Тема: ***Функция нескольких переменных***

Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Предел и непрерывность ФНП

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.
Пусть $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$.
Функция $f: X \to U$ *называется* ***функцией n переменных***.

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и u.

Значение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$
записывают в виде

$$u = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \quad \text{или} \quad u\Big|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \ldots, x_n=x_{0n}}$$

Называют:

X – область определения функции (Обозначают: D(u)),

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – аргументы (независимые переменные),

U – область значений (Обозначают: E(u)),

u ($u \in U$) – зависимая переменная (функция).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФНП

1) словесный;
2) табличный;
3) аналитический:
   а) явное задание (т.е. формулой $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$)
   б) неявное задание (т.е. уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$).
4) Функцию $z = f(x,y)$ можно задать графически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** $z = f(x,y)$ *называется геометрическое место точек пространства с координатами* $(x; y; f(x,y))$, $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(z)$.

График функции $z = f(x,y)$ будем также называть «поверхностью $z = f(x,y)$ ».

Предел функции нескольких переменных

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(M)}$ ***при*** $\boldsymbol{M}$ ***стремящемся к*** $\boldsymbol{M_0}$ (пределом функции $f(M)$ в точке M_0), *если* $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ *такое, что*

если $M \in U^*(M_0, \delta)$, *то* $f(M) \in U(A, \varepsilon)$.

Записывают в общем случае: Для функции $z = f(x,y)$:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \qquad f(M) \to A, \text{ при } M \to M_0$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

$U^*(M_0, \delta)$ –проколотая δ -окрестность точки M_0(без самой точки M_0);

$U(A, \varepsilon)$ - ε-*окрестность точки* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$.

$U(M_0,\varepsilon)$ - множество точек $\mathbb{R}^n$, находящихся от M_0 на расстоянии меньшем ε.

При $n = 1$,

$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Ox \mid |M_0M| = |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

При $n = 2$,

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in xOy \mid |M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ – круг с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ и радиусом ε .

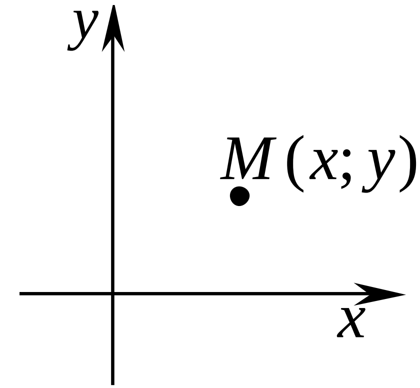
При $n = 3$,

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Oxyz \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – шар с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом ε .

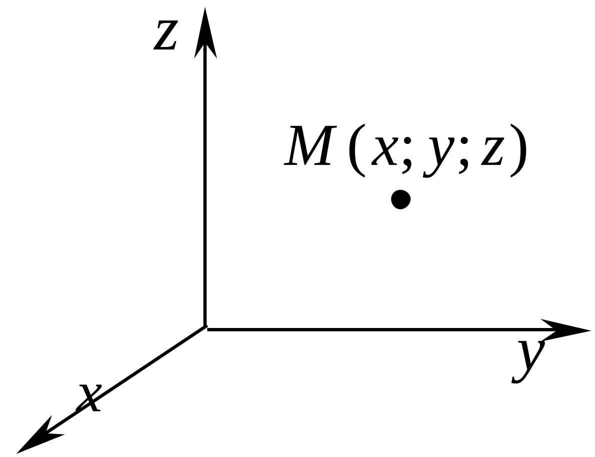
$\forall (x,y) \leftrightarrow M \in xOy$;

$\Rightarrow\ z = f(x,y) = f(M)$, где $M \in D \subseteq xOy$.



$\forall (x,y,z) \leftrightarrow M \in Oxyz$

$\Rightarrow\ u = f(x,y,z) = f(M)$, где $M \in D \subseteq Oxyz$.



По аналогии, последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать декартовыми координатами точки n-мерного пространства и рассматривать функцию n переменных как функцию точки этого пространства.

Обозначают:

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство,

$u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – функция n переменных.

Замечания.

1) Так как формально определение предела функции n переменных ничем не отличается от определения предела функции одной переменной, то **все утверждения, которые были получены о пределах функции одной переменной** и в которых не используется упорядоченность точек числовой прямой, **остаются верными и для предела функции n переменных.**
2) Определение бесконечно большой функции переносится на случай функции n переменных тоже дословно (сформулировать самостоятельно).

Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $f(M)$ называется* ***непрерывной в точке M_0*** *если справедливо равенство*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Справедливы утверждения:

1) арифметические операции над непрерывными в точке M_0 функциями приводят к непрерывным в этой точке функциям (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в ноль);
2) сложная функция, составленная из нескольких непрерывных функций, тоже будет непрерывной.

Если функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой M_0), но не является в этой точке непрерывной, то ее называют ***разрывной в точке*** M_0, а саму точку M_0 – ***точкой разрыва***.

Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – открытая область.

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$.

Придадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизмененным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x,y_0)\in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x,y_0) - f(x_0,y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x,y)$ ***по x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$.***

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x},\quad z'_x(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad f'_x(x_0,y_0)$$

или

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x},\quad z'_x(M_0),\qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x},\quad f'_x(M_0)$$

***Замечания*.**

1) Обозначения

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0,y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие

$$(x_0; y_0) \to f'_x(x_0; y_0) \quad (\text{и} \quad (x_0; y_0) \to f'_y(x_0; y_0) \quad)$$

является функцией, определенной на $D_1(D_2) \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной*** x (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f'_y(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad f'_y(M) \right).$$

Операция нахождения для функции $z = f(x,y)$ ее частных производных $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$

называется ***дифференцированием функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной*** x ***и*** y соответственно.

Фактически, $f'_x(x,y)$ $\left(f'_y(x,y) \right)$ – это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой. При этом, одна из переменных считается константой.

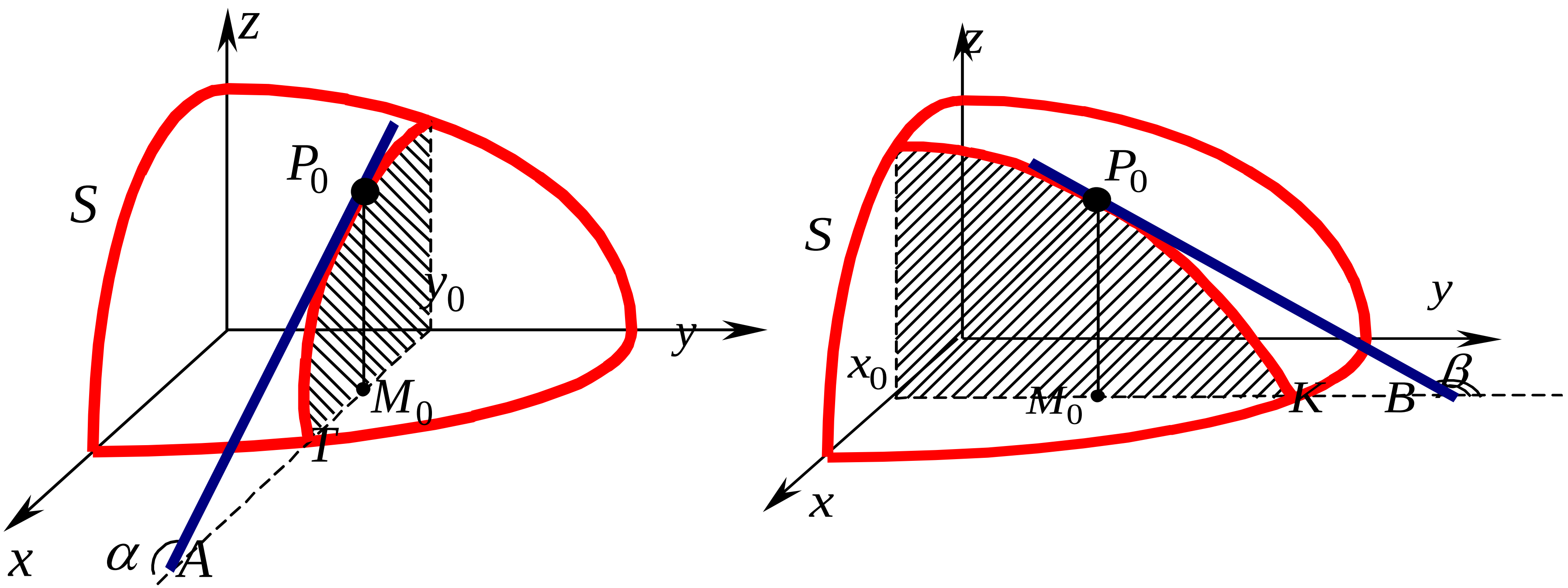
ПРИМЕР. Найти частные производные по x и по y функции

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$.



