Критерий отношения правдоподобия

Построение минимаксного критерия

Имеется выборка $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *из нормальной совокупности с неизвестным параметром* σ *и математическим ожиданием* $a = 0$. *Требуется построить минимаксный критерий для проверки гипотезы* $H_0: \sigma = \sigma_0$, *против альтернативы* $H_1: \sigma = \sigma_1$ $(\sigma_0 < \sigma_1)$. *Используя построенный критерий, по выборке из* $n = 30$ *значений нормальной случайной величины* X, *принять одну из двух гипотез:* $H_0: \sigma(X) = 3{,}7$, $H_1: \sigma(X) = 5{,}0$, *если* $\overline{X^2} = 17{,}24$. *Указать уровень значимости и мощность критерия.*

Запишем функции правдоподобия и отношение правдоподобия:

Так как функция правдоподобия для выборки из нормального распределения имееет вид:

$$\Psi(\vec{X}, a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} Exp\left(-\frac{(X_i - a)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n Exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2\right),$$

то функции правдоподобия при истинности $H_0: \sigma = \sigma_0$ *и* $H_1: \sigma = \sigma_1$ *(учитывая, что* $a = 0$*) будут иметь вид:*

$$\Psi_0(\vec{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n Exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right), \qquad \Psi_1(\vec{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n Exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right).$$

Соответственно, отношение правдоподобия:

$$\frac{\Psi_0(\vec{X})}{\Psi_1(\vec{X})} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n Exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right) = \mu Exp\left(\nu \overline{X^2}\right), \quad \mu > 0, \quad \nu < 0.$$

Заметим, что отношение правдоподобия является монотонно убывающей функцией от второго выборочного момента $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, *следовательно, условие* $\frac{\Psi_{H_0}(\vec{X})}{\Psi_{H_1}(\vec{X})} > c$ *равносильно условию:* $\overline{X^2} < c_1$. *Соответственно, критерий отношения правдоподобия можно записать в виде:*

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} H_0, & \text{если } \overline{X^2} < c_1 \\ H_1, & \text{если } \overline{X^2} \ge c_1 \end{cases},$$

Уровень значимости критерия: $\alpha(c_1) = P_{H_0}\left(\delta(\vec{X}) = H_1\right) = P_{H_0}\left(\overline{X^2} \ge c_1\right).$

Вероятность ошибки второго рода: $\beta(c_1) = P_{H_1}\left(\delta(\vec{X}) = H_0\right) = P_{H_1}\left(\overline{X^2} < c_1\right).$

Если c_1 *выбрать так, что* $\alpha(c_1) = \beta(c_1)$, *то данный критерий будет являться минимаксным критерием.*

Статистика $\overline{X^2}$ *в данном случае, очевидно, является оценкой дисперсии совокупности (при известном математическом ожидании* $a = 0$*), следовательно,при условии истинности* H_0 *величина* $\dfrac{n\overline{X^2}}{\sigma_0^2} \in \chi_n^2$, *а при условии истинности* H_1 *величина* $\dfrac{n\overline{X^2}}{\sigma_1^2} \in \chi_n^2$ *и, соответственно, условие* $P_{H_0}\left(\overline{X^2} \ge c_1\right) = P_{H_1}\left(\overline{X^2} < c_1\right)$ *можно переписать в виде:*

$P_{H_0}\left(n\overline{X^2}/\sigma_0^2 \ge c_1 n/\sigma_0^2\right) = P_{H_1}\left(n\overline{X^2}/\sigma_1^2 < c_1 n/\sigma_1^2\right)$ *или* $P\left(\chi_n^2 \ge c_1 n/\sigma_0^2\right) = P\left(\chi_n^2 < c_1 n/\sigma_1^2\right)$,

где χ_n^2 *- случайная величина имеющая распределение хи-квадрат с* n *степенями свободы. Поскольку функция* $\alpha(c_1) = P\left(\chi_n^2 > c_1 n/\sigma_0^2\right)$ *убывающая от 1 до 0, а функция* $\beta(c_1) = P\left(\chi_n^2 < c_1 n/\sigma_1^2\right)$ *возрастающая от 0 до 1 (см. рис. 1), то это уравнение имеет ровно один корень, который можно найти численно. Итак, окончательно:*

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} H_0, & \text{если } \overline{X^2} < c_1 \\ H_1, & \text{если } \overline{X^2} > c_1 \end{cases}$$, *где* c_1 *есть корень уравнения* $P\left(\chi_n^2 > c_1 n/\sigma_0^2\right) = P\left(\chi_n^2 < c_1 n/\sigma_1^2\right)$

Используя построенный критерий, определим, какую из двух гипотез: $H_0 : \sigma(X) = 3{,}7$, $H_1 : \sigma(X) = 5{,}0$ *следует принять, если имеется выборка из* $n = 30$ *значений нормальной случайной величины* X, *с неизвестной дисперсией и математическим ожиданием равным нулю и подсчитанное по выборке значение* $\overline{X^2} = 17{,}24$.

Для определения c_1 *ищем корень уравнения:* $\alpha(c_1) = \beta(c_1)$, *где* $\alpha(c_1) = P\left(\chi_n^2 \ge c_1 n/\sigma_0^2\right) \approx P\left(\chi_{30}^2 \ge 2.1914 c_1\right)$, $\beta(c_1) = P\left(\chi_n^2 < c_1 n/\sigma_1^2\right) = P\left(\chi_{30}^2 < 1{,}2 c_1\right)$ *(рис. 1).*

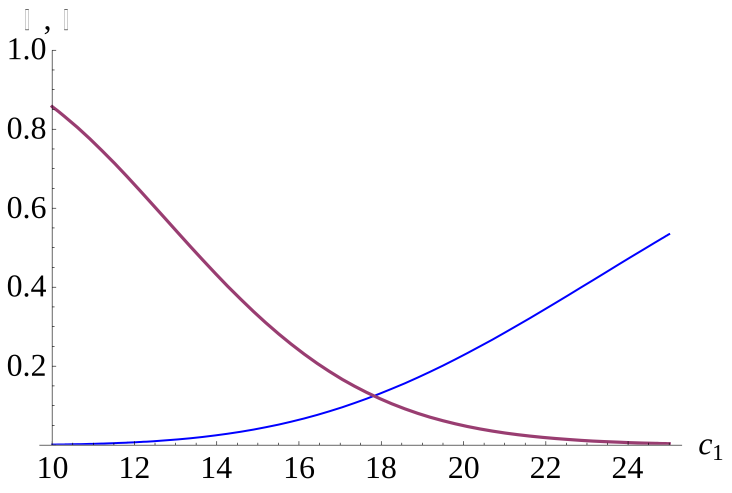

Рис. 1. Вероятности ошибок первого и второго рода, как функции параметра c_1

Значение корня $c_1 \approx 17{,}821$ *находим, используя численные методы. Так как* $\overline{X^2} = 17{,}24 < 17{,}821$*, то принимаем гипотезу* $H_0 : \sigma(X) = 3{,}7$*. Уровень значимости критерия и вероятность ошибки второго рода* $\alpha = \beta = P_{H_0}\left(\overline{X^2} \geq c_1\right) = P_{H_1}\left(\overline{X^2} < c_1\right) \approx 0{,}1245$. *Соответственно, мощность критерия* $1 - \beta \approx 0{,}8755$.