асимптотические оценки для вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия можно получить, используя неравенство (7), доказанное в теореме 1.2.

Теорема 1.4 Пусть $0 < \delta < \Delta$ и выполнены условия Теоремы 1.2. Для достаточно больших H вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ ограничены сверху величинами

$$P_0(H, \delta) \leq 4 \left(1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\delta H}{2}} \right) \right),$$

$$P_1(H, \delta) \leq 4 \left(1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2 H}{2}} \right) \right), \quad (10)$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения.

В пятом разделе первой главы представлены результаты моделирования процедур оценивания неизвестного авторегрессионного параметра процесса AR(1)/ARCH(1) и обнаружения момента разладки данного процесса. Моделировался случайный процесс AR(1)/ARCH(1) следующего вида

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \sqrt{a + bx_{n-1}^2} \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

шумы $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - гауссовские с нулевым средним и единичной дисперсией. Моделировалось тысяча реализаций процесса, длина реализации - 10000 значений, момент разладки $\theta = 5000$. Результаты моделирования приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Характеристики процедуры обнаружения разладки.

	$\hat{\theta}$	P_{0p}	P_{0A}	P_{0C}	\hat{T}_0	P_{1p}	P_{1A}	P_{1C}	\hat{T}_1
$H = 150$ $\delta = 0.03$	5154	0.051	0.267	0.88	7585	0.001	0.009	0.25	446
$H = 150$ $\delta = 0.06$	5248	0.007	0.067	0.444	56442	0.006	0.054	0.41	483
$H = 150$ $\delta = 0.1$	5326	0.0008	0.012	0.267	777444	0.02	0.222	0.79	493
$H = 200$ $\delta = 0.1$	5555	0.0005	0.003	0.2	914455	0.009	0.132	0.59	643

Здесь $\hat{\theta}$ - среднее значение момента разладки, \hat{T}_0 - среднее время между ложными тревогами, \hat{T}_1 - среднее время запаздывания в обнаружении разладки; P_{0A} , P_{0C} и P_{0p} - вероятности ложной тревоги, полученные из соотношений (10), (9) и в результате моделирования соответственно. Соответствующие вероятности ложного спокойствия обозначены через P_{1A} , P_{1C} и P_{1p} .

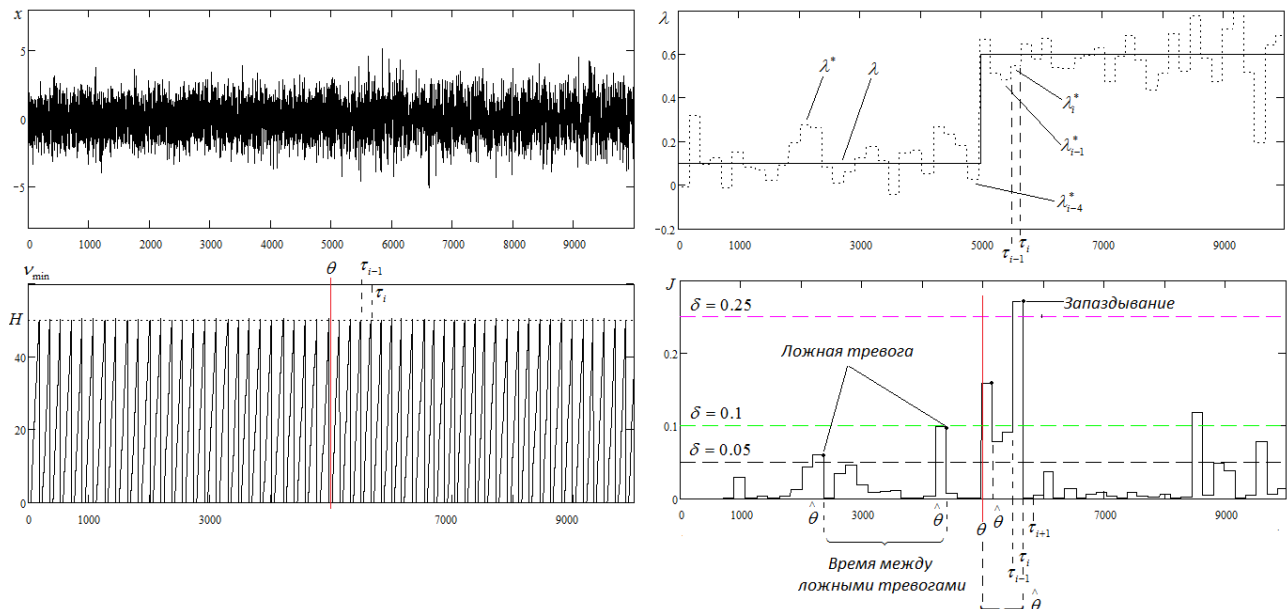


Рисунок 1 - Процедура обнаружения момента разладки процесса AR(1)/ARCH(1)