Тогда $$f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha \quad (\ f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta\ ),$$

где α(β) – угол наклона к оси Ox(Oy) касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).

Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x,y)$ имеет $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, определенные на $D \subseteq xOy$.

Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называют также ***частными производными первого порядка функции*** $f(x,y)$ (или ***первыми частными производными функции*** $f(x,y)$).

$f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в общем случае функции переменных x и y.

Частные производные по x и по y от $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** (или ***вторыми частными производными***) ***функции*** $f(x,y)$.

Обозначения.

1) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\quad z''_{xx}$, $\quad f''_{xx}(x,y)$;

2) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\quad z''_{xy}$, $\quad f''_{xy}(x,y)$;

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\quad z''_{yx}$, $\quad f''_{yx}(x,y)$;

4) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\quad z''_{yy}$, $\quad f''_{yy}(x,y)$.

Частные производные второго порядка в общем случае являются функциями двух переменных.

Их частные производные (если они существуют) называют ***частными производными третьего порядка*** (или ***третьими частными производными***) ***функции*** $z = f(x,y)$.

Продолжая этот процесс, назовем ***частными производными порядка n функции*** $z = f(x,y)$ частные производные от ее частных производных $(n – 1)$-го порядка.

Обозначения аналогичны обозначениям для частных производных 2-го порядка. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Частные производные порядка $n > 1$ называют ***частными производными высших порядков***.

Частные производные высших порядков, взятые по разным аргументам, называются ***смешанными***.

Частные производные высших порядков, взятые по одному аргументу, называют иногда ***несмешанными***.

ПРИМЕР. Найти частные производные 2-го порядка от функции

$$z = x^4 + 3x^2y^5 .$$

ТЕОРЕМА 1 (условие независимости смешанной производной от последовательности дифференцирований).

Пусть $z = f(x,y)$ *в некоторой области* $D \subseteq xOy$ *имеет все частные производные до* n*-го порядка включительно и эти производные непрерывны.*

Тогда смешанные производные порядка m $(m \leq n)$, *отличающиеся лишь последовательностью дифференцирований, совпадают между собой.*

Дифференцируемость ФНП

1. Дифференцируемые ФНП

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – область (т.е. открытое связное множество).

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$.

Придадим x_0 и y_0 приращение Δx и Δy соответственно (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

$\Delta z(M_0)$ называется ***полным приращением функции*** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$, соответствующим Δx и Δy.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $z = f(x,y)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ *если ее полное приращение в этой точке может быть записано в виде*

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y\,, \qquad (1)$$

где A, B – *некоторые числа,*

α_1,α_2 – *бесконечно малые при* $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$

(или, что то же, *при* $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$).

Замечание. Функции α_1 и α_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

Равенство (1) можно записать и в более сжатой форме:

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho\,, \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y}{\rho}$$ – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется ***дифференцируемой в D***.

Напомним: для дифференцируемой функции одной переменной $y=f(x)$ справедливы утверждения:

1) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$;

2) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Rightarrow y = f(x)$ непрерывна в x_0 .

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по обеим независимым переменным. Причем

$$f'_x(x_0,y_0) = A, \quad f'_y(x_0,y_0) = B.$$

$\boxed{z = f(x,y) \text{ диф-ема в точке } M_0} \Rightarrow$

$z = f(x,y)$ –
1)непр. в точке M_0,
2)имеет частн.производные

Замечания.

1) С учетом теоремы 1 равенства (1) и (2) можно записать соответственно в виде:

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \qquad (3)$$

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho \qquad (4)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

α – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

2) Утверждение обратное теореме 1 неверно. Из непрерывности функции двух переменных в точке и существования в этой точке ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

ПРИМЕР. Функция $z = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0;0) и имеет в этой точке частные производные, но не является в этой точке дифференцируемой.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия дифференцируемости ФНП) *Пусть функция* $z = f(x,y)$ *имеет в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$ *частные производные* $f'_x(x, y)$ *и* $f'_y(x, y)$, *причем в самой точке* M_0 *эти производные непрерывны.*

Тогда функция $z = f(x,y)$ *дифференцируема в этой точке.*

$z = f(x,y)$ *диф-ема в точке* M_0

$z = f(x,y)$

1) имеет частн.произв. в окрестности *точки* M_0 ,

2)частн. произв. *непр. в точке* M_0,

Дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y$$

где α_1,α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $z = f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0,y_0)$, *то линейная относительно* Δx *и* Δy *часть ее полного приращения в этой точке, т.е.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y$$

