

Алгебра булевых функций

Функции алгебры логики.

Пусть $E = \{0; 1\}$ - двухэлементное множество. Операции, определенные на множестве E , то есть Функции вида $f : E^n \rightarrow E$, где $E = \{0; 1\}$, называются **функциями алгебры логики** или **булевыми функциями**. Аргументы логических функций называются логическими переменными. Элемент "0" множества E носит логическое название "ложь", а элемент "1" множества E носит логическое название "истина". Придание логического смысла элементам множества E позволяет использовать аппарат булевых функций в математической логике, рассматривая сложные логические высказывания как функции логических переменных.

Множество булевых функций от n переменных обозначим $P_n : P_n = \{f \mid f : E^n \rightarrow E\}$.

Булеву функцию n переменных можно задать таблицей, которая называется **таблицей истинности**.

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	0	0	
0	0	0	1	
		1	0	
1	1	1	1	

Если переменных n , то всего $N = 2^n$ различных наборов возможных значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. На каждом из наборов логическая функция может принять два значения, следовательно, всего различных функций n переменных $2^N = 2^{2^n}$. Если через P_n обозначить множество булевых функций n переменных, то, таким образом $|P_n| = 2^{2^n}$.

Существенные и несущественные переменные

Булева функция $f \in P_n$ существенно зависит от переменной x_i , если существует такой набор значений $\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$, что $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$. В этом случае переменную x_i называют существенной переменной, в противном случае x_i называют несущественной (фиктивной) переменной.

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Пусть заданы две булевы функции $f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и $f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Если x_n - несущественная переменная, а при одинаковых значениях остальных переменных значения функций совпадают, то говорят, что функция f_2 получается из функции f_1 введением фиктивной переменной, а f_1 получается из f_2 удалением фиктивной переменной.

По определению булевы функции равны, если одна из них получается из другой введением (удалением) фиктивных переменных. Это позволяет считать, что в данной системе функций все булевы функции зависят от одних и тех же переменных

Булевы функции одной переменной (унарные логические операции).

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1
Обозначение	0	$\bar{x}$	x	1
Название	нуль	отрицание	тождественная	единица

Булевы функции двух переменных (бинарные логические операции).

x1	x2	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
обозначение	0	, &, ^							∨	↓	≡				→		1
название	нуль	конъюнкция ("и")						исключенное "или"	дизъюнкция ("или")	стрелка Пирса ("или-не")	эквивалентность				импликация	штрих Шеффера ("и-не")	единица

Реализация функций формулами.

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ - некоторое множество булевых функций, которое будем называть **базисом**. Выражение вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где f - функция из множества F , а $x_1, x_2, \dots, x_n$ - либо логические переменные, либо формулы из множества F , называется **формулой в базисе F** .

Всякой формуле однозначно соответствует некоторая булева функция f . Если f есть функция, соответствующая данной формуле, то говорят, что формула реализует функцию f . Зная таблицы истинности, соответствующие функциям базиса, можно получить таблицу истинности той функции, которую реализует данная формула.

Пример: $f(x_1, x_2) = (x_1 \& x_2) \vee ((x_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2))$.

x_1	x_2	$x_1 \& \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \& x_2$	$(x_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2)$	$x_1 \& x_2$	f
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

То есть функция f реализует дизъюнкцию.

Одна и та же функция может иметь множество реализаций в данном базисе. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются равносильными. Отношение равносильности на множестве булевых функций есть отношение эквивалентности.

Булев базис. Свойства булева базиса.

Базис $\{\&, \vee, \neg\}$ - называется **булевым базисом**, а алгебра $\langle P_n, \{\&, \vee, \neg\} \rangle$ называется **алгеброй булевых функций**.

Для функций входящих в булев базис справедливы следующие соотношения:

1. $x \vee x = x$ $x \& x = x$
2. $x \vee y = y \vee x$ $x \& y = y \& x$
3. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $x \& (y \& z) = (x \& y) \& z$
4. $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$
5. $x \vee (x \& y) = x$ $x \& (x \vee y) = x$
6. $(x \vee y) \& (x \vee \bar{y}) = x$ $(x \& y) \vee (x \& \bar{y}) = x$
7. $x \vee 0 = x$ $x \& 0 = 0$
8. $x \vee 1 = 1$ $x \& 1 = x$
9. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}$ $\overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
10. $x \vee \bar{x} = 1$ $x \& \bar{x} = 0$ $\bar{\bar{x}} = x$

Все формулы могут быть проверены, например, путем построения таблиц истинности для правой и левой частей.