На рисунке 1 приведена иллюстрация работы процедуры обнаружения. В верхнем левом углу изображена реализация моделируемого процесса, момент

разладки $\theta = 5000$. Ниже изображена последовательность моментов остановки для построения оценки неизвестного авторегрессионного параметра с гарантированной точностью. В верхнем правом углу приведена последовательность построенных оценок с гарантированным качеством. Ниже представлена схема принятия решения о наличии разладки.

Во второй главе рассматривается задача обнаружения момента разладки процесса $AR(p)/ARCH(q)$. **В первом разделе второй главы** формулируются основные цели и приводятся основные этапы исследования процесса $AR(p)/ARCH(q)$. **Во втором разделе второй главы** осуществляется постановка задачи. Случайный процесс x_n описывается уравнениями

$$x_{n+1} = \lambda_1 x_n + \lambda_2 x_{n-1} + \dots + \lambda_p x_{n-p+1} + \sigma_n \varepsilon_{n+1}. \quad (12)$$

Условная вариация процесса x_n представляет собой случайный процесс вида

$$\sigma_n = \sqrt{a + b_1 x_n^2 + b_2 x_{n-1}^2 + \dots + b_q x_{n-q+1}^2}.$$

$\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - последовательность н.о.р.с.в. с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением, причем для некоторого N величина

$$E \left\{ \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \right)^{-1} \right\} < \infty. \text{ Предполагается, что все параметры процесса являются неизвестными, а сам процесс является устойчивым при каждом наборе параметров. Вектор авторегрессионных параметров } \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]^T \text{ изменяет свое значение в момент времени } \theta \text{ с } \Lambda_0 \text{ на } \Lambda_1 \text{ не менее, чем на заданную величину, т.е. } |\Lambda_0 - \Lambda_1|^2 \geq \Delta > 0. \text{ Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса } x_n \text{ обнаружить момент разладки.}$$

Процедура обнаружения разладки строится с использованием последовательных оценок с гарантированной точностью вектора неизвестных параметров Λ .

В третьем разделе второй главы предлагается последовательная процедура оценивания, гарантирующая заданную среднеквадратическую точность вычисляемой оценки. Оценка Λ^* вектора неизвестных параметров:

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{k=N+1}^{\tau} Y_{k+1} v_k Z_k^T \right) A^{-1}(\tau), \quad A(\tau) = \sum_{k=N+1}^{\tau} v_k Z_k Z_k^T, \quad (13)$$

где

$$m_n = \max(1, |x_n|, \dots, |x_{n-q+1}|), \quad Y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{m_n}, \quad Z_n = \left(\frac{x_n}{m_n}, \frac{x_{n-1}}{m_n}, \dots, \frac{x_{n-p+1}}{m_n} \right)^T.$$

Случайный момент остановки $\tau(H)$, где H - параметр процедуры оценивания, определяющий точность оценки, вычисляется следующим образом

$$\tau = \tau(H) = \inf\{k > N + 1 : \nu_{\min}(k) \geq H\}. \quad (14)$$

Весовые функции v_k на интервале $k \in [N + 1, N + 1 + \sigma - 1]$ задаются:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_N Z_k^T Z_k}},$$

$$\Gamma_N = \sum_{k=N_0}^N \frac{(|x_{k+1}| + |x_k| + \dots + |x_{k-p+1}|)^2}{\min(1, x_k^2, \dots, x_{k-q+1}^2)} E \left\{ \left(\sum_{k=N_0}^N \varepsilon_{k+1}^2 \right)^{-1} \right\},$$

σ - наименьшее число наблюдений, для которых матрица $A(N + 1 + \sigma)$ невырождена. Специальные неотрицательные весовые функции v_k на интервале $k \in [N + 1 + \sigma, \tau - 1]$ находятся из условий

$$\frac{\nu_{\min}(k)}{\Gamma_N} = \sum_{l=N+\sigma+1}^k v_l^2 Z_l^T Z_l, \quad (15)$$

$\nu_{\min}(k)$ - минимальное собственное значение $A(k)$.