называется ***полным дифференциалом функции*** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ *и обозначается* $dz(M_0)$ *или* $df(x_0,y_0)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ полного дифференциала ФНП

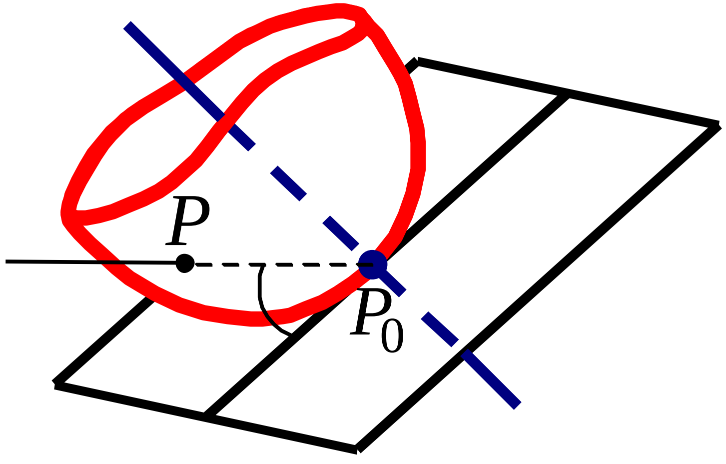
Пусть S – поверхность,

P_0 – фиксированная точка на поверхности S,

P – текущая точка на поверхности S.

Проведем секущую прямую PP_0.

Плоскость, проходящая через точку P_0, называется ***касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0***, если угол между секущей PP_0 и этой плоскостью стремится к нулю когда точка P стремится к P_0, двигаясь по поверхности S произвольным образом.



Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке, называется ***нормалью к поверхности в точке*** P_0.

1) если функция $z = f(x,y)$ (задана явно) дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость.

Ее уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Rightarrow$ уравнение нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2) если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$,

$F(x,y,z)$ – дифференцируема в $P_0(x_0,y_0,z_0)$, причем хотя бы одна из ее частных производных не обращается в P_0 в ноль,

то касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ существует и ее уравнение

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0$$

$\Rightarrow$ уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$$

Замечание.

Точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$, в которой все частные производные функции $F(x,y,z)$ обращаются в ноль, называется ***особой точкой поверхности***.

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

$\Rightarrow$ поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость. Ее уравнение:

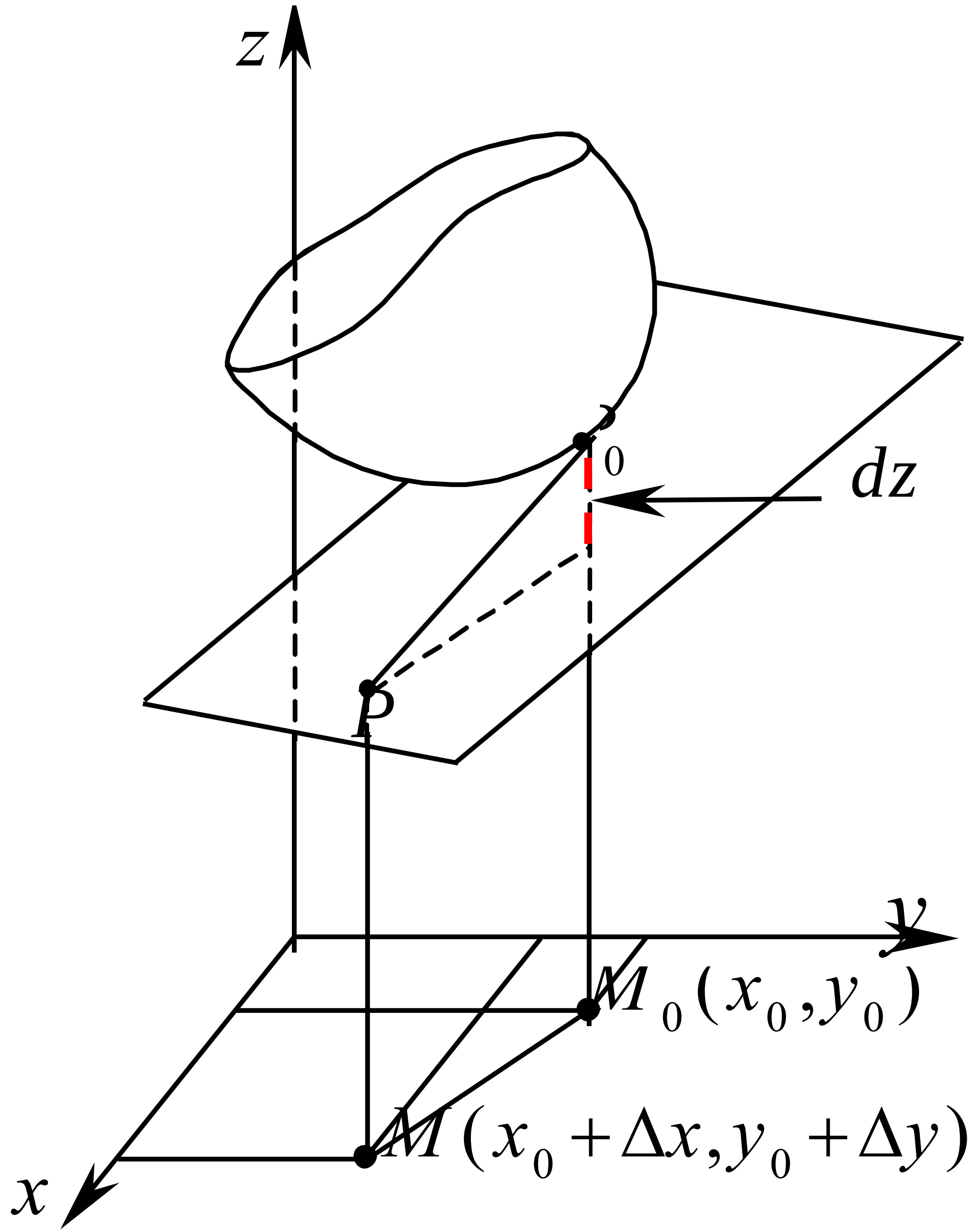
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ равен приращению, которое получает аппликата точки $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$, когда ее координаты x_0 и y_0 получают приращения Δx и Δy соответственно.


z
P
0
dz
P
y
M 0 (x 0 , y 0)
M (x 0 + Δx, y 0 + Δy)
x

Очевидно, что соответствие $(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y) \to df(x_0,y_0)$ является функцией (четырех переменных).

Ее называют ***полным дифференциалом функции z = f(x,y)*** и обозначают dz или $df(x,y)$.

Легко доказать, что полный дифференциал функции n переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

В частности, для $df(x,y)$ существует вторая, ***инвариантная форма записи***:

$$dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy. \qquad (5)$$

Дифференциалы высших порядков ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в области $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.
Ее дифференциал $dz(M)$ – функция переменных x, y, dx, dy.
Далее будем $dz(M)$ называть ***дифференциалом 1-го порядка***.

Зафиксируем значение dx и dy.
Тогда $dz(M)$ станет функцией двух переменных x и y.

Дифференциал функции $dz(M)$ (если он существует) называется ***дифференциалом 2-го порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***вторым дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^2z, $d^2f(x,y)$.

$d^2z(M)$ – функция переменной x и y.
Дифференциал функции $d^2z(M)$ (если он существует) называют ***дифференциалом третьего порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***третьим дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^3z, $d^3f(x,y)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $z = f(x,y)$*** как дифференциал от ее дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: $d^n z$, $d^n f(x,y)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) обозначают $d^n z(M_0)$, $d^n f(x_0,y_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция $z = f(x,y)$ имеет дифференциал порядка n, то ее называют *n* ***раз дифференцируемой***.

ТЕОРЕМА 3 (о связи дифференциала n-го порядка и n-х частных производных).

Если все производные k-го порядка функции $z = f(x,y)$ в области D непрерывны, то она k раз дифференцируема. При этом имеет место <u>символическая</u> формула

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x,y). \qquad (6)$$

Замечание.