Если в формуле, записанной в булевом базисе, отсутствуют скобки, то операция конъюнкции имеет приоритет над операцией дизъюнкции.

Двойственная функция

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - булева функция. Тогда функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая как $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ называется двойственной к функции f .

Из определения вытекает, что двойственность инволютивна: $(f^*)^* = f$, а отношение двойственности на множестве булевых функций симметрично: если $f^* = g$, то $g^* = f$.

Если в таблице истинности булевой функции f инвертировать все значения, то полученная таблица будет таблицей истинности двойственной функции f^* .

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$(x \vee y)^*$	$x \wedge y$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Примеры двойственных функций:

$$(x \vee y)^* = x \wedge y; \quad (x \downarrow y)^* = x | y; \quad (x \oplus y)^* = x \equiv y;$$

$$(\bar{x})^* = \bar{x}.$$

Теорема (принцип двойственности. Если функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реализована формулой:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

то формула:

$$\varphi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

реализует двойственную функцию.

Следствие. Если формулы F_1 и F_2 равносильны, то и формулы F_1^* и F_2^* , полученные из формул F_1 и F_2 заменой всех функций на двойственные, равносильны.

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \Rightarrow \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad x \downarrow y = \overline{x \vee y} \Rightarrow x | y = \overline{x \wedge y}$$

Монотонная функция

Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$, таких что $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Линейная функция

Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейной, если:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Здесь: $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ - логические константы, знак конъюнкции опущен, а операция “+” – сложение по модулю 2.

Все функции одной переменной линейные. Среди булевых функций двух переменных линейными являются $x + y$; $x \equiv y = 1 + x + y$.

Нормальные формы

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - некоторые логические формулы.

Определение 1. Формула вида $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ называется дизъюнкцией формул $A_1, A_2, \dots, A_n$. Формула вида $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ называется конъюнкцией формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Определение 2. Дизъюнкция (конъюнкция) называется элементарной, если каждая из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ есть логическая переменная или ее отрицание.

Определение 3. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ). Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ).

Определение 4. Если каждая логическая переменная формулы входит в каждую

элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз, то такая нормальная форма называется *совершенной* (СДНФ, СКНФ).

Теорема о разложении булевой функции по переменным

Пусть $x \in \{0, 1\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$. Обозначим: $x^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = x \\ 0, & \alpha \neq x \end{cases}$, или $x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \alpha = 0 \end{cases}$.

Теорема. Любая логическая функция представима единственным образом в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \& x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n},$$

где дизъюнкция берется по всем возможным наборам значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Теорема о существовании СДНФ

Теорема. Всякая булева функция (кроме 0) имеет единственную СДНФ.

Доказательство. Согласно теореме разложения:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \& x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n}.$$

1. Исключим из дизъюнкции слагаемые, соответствующие таким наборам значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, на которых $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$.
2. Оставшиеся конъюнкции запишем в виде:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \& x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n}.$$

3. Заметим, что $x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \alpha = 0 \end{cases}$, то есть $x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n}$ - есть элементарная

конъюнкция. Таким образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n},$$

где дизъюнкция берется по всем наборам значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ на которых $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$.

С учетом сделанных замечаний, полученное выражение для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является очевидно СДНФ, а так как разложение булевой функции по переменным единственно, то и полученная СДНФ также единственна.

Следствие. Любая логическая функция может быть выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание (т.е. записана в булевом базисе).

В ходе доказательства теоремы мы получили алгоритм построения СДНФ:

1. Выделяем в таблице истинности те наборы переменных, для которых значение функции равно 1.
2. Записываем для каждого из наборов конъюнкцию всех переменных по следующему

правилу: если $x_i = 1$, то в конъюнкции пишем x , если $x_i = 0$, то в конъюнкции пишем $\bar{x}$.

3. Записываем дизъюнкцию всех конъюнкций.

Алгоритм преобразования формулы к СДНФ

Любую формулу можно преобразовать к СДНФ, используя законы алгебры логики по следующему алгоритму.

1. Элиминация операций, т.е. выражение всех операций через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, например, используя те же СДНФ и СКНФ.
2. Протаскивание отрицаний, т.е. сведение всех отрицаний к переменным (используя законы Де Моргана и снятия двойного отрицания).
3. Раскрытие скобок, являющихся операндами конъюнкции, и приведение к ДНФ.
4. Приведение подобных, т.е. удаление с помощью свойства идемпотентности повторных вхождений переменных в каждую конъюнкцию и повторных вхождений конъюнкций в дизъюнкцию
5. Расщепление переменных, т.е. добавление в каждую конъюнкцию, содержащую не все переменные, недостающих переменных, например:

$$x \& y = x \& y \& (z \vee \bar{z}) = x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z}.$$

Пример. Привести к СДНФ: $\overline{y \& z \& x \rightarrow \bar{z} \vee (x \equiv y)}$.

