ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

"Утверждаю"
Зав.кафедрой ВММФ,
профессор, д.ф.-м.н.
______ А.Ю.Трифонов
"__"________ 2008 г.

Сборник индивидуальных заданий по курсу «ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭКОНОМИКЕ»

Томск – 2008

Сборник индивидуальных заданий по курсу «Планирование эксперимента в экономике» для студентов 5 курса ЕНМФ специальности 080116 "Математические методы в экономике".
Томск, Изд-во ТПУ. 2008 г. – 16стр.

Составитель: Корякин Алексей Иванович

Рецензент: Цехановский Игорь Александрович

Индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ТПУ « 21 » февраля 2008 г.

Зав.кафедрой ВММФ,
проф., д.ф.-м.н. ________________Трифонов А.Ю.

Одобрено учебно-методической комиссией каф. ВММФ.
Председатель комиссии доцент, к.ф.-м.н. ____________Лазарева Л.И.

Учебная дисциплина «Планирование эксперимента в экономике» читается студентам специальности «Математические методы в экономике» с целью усвоения теоретических знаний о статистической теории оптимального планирования эксперимента и обработки его результатов, приобретения практических навыков применения этой теории в прикладных экономических исследованиях. Это позволит научиться не только правильно обрабатывать уже имеющуюся экономическую информацию, но и планировать сбор данных так, чтобы минимизировать затраты на получение достаточно точной экономической информации. Обучение этой дисциплине базируется на сумме знаний и умений, полученных студентами при изучении курсов «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Экономико-математическое моделирование», «Информационные технологии в экономике» и других.

Содержание курса «Планирование эксперимента в экономике»: экономические задачи планирования и обработки эксперимента; экстремальная задача выбора оценки и плана эксперимента; оценки по методу наименьших квадратов, наилучшая линейная оценка, простейшая монте-карловская оценка, оценка по методу наименьших квадратов со случайными узлами, их дисперсионные матрицы и области применения; критерии эффективности и теоремы эквивалентности; аналитические способы и численные алгоритмы построения оптимальных планов; моделирование непрерывных планов для оценок со случайными узлами.

Индивидуальные домашние задания выполняются слушателями курса «Планирование эксперимента в экономике» с целью практического освоения методики и приобретения навыков использования методов и алгоритмов оптимального планирования и обработки эксперимента, оценивания точности полученных результатов для решения прикладных экономических задач.

Основные формулы и обозначения

Предполагается, что в некоторых n-мерных точках $x^j = (x_1^j, \ldots, x_n^j) \in X \subset \mathbb{R}_n$, $j = 1, \ldots, N$, области возможных измерений X в результате эксперимента могут быть получены наблюдения $\zeta(x^j, \omega^j)$ функции $f(x^j)$. Эти наблюдения содержат случайные ошибки, такие что

$$M_\omega \zeta(x^j, \omega^j) = f(x^j), \qquad M_\omega[\zeta(x^j, \omega^j)\zeta(x^q, \omega^q)] = f(x^j)f(x^q) + \sigma^2(x^j, x^q)$$

и σ^2 интегрируема по обоим аргументам в X. По результатам таких наблюдений необходимо оценить функциональную зависимость $y = f(x)$, о которой известно лишь, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x) + r(m, x),$$

где $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, — заданный набор линейно независимых на X функций. Функция $g(x, m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \theta_i \varphi_i(x)$ будет проекционной оценкой (регрессией) функции $f(x)$, если θ_i, $i = 1, \ldots, m$, — оценки коэффициентов разложения c_i, полученные по наблюдениям $\zeta(x^j, \omega^j)$, $j = 1, \ldots, N$. Задача состоит в выборе таких оценок θ_i и таких узлов эксперимента x^j, $j = 1, \ldots, N$, которые бы обеспечивали наиболее точную по вероятности проекционную оценку функциональной зависимости $y = f(x)$.

Введем матричные обозначения

$$Z_{N,1} = \big(\zeta(x^1, \omega^1)\ \ldots\ \zeta(x^N, \omega^N)\big)^\mathsf{T}; \quad F_{N,1} = \big(f(x^1)\ \ldots\ f(x^N)\big)^\mathsf{T};$$
$$R_{N,1} = \big(r(m, x^1)\ \ldots\ r(m, x^N)\big)^\mathsf{T}; \qquad M_\omega Z = F; \quad M_\omega[ZZ^\mathsf{T}] - FF^\mathsf{T} = \Sigma_{N,N},$$

где Σ — матрица ковариаций ошибок наблюдений с элементами $\sigma^2(x^j, x^q)$, $j, q = 1, \ldots, N$;

$$\Phi_{m,1}(x) = \big(\varphi_1(x)\ \ldots\ \varphi_m(x)\big)^{\mathsf{T}}; \quad A_{N,m} = \big(\Phi(x^1)\ \ldots\ \Phi(x^N)\big)^{\mathsf{T}};$$
$$c_{m,1} = \big(c_1 \quad \ldots \quad c_m\big)^{\mathsf{T}}; \quad F = Ac + R.$$