Последняя весовая функция v_τ выбирается из условий:

$$\frac{\nu_{\min}(\tau)}{\Gamma_N} \geq \sum_{l=N+1+\sigma}^{\tau} v_l^2 Z_l^T Z_l, \quad \nu_{\min}(\tau) = H. \quad (16)$$

Свойства построенной оценки формулируются и доказываются в следующих теоремах.

Теорема 2.1 *Для любого $H > 0$ момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица, и квадрат нормы отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству*

$$E|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 \leq \frac{H + p - 1}{H^2}. \quad (17)$$

В теореме 2.1 устанавливается свойство гарантированности построенной оценки в среднеквадратическом смысле.

Теорема 2.2 *Пусть плотность распределения величин $\{\varepsilon_l\}$ такова, что $E \left\{ \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_l^2 \right)^{-1} \right\} < \infty$, $E(\varepsilon_k^2 - 1)^4 < \infty$. Тогда для достаточно больших значений параметра процедуры $H > 0$ вероятность отклонения оценки*

$\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$P \left\{ |\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 > \delta \right\} \leq 1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{H + p - 1}} \right) - 1 \right)^p, \quad (18)$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного одномерного нормального распределения.

В четвертом разделе второй главы предлагается последовательная процедура обнаружения разладки процесса (12). Процедура обнаружения строится аналогично процедуре, рассмотренной в первой главе, и основывается на тестовой статистике вида

$$J_i = (\Lambda_i^*(H) - \Lambda_{i-m}^*(H))^T (\Lambda_i^*(H) - \Lambda_{i-m}^*(H)), \quad (19)$$

которая определяет квадрат нормы отклонения оценок с номерами i и $i - m$.

Верхние границы для характеристик процедуры обнаружения - вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия при неасимптотической постановке задачи формулируются и доказываются в теореме 2.3, при асимптотической - в теореме 2.4.

Теорема 2.3 Пусть $0 < \delta < \Delta$, тогда вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ на любом интервале наблюдений $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$ ограничены сверху величинами

$$P_0(H, \delta) \leq \frac{4(H + p - 1)}{H^2 \delta}, \quad P_1(H, \delta) \leq \frac{4(H + p - 1)}{H^2 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}. \quad (20)$$

Теорема 2.4 Пусть $0 < \delta < \Delta$ и выполнены условия Теоремы 2.2. Для больших значений параметра H вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ удовлетворяют неравенствам

$$P_0(H, \delta) \leq 2 \left(1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{2(H + p - 1)}} \right) - 1 \right)^p \right),$$

$$P_1(H, \delta) \leq 2 \left(1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2 H^2}{2(H + p - 1)}} \right) - 1 \right)^p \right), \quad (21)$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного одномерного нормального распределения.

В пятом разделе второй главы представлены результаты моделирования процедур оценивания неизвестных авторегрессионных параметров процесса AR(2)/ARCH(2) и обнаружения момента разладки данного процесса. Моделировался случайный процесс AR(2)/ARCH(2) следующего вида

$$x_n = \lambda_1 x_{n-1} + \lambda_2 x_{n-2} + \sqrt{a + b_1 x_{n-1}^2 + b_2 x_{n-2}^2} \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

шумы $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - гауссовские с нулевым средним и единичной дисперсией. Моделировалось 1000 реализаций процесса, длина каждой 10000 значений, момент разладки $\theta = 5000$. Результаты моделирования приведены в таблице 2, где $\hat{\theta}$ обозначено среднее значение момента разладки, P_0A , P_0C и P_0p - вероятности ложной тревоги, полученные из соотношений (21), (20) и в результате моделирования соответственно. Соответствующие вероятности ложного спокойствия обозначены через P_1A , P_1C и P_1p .

Таблица 2 - Характеристики процедуры обнаружения разладки.