1. Используя СКНФ и СДНФ, осуществляем элиминацию операций $\rightarrow$ и $\equiv$:

$$\overline{y \& z \& x \rightarrow \bar{z} \vee (x \equiv y)} = \overline{y \& z \& \bar{x} \vee \bar{z} \vee (x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y})}.$$

2. Протаскиваем отрицания и упрощаем:

$$\begin{aligned} \overline{y \& z \& \bar{x} \vee \bar{z} \vee (x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y})} &= ((y \& z) \vee (\bar{x} \vee \bar{z})) \& \overline{(x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y})} = \\ &= (y \& z \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \& \overline{(x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y})} = (y \& z \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee \bar{y}) \& (x \vee y) = \\ &= (y \& z \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \& x \vee \bar{x} \& y \vee \bar{y} \& x \vee \bar{y} \& y) = (y \& z \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \& y \vee \bar{y} \& x) = \\ &= y \& z \& \bar{x} \& y \vee y \& z \& \bar{y} \& x \vee \bar{x} \& \bar{y} \& x \vee \bar{x} \& y \vee \bar{z} \& \bar{x} \& y \vee \bar{z} \& \bar{y} \& x = \\ &= \bar{x} \& y \& z \vee \bar{x} \& y \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \end{aligned}$$

3. Расщепляем переменные:

$$\begin{aligned} \bar{x} \& y \& z \vee \bar{x} \& y \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} = \\ \bar{x} \& y \& z \vee \bar{x} \& y \& (z \vee \bar{z}) \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} = \bar{x} \& y \& z \vee \bar{x} \& y \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \& \bar{z} \end{aligned}$$

Теорема о существовании СКНФ.

Теорема. Всякая булева функция (кроме 1) имеет единственную СКНФ.

Доказательство. Запишем теорему разложения для функции $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{f^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_n^{\alpha_n}$$

Применим принцип двойственности:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcap_{f^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \wedge x_n^{\alpha_n} = \bigcap_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=0} x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$$

Алгоритм построения СКНФ на основе таблицы истинности

1. Выделяем в таблице истинности те наборы переменных, для которых значение функции равно 0.
2. Записываем для каждого из наборов дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если $x_i = 1$, то в дизъюнкции пишем $\bar{x}$, если $x_i = 0$, то в дизъюнкции пишем x .
3. Записываем конъюнкцию всех дизъюнкций.

Замыкание множества булевых функций. Замкнутые классы булевых функций

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, $f_i \in P_n$.

Определение 1. Замыканием F называется множество всех булевых функций, реализуемых формулами над F (обозначается $[F]$).

Определение 2. Множество (класс) функций F называется **замкнутым**, если $[F] = F$.

Замкнутыми классами являются, например, следующие классы функций:

- 1) Класс функций, сохраняющих 0: $T_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$
- 2) Класс функций, сохраняющих 1: $T_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$
- 3) Класс самодвойственных функций: $T_* = \{f \mid f = f^*\}$
- 4) Класс монотонных функций: $T_M = \{f \mid \alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$
- 5) Класс линейных функций: $T_L = \{f \mid f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\}$

Таблица принадлежности булевых функций замкнутым классам

	T_0	T_1	T_*	T_M	T_L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\bar{x}$	−	−	+	−	+
$x_1 \vee x_2$	+	+	−	+	−
$x_1 \& x_2$	+	+	−	+	−
$x_1 + x_2$	+	−	−	−	+
$x_1 \equiv x_2$	−	+	−	−	+

$x_1 \mid x_2$	—	—	—	—	—
$x_1 \downarrow x_2$	—	—	—	—	—

Полнота базиса

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ некоторый базис булевых функций. Базис F называется **полным**, если любая булева функция реализуема в базисе F . Примеры полных базисов:

- 1) Булев базис $\{\&, \vee, \neg\}$ (следствие представления любой функции в виде СДНФ).
- 2) Базис $\{\&, \neg\}$, т.к. дизъюнкцию можно выразить через операции конъюнкции и отрицания: $x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$.
- 3) Базис $\{\vee, \neg\}$, т.к. конъюнкцию можно выразить через операции дизъюнкции и отрицания: $x \& y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.
- 4) Базис $\{\mid\}$, т.к. $\bar{x} = x \mid x$, $x \& y = \overline{x \mid y}$ и, следовательно, функции полного базиса $\{\&, \neg\}$ выражааются через $\{\mid\}$.
- 5) Базис $\{\downarrow\}$, т.к. $\bar{x} = x \downarrow x$, $x \vee y = \overline{x \downarrow y}$ и, следовательно, функции полного базиса $\{\vee, \neg\}$ выражааются через $\{\downarrow\}$.
- 6) Базис $\{1, \wedge, +\}$, т.к. $\bar{x} = 1 + x$. Представление булевой функции в базисе $\{1, \wedge, +\}$ называют полиномом Жегалкина или алгебраической нормальной формой (АНФ). Для функций $\{\wedge, +\}$, входящих в базис $\{1, \wedge, +\}$ справедливы следующие соотношения:

- | | | |
|----|-----------------------------|---|
| 1. | $x + x = 0$ | $x \cdot x = x$ |
| 2. | $x + y = y + x$ | $x \cdot y = y \cdot x$ |
| 3. | $x + (y + z) = (x + y) + z$ | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
| 4. | | $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ |
| 5. | $x + 0 = x$ | $x \cdot 1 = x$ |

Теорема Поста. Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль, хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу, хотя бы одну несамодвойственную функцию, хотя бы одну немонотонную функцию и хотя бы одну нелинейную функцию.

Минимальные дизъюнктивные формы

Булева функция может быть задана бесконечным числом различных, но равносильных формул. Возникает естественная задача: для данной булевой функции найти реализующую формулу, обладающую теми или иными свойствами.

Наиболее востребованной является задача минимизации: найти минимальную формулу, реализующую функцию. Данная задача имеет множество вариантов:

1. Найти формулу, содержащую наименьшее количество переменных;
2. Найти формулу, содержащую наименьшее количество определённых операций;
3. Найти формулу, содержащую наименьшее количество подформул определённого вида и т.п.

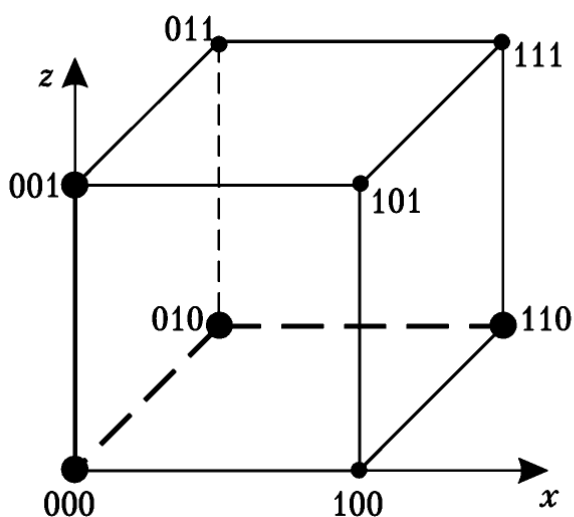
Наиболее изученной является задача построения минимальной ДНФ – ДНФ, содержащей минимальное число переменных, среди всех возможных ДНФ.

Геометрическая интерпретация

Двоичным наборам из n чисел можно взаимно-однозначно сопоставить вершины n -мерного единичного гиперкуба. При этом функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задается подмножеством вершин, на которых ее значение равно 1.

Пусть функция $g(x, y, z)$ задана таблицей истинности (таблица внизу справа). Данной функции будет соответствовать множество вершин куба $N = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0)\}$.

x	y	z	$g(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



Каждой элементарной конъюнкции $K = x_{i_1}^{\alpha_1} \wedge x_{i_2}^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}^{\alpha_k}$ соответствует множество вершин гиперкуба, у которых $x_{i_1} = \alpha_1, x_{i_2} = \alpha_2, \dots, x_{i_k} = \alpha_k$, а значения остальных координат произвольны. Другими словами, каждой элементарной конъюнкции K сопоставляется множество вершин, на которых эта конъюнкция равна 1. Например:

$$\overline{xyz} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}, \quad \overline{xy} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad z \rightarrow \{z=1\}.$$

Можно видеть, что элементарная k переменных образует $(n-k)$ -мерную грань гиперкуба.

Пусть K – элементарная конъюнкция $\sim$ грань гиперкуба $\sim$ множество вершин гиперграни. $|K|$ – ранг конъюнкции, то есть число переменных входящих в нее. Геометрический смысл задачи минимизации ДНФ – нахождение такого набора гиперграней

$\{K_1, K_2, \dots, K_k\}$, чтобы они в совокупности образовывали покрытие множества N : $N = \bigcup_{i=1}^k K_i$ и

сумма рангов $\sum_{i=1}^k |K_i|$ была минимальной.