1) Чтобы записать дифференциал по формуле (6) необходимо:

а) формально раскрыть скобку по биномиальному закону,

б) умножить получившееся выражение на $f(x,y)$,

в) заменить каждое произведение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} \cdot f(x,y)$$

частной производной $\dfrac{\partial^{n} f(x,y)}{\partial x^{m} \partial y^{n-m}}$

Например, для $n = 2$ получим:

$$d^{2}z = \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}(dx)^{2} + 2\frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}(dy)^{2}$$

Для $n = 3$ получим:

$$d^{3}z = \frac{\partial^{3} f}{\partial x^{3}}(dx)^{3} + 3\frac{\partial^{3} f}{\partial x^{2} \partial y}(dx)^{2} dy + 3\frac{\partial^{3} f}{\partial x \partial y^{2}} dx(dy)^{2} + \frac{\partial^{3} f}{\partial y^{3}}(dx)^{3}$$

2) Символическая формула для нахождения дифференциала $d^k u$ функции $u = f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ будет иметь вид

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что $x_1,x_2,\ldots x_n$ – независимые аргументы.

3) В теореме 3 предполагается, что $z = f(x,y)$ – k раз дифференцируемая функция 2-х **независимых** переменных.

Если x,y – функции, то она не будет справедлива. Т.е. формула (6) не является инвариантной.

Частные производные сложных ФНП

Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Тогда z – ***сложная функция*** независимых переменных u и v.
Переменные x и y называются для z ***промежуточными переменными***.

ЗАДАЧА: найти частные производные функции z по u и v.

ТЕОРЕМА 1 (о производной сложной функции).
Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Если $f(x,y)$, $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ дифференцируемы, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (1)$$

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай функции большего числа независимых и промежуточных аргументов. А именно, если

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{где } x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \qquad (\forall k = \overline{1, m})$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ сложной ФНП

1) Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.

Тогда z – сложная функцией одной переменной t.

Если $f(x,y)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

2) Пусть $z = f(x,y)$, где $y = \varphi(x)$

Тогда z – сложная функцией одной переменной x.

Если $f(x,y)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Производная $\dfrac{dz}{dx}$ в левой части формулы (3) называется ***полной производной функции z***.

Дифференцирование неявных функций

ТЕОРЕМА 1 (существования неявной функции).

Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *и все ее частные производные 1-го порядка определены и непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, u_0)$.

Если $F(P_0) = 0$ *и* $F'_u(P_0) \neq 0$,

то $\exists$ *такая окрестность* U *точки* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, *в которой уравнение*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

определяет непрерывную функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *причем*

1) $f(M_0) = u_0$;
2) *для любой точки* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$
$$F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \neq 0;$$
3) *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в окрестности* U *непрерывные частные производные по всем аргументам.*

ЗАДАЧА. Найти частные производные неявно заданной функции.

1) Пусть $F(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в некоторой окрестности $P_0(x_0,y_0)$

   Тогда уравнение $F(x,y) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки x_0, непрерывную функцию $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (1)$$

2) Пусть $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в окрестности $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

   Тогда уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывную функцию $z = f(x,y)$.

   Так как фактически $\frac{\partial z}{\partial x}$ это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной при постоянном значении другой, то по формуле (1) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$, $M_0(x_0,y_0) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in U(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0).$$

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in U(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0).$$

Точки максимума и минимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно ***максимумами*** и ***минимумами*** (***экстремумами***) этой функции.

Замечания.

1) По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D.

2) Если $\forall M(x,y) \in U^*(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad [\ f(x,y) > f(x_0,y_0)\ ],$$

то точку M_0 называют ***точкой строгого максимума*** (соответственно ***точкой строгого минимума***) функции $f(x,y)$.

Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками ***нестрогого максимума*** и ***минимума***.

3) Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

ТЕОРЕМА 2 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 2.

Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x,y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ либо параллельна плоскости xOy, либо вообще не существует.

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 2, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x,y)$.

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума функции ДВУХ переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – *критическая точка функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.*

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

1) *если* $A \cdot C - B^2 < 0$, *то точка* $M_0(x_0,y_0)$ *не является точкой экстремума;*
2) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет минимум;*
3) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A < 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет максимум;*
4) *если* $A \cdot C - B^2 = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

***Замечание*.**

1) Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0,y_0)$ не удалось, то ответ на вопрос о наличии в M_0 экстремума даст знак $\Delta f(x_0,y_0)$:

а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) < 0,$$
то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого максимума;

б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) > 0,$$
то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого минимума.

В случае нестрогих экстремумов при некоторых значениях Δx и Δy приращение функции будет нулевым

2) Определения максимума и минимума и необходимые условия экстремума легко переносятся на функции трех и более числа переменных.
Достаточные условия экстремума для функции n (n > 2) переменных ввиду их сложности в данном курсе не рассматриваются. Определять характер критических точек для них мы будем по знаку приращения функции.