	$\hat{\theta}$	P_0p	P_0A	P_0C	\hat{T}_0	P_1p	P_1A	P_1C	\hat{T}_1
$H = 160$ $\delta = 0.053$	6130	0.017	0.157	0.475	58244	0.009	0.206	0.534	1710
$H = 200$ $\delta = 0.053$	6397	0.006	0.085	0.379	171541	0	0.12	0.427	2177
$H = 240$ $\delta = 0.053$	6438	0	0.047	0.316	1000000	0	0.07	0.355	2674
$H = 240$ $\delta = 0.04$	6266	0.004	0.113	0.418	309778	0	0.027	0.274	2652

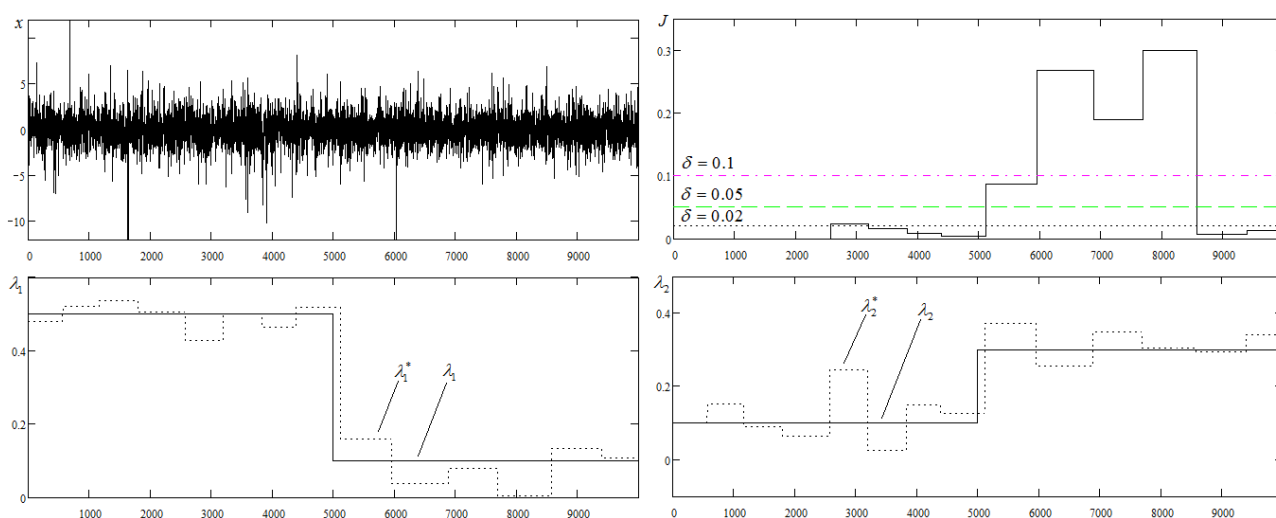


Рисунок 2 - Процедура обнаружения момента разладки процесса AR(2)/ARCH(2)

На рисунке 2 приведена иллюстрация работы процедуры обнаружения момента разладки процесса AR(2)/ARCH(2). В верхнем левом углу изображена

реализация моделируемого процесса, момент разладки $\theta = 5000$. В верхнем правом углу приведена схема принятия решения о наличии разладки. В нижней части рисунка изображена последовательность оценок неизвестных авторегрессионных параметров процесса с гарантированным качеством.

В третьей главе рассматривается задача обнаружения момента разладки процесса GARCH(p,q). **В первом разделе третьей главы** приводится обзор существующих методов оценивания неизвестных параметров процесса GARCH(p,q). **Во втором разделе третьей главы** осуществляется постановка задачи. Рассматривается устойчивый случайный процесс GARCH(p,q)

$$\begin{aligned} x_n &= \sigma_n \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \sigma_n^2 &= a + \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{n-i}^2 + \sum_{i=1}^q \mu_i \sigma_{n-i}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

где $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - последовательность н.о.р.с.в. с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением, причем для некоторого N выполняется $E \left\{ \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_l^2 \right)^{-2} \right\} < \infty$. Параметры $\{a, \lambda_i\}$ предполагаются неизвестными, а параметры μ_j - известными, причем параметры процесса удовлетворяют условиям:

$$a > 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q, \quad 0 < \sum_{i=1}^p \lambda_i + \sum_{j=1}^q \mu_j < 1. \quad (24)$$

Вектор параметров $\Lambda = [a, \lambda_1, \dots, \lambda_p]$ меняет свое значение с Λ_0 на Λ_1 в неизвестный момент времени θ и выполняется условие $|\Lambda_0 - \Lambda_1|^2 \geq \Delta > 0$. Требуется по наблюдениям за процессом x_n обнаружить момент разладки.