Сокращенная ДНФ

Все алгоритмы построения минимальной ДНФ используют, по сути, одну и ту же идею: уменьшить по возможности множество рассматриваемых конъюнкций, а затем найти минимальную, перебирая оставшиеся конъюнкции.

Конъюнкция K называется *допустимой* для функции f , если $(K \rightarrow f) \equiv 1$, то есть, K является *импликантой* функции f . Импликанта функции обращается в ноль, по крайней мере, на тех же наборах переменных, на которых сама функция также равна нулю. Геометрически это означает, что $K \subset N$. Следовательно, если мы выберем множество точек $E^n \setminus N$ (точки, на которых функция обращается в ноль) и для каждой точки построим элементарные конъюнкции, которые на ней обращаются в единицу, то получим множество недопустимых конъюнкций.

$g(x, y, z) = 0$	Недопустимые конъюнкции
0 1 1	1, $\bar{x}$, y , z $\bar{x}y$, $\bar{x}z$, yz , $\bar{x}yz$
1 0 0	1, x , $\bar{y}$, $\bar{z}$ $x\bar{y}$, $x\bar{z}$, $\bar{y}\bar{z}$, $x\bar{y}\bar{z}$
1 0 1	1, x , $\bar{y}$, z $x\bar{y}$, xz , $\bar{y}z$, $x\bar{y}z$
1 1 1	1, x , y , z xy , xz , yz , xyz

Всего получили 20 различных недопустимых конъюнкций. Из всего множества $3^n = 27$ различных конъюнкций осталось, соответственно 7 допустимых конъюнкций:

$\overline{xy}$, $\overline{xz}$, $\overline{yz}$, $x\overline{yz}$, $\overline{xy}z$, $\overline{x}\overline{y}z$.

Элементарная конъюнкция K называется *простой импликантой* функции f (максимальной конъюнкцией), если она является импликантой функции f и не существует другой импликанты функции f $K' \neq K$, такой что: $(K \rightarrow K') \equiv 1$. Геометрически это означает,

что не существует импликанты функции f $K' \neq K$, такой что: $K \subset K'$.

Всякая допустимая конъюнкция содержится в некоторой максимальной. Совокупность максимальных конъюнкций (простых импликант) образует покрытие множества N , то есть, ДНФ, которая называется **сокращенной ДНФ**. Сокращенная ДНФ определяется для булевой функции однозначно.

Любая минимальная ДНФ является подмножеством сокращенной ДНФ!

Минимизация логических функций методом карт Карно

Карта Карно - таблица, в ячейки которой занесены значения функции, соответствующие всем возможным значениям логических переменных (т.е. карта Карно содержит 2^n ячеек). Чтобы, при числе переменных больше 2-х, отобразить все значения в виде плоской таблицы, переменные группируются по 2, 3 и т.д. При этом последовательность наборов значений сгруппированных переменных должна соответствовать так называемому коду Грея. Код Грея - последовательность двоичных чисел, где каждое отличается от предыдущего, не более, чем в одном разряде, причем старший разряд может изменяться только, если нет возможности изменить младший разряд: $\{000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$.

Код Грея можно сформировать следующим образом:

первый разряд принимает значения - 01100110011001100,
второй 0011110000111100001111,
третий 00001111111100000000 и т.д.

Например, для функции, СДНФ которой имеет вид:

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt,$$

карта Карно будет выглядеть следующим образом:

xy / zt	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Минимизация осуществляется путем склеивания слагаемых, для которых записаны единицы в ячейках, образующих прямоугольники с числом ячеек, кратным степени двойки. При этом соседними считаются также клетки нижнего и верхнего рядов и клетки крайних левого и правого рядов. Результирующая ДНФ по карте Карно строится по тому же

принципу, что и СДНФ по таблице истинности, с той лишь разницей, что для объединенных ячеек записывается в ДНФ одно слагаемое, содержащее переменные, сохраняющие свои значения в этих ячейках.

Для рассмотренной функции, сокращенная и минимальная ДНФ, полученные по карте Карно, будут иметь вид:

Сокращенная ДНФ: $f(x, y, z, t) = \bar{y}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee \bar{x}yt \vee yzt \vee xyz \vee xz\bar{t}$

Минимальная ДНФ: $f(x, y, z, t) = \bar{y}t \vee \bar{x}\bar{z}t \vee yzt \vee xyz$.

xy / zt	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1