Процедура обнаружения разладки строится с использованием последовательных оценок с гарантированной точностью вектора неизвестных параметров Λ .

В третьем разделе третьей главы предлагается последовательная процедура оценивания неизвестного вектора параметров процесса. Оценка Λ^* вектора неизвестных параметров процесса имеет вид

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{k=N+1}^{\tau} v_k y_k U_k^T \right) A^{-1}(\tau); \quad A(\tau) = \sum_{k=N+1}^{\tau} v_k U_k U_k^T. \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
m_n &= \max \{F_0(n, \mu, x), \dots, F_p(n, \mu, x)\}; \quad B^2 = E(\varepsilon_n^2 - 1)^2; \quad y_n = \frac{x_n^2}{m_n}, \\
u_{n,i} &= \frac{F_i(n, \mu, x)}{m_n}, \quad 0 \leq i \leq p; \quad U_n = [u_{n,0}, \dots, u_{n,p}]^T, \quad \Lambda = [a, \lambda_1, \dots, \lambda_p]; \\
F_0(n, \mu, x) &= 1 + \sum_{j=1}^q \mu_j F_0(n-j, \mu, x); \\
F_i(n, \mu, x) &= x_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \mu_j F_i(n-j, \mu, x), \quad i = \overline{1, p}; \\
F(n_0 - j, \mu, x) &= [1, x_{n_0-1-j}^2, \dots, x_{n_0-p-j}^2], \quad j = \overline{0, q-1}.
\end{aligned}$$

Момент остановки $\tau(H)$ для фиксированного значения параметра процедуры оценивания $H > 0$, определяющего точность получаемой оценки, задается следующим образом

$$\tau = \tau(H) = \inf \{k > N + 1 : \nu_{\min}(k) \geq H\}. \quad (26)$$

Здесь $\nu_{\min}(k)$ – минимальное собственное значение матрицы $A(k)$. Положительные весовые функции v_k на интервале $[N + 1, N + \sigma - 1]$, σ – наименьшее значение k для которого $A(k)$ не вырождена, задаются следующим образом

$$\begin{aligned}
v_k &= \frac{1}{\sqrt{\Gamma_N U_k^T U_k}}, \\
\Gamma_N &= B^2 E \left\{ \left(\sum_{l=N_0}^N \varepsilon_l^2 \right)^{-2} \right\} \left(\sum_{l=N_0}^N \frac{x_n^2}{\min \{F_0(n, \mu, x), \dots, F_p(n, \mu, x)\}} \right)^2.
\end{aligned} \quad (27)$$

Веса v_k на интервале $[N + \sigma, \tau - 1]$ находятся из условий

$$\frac{\nu_{\min}(k)}{\Gamma_N} = \sum_{n=N+\sigma}^k v_n^2 U_n^T U_n. \quad (28)$$

Последняя весовая функция v_τ находится из условий

$$\frac{\nu_{\min}(\tau)}{\Gamma_N} \geq \sum_{n=N+\sigma}^{\tau} v_n^2 U_n^T U_n, \quad \nu_{\min}(\tau) = H. \quad (29)$$

Свойства построенной оценки формулируются и доказываются в следующих теоремах.

Теорема 3.1 *Для любого значения параметра процедуры $H > 0$ момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица, и средний*

квадрат нормы отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$E |\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 \leq \frac{H + p}{H^2}. \quad (30)$$

Теорема 3.1 устанавливает свойство гарантированности построенной оценки в среднеквадратическом смысле.

Теорема 3.2 Пусть плотность распределения величин $\{\varepsilon_l\}$ такова, что $E \left\{ \left(\sum_{l=1}^N \varepsilon_l^2 \right)^{-2} \right\} < \infty$, $E (\varepsilon_k^2 - 1)^4 < \infty$. Тогда для достаточно больших значений параметра процедуры $H > 0$ вероятность отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$P \left\{ |\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 > \delta \right\} \leq 1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{H + p}} \right) - 1 \right)^{p+1}, \quad (31)$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного одномерного нормального распределения.

В четвертом разделе третьей главы предлагается последовательная процедура обнаружения разладки процесса (23). Процедура обнаружения строится аналогично процедуре, рассмотренной во второй главе, и использует тестовую статистику, которая определяет квадрат нормы отклонения оценок с номерами i и $i - m$.

Верхние границы для характеристик процедуры обнаружения - вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия при неасимптотической постановке задачи формулируются и доказываются в теореме 3.3, при асимптотической в теореме 3.4.

Теорема 3.3 Пусть $0 < \delta < \Delta$, тогда вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ на любом интервале наблюдений $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$ ограничены сверху величинами

$$P_0(H, \delta) \leq \frac{4(H + p)}{H^2 \delta}, \quad P_1(H, \delta) \leq \frac{4(H + p)}{H^2 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}. \quad (32)$$

Теорема 3.4 Пусть $0 < \delta < \Delta$ и выполнены условия теоремы 3.2. Для больших значений параметра H вероятность ложной тревоги $P_0(H, \delta)$ и вероятность ложного спокойствия $P_1(H, \delta)$ ограничены сверху величинами

$$P_0(H, \delta) \leq 2 \left(1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{2(H+p)}} \right) - 1 \right)^{p+1} \right),$$

$$P_1(H, \delta) \leq 2 \left(1 - \left(2\Phi \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2 H^2}{2(H+p)}} \right) - 1 \right)^{p+1} \right), \quad (33)$$

где $\Phi(x)$ - функция стандартного одномерного нормального распределения.

В пятом и шестом разделах третьей главы представлены результаты моделирования процедур оценивания неизвестных параметров процессов GARCH(1,1), GARCH(2,2) и обнаружения момента разладки данных процессов. Приведем результаты моделирования процесса GARCH(2,2). Моделировался случайный процесс следующего вида

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (34)$$

$$\sigma_n^2 = a + \lambda_1 x_{n-1}^2 + \lambda_2 x_{n-2}^2 + \mu_1 \sigma_{n-1}^2 + \mu_2 \sigma_{n-2}^2.$$

шумы $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ - гауссовские с нулевым средним и единичной дисперсией. Моделировалось 1000 реализаций процесса (34), длина каждой 20000, момент разладки $\theta = 10000$. Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Характеристики процедуры обнаружения разладки

	$\hat{\theta}$	P_{0p}	P_{0A}	P_{0C}	\hat{T}_0	P_{1p}	P_{1A}	P_{1C}	\hat{T}_1
$H = 120$ $\delta = 0.035$	10084	0.045	0.774	0.968	24294	0.023	0.774	0.968	1440
$H = 150$ $\delta = 0.035$	10783	0.02	0.578	0.772	66482	0	0.578	0.772	1599
$H = 180$ $\delta = 0.025$	11240	0.018	0.709	0.899	50380	0	0.238	0.481	2023
$H = 180$ $\delta = 0.035$	11680	0.014	0.43	0.642	114411	0	0.43	0.642	2052

В верхнем левом углу рисунка 3 изображена реализация моделируемого процесса GARCH(2,2), момент разладки $\theta = 10000$. В нижней части рисунка

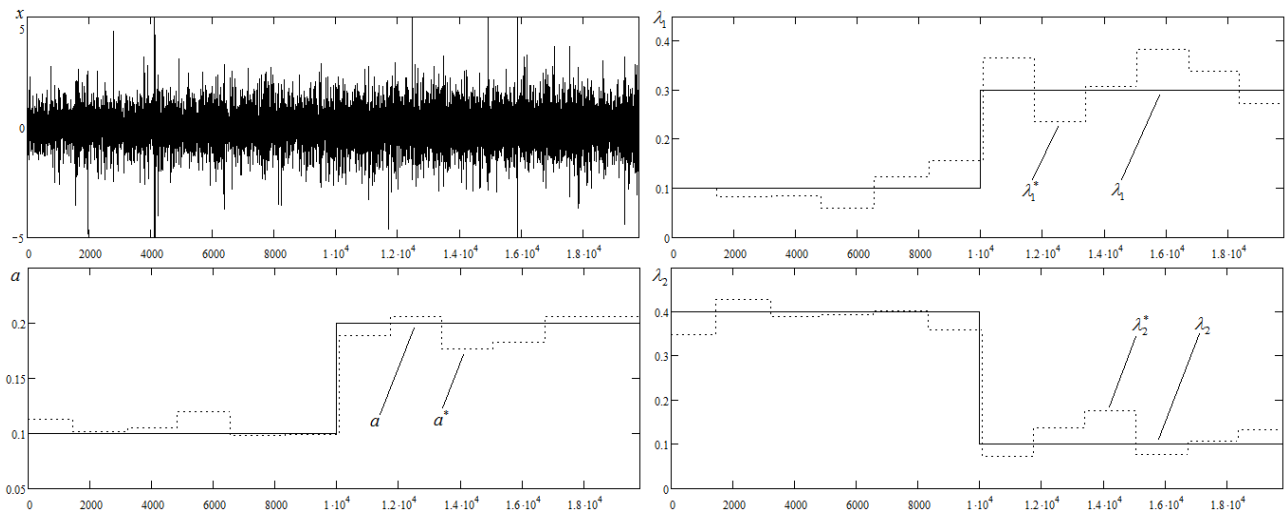


Рисунок 3 - Процедура обнаружения момента разладки процесса GARCH(2,2)

изображены последовательности оценок неизвестных авторегрессионных параметров процесса с гарантированным качеством.

Анализируя результаты моделирования процедур обнаружения моментов разладки процессов AR(1)/ARCH(1), AR(2)/ARCH(2) и GARCH(2,2), можно сделать следующие выводы: с ростом параметра H уменьшается ошибка оценивания, при этом увеличивается интервал оценивания; с ростом параметра процедуры δ уменьшается вероятность ложной тревоги, и увеличивается интервал между ложными тревогами, при этом увеличивается среднее время запаздывания; при фиксированном параметре δ с ростом H увеличивается среднее время запаздывания в обнаружении, и увеличивается время между ложными тревогами; во всех случаях полученные практические вероятностные характеристики процедуры обнаружения не превышают теоретических. Для проверки работоспособности предложенных в работе процедур обнаружения момента разладки процессов AR(2)/ARCH(2), GARCH(1,1) с неизвестными значениями параметров как до, так и после момента разладки с процедурами обнаружения разладки тех же процессов с известными параметрами. Для обоих процессов среднее время запаздывания в обнаружении, полученное при применении нашей процедуры обнаружения, больше среднего времени запаздывания, полученного для процессов с известными параметрами, и отличается примерно на среднюю длину интервала оценивания неизвестных параметров.

В заключении диссертации приведены основные результаты, которые изложены в пунктах научной новизны, теоретической значимости и практической ценности. **В приложении** представлен акт внедрения результатов исследований в учебный процесс.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Сергеева Е.Е. Гарантированная оценка параметров и обнаружение момента разладки GARCH(1,1) - процесса/ Е.Е. Сергеева, С.Э. Воробейчиков //Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника, информатика. – 2011. – № 3. – С. 31-42.

2. Буркатовская Ю.Б. Гарантированная оценка параметров и обнаружение момента разладки GARCH(p,q) - процесса/ Ю.Б. Буркатовская, Е.Е. Сергеева, С.Э. Воробейчиков //Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника, информатика. – 2012. – № 1. – С. 48-57.

3. Буркатовская Ю.Б. Обнаружение скачка параметров процесса ARCH(1)/ Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков, Е.Е. Сергеева Е.Е. //Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010 – Т. 17, Вып. 1. – С. 96-97.

4. Буркатовская Ю.Б. Гарантированная оценка авторегрессионных параметров процесса AR(p)/ARCH(q)/ Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков, Е.Е. Сергеева Е.Е. // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2011 – Т. 18, Вып. 3 – С. 481-482.

5. Sergeeva K. An efficient algorithm for detecting a change point of autoregressive parameters of AR(p)/ARCH(q) process/ K. Sergeeva, S. Vorobejchikov //Proceedings of the 11th International Conference of Pattern Recognition and Information Processing - Minsk, Belarus, May 18-20, 2011. - Belarus: Minsk. PRIP'2011. p.156-159