Теорема Гаусса–Маркова дает так называемую наилучшую линейную оценку $\hat{c}$ коэффициентов c и соответствующую ей проекционную оценку $\hat{c}^{\mathsf{T}}\Phi(x)$ функции $f(x)$. Эта оценка по вероятности оптимальна как в пространстве коэффициентов, так и в пространстве функций на множестве всех оценок вида TZ, для которых $TA = E$. В случае независимости ошибок наблюдений (матрица Σ диагональна) и точно заданной модели $(R = \bar{0})$ наилучшая линейная оценка имеет вид

$$\hat{c} = (A^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}Z = \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi(x^j)\Phi^{\mathsf{T}}(x^j)}{\sigma^2(x^j)}\right]^{-1} \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi(x^j)\zeta(x^j, \omega^j)}{\sigma^2(x^j)}.$$

(предполагается, что точки x^j, $j = 1, \ldots, N \geqslant m$, выбраны так, чтобы существовали обратные матрицы.) При этом матрица ковариаций ошибок такой оценки

$$K\hat{c} = \mathcal{M}[(c - \hat{c})(c - \hat{c})^{\mathsf{T}}] = (A^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}A)^{-1},$$

дисперсия оценки регрессии

$$d(x) = \mathcal{M}[f(x) - \hat{c}^{\mathsf{T}}\Phi(x)]^2 = \Phi^{\mathsf{T}}(x)K\hat{c}\Phi(x)$$

и $\hat{c}^{\mathsf{T}}\Phi(x) \pm \sqrt{d(x)}/\varepsilon$ — коридор ошибок оценивания функции $f(x)$ с уровнем доверия $1 - \varepsilon^2$.

Оценка $\hat{c}$ реализуется, если дисперсия ошибок наблюдений известна хотя бы с точностью до множителя, т.е. $\sigma^2(x) = \sigma^2/\lambda(x)$, где σ^2 — неизвестная константа, а $\lambda(x)$ — известная функция эффективности эксперимента. Тогда

$$K\hat{c} = \sigma^2\left[\sum_{j=1}^{N} \Phi(x^j)\Phi^{\mathsf{T}}(x^j)\lambda(x^j)\right]^{-1}$$

и неизвестную σ^2 можно оценить по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - m}\sum_{j=1}^{N}[\zeta(x^j, \omega^j) - \hat{c}^{\mathsf{T}}\Phi(x^j)]^2.$$

Это позволяет (используя неравенство Чебышева) получить представление о доверительных интервалах наблюдений $\zeta(x^j, \omega^j)$, ошибках оценок $\hat{c}_i$ коэффициентов разложения c_i, о коридоре ошибок проекционной оценки $\hat{c}^{\mathsf{T}}\Phi(x)$ функции $f(x)$.

Набор узлов x^j, $j = 1, \ldots, N$, в которых получают наблюдения, называют *планом эксперимента.* В плане может быть всего $T \leqslant N$ разных узлов x^q, $q = 1, \ldots, T$, и в каждом по K_q наблюдений, $\sum\limits_{q=1}^{T} K_q = N$. Тогда план задается в виде $\varepsilon(N) = \{(x^1, K_1), \ldots, (x^T, K_T)\}$ или в нормированном виде $\tilde{\varepsilon}(N) = \{(x^1, p_1), \ldots, (x^T, p_T)\}$, где $p_q = K_q/N$ — частота попадания в точку x^q. План ε называют непрерывным, если вероятности попадания p_q полагают непрерывными. Непрерывный план может быть реализован, только если все p_qN целые.

Чтобы выделить в явном виде влияние величин σ^2 и N на ошибки оценок, вводят нормированную информационную матрицу

$$I_{\text{н}}(\varepsilon) = \frac{\sigma^2}{N}[K\hat{c}(\varepsilon)]^{-1} = \sum_{q=1}^{T} p_q \lambda(x^q)\Phi(x^q)\Phi^{\mathsf{T}}(x^q)$$

и нормированную дисперсию

$$d_{\text{н}}(x,\varepsilon) = \Phi^{\mathsf{T}}(x) I_{\text{н}}^{-1}(\varepsilon)\Phi(x) = \frac{d(x,\varepsilon)}{\sigma^2}N.$$

Планы ε, максимизирующие $\det I_{\text{н}}(\varepsilon)$, называют D-оптимальными; минимизирующие $\operatorname{Sp} I_{\text{н}}(\varepsilon)$ называют A-оптимальными; минимизирующие $\max\limits_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon)$ — минимаксными, а минимизирующие среднее на X значение $d_{\text{н}}(x,\varepsilon)$ — Q-оптимальными. Оптимальные планы известны лишь для достаточно простых моделей $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)$ и областей X.

Итерационный алгоритм, сходящийся к D-оптимальному плану, основан на одной из теорем эквивалентности. Она утверждает, что план ε^* D-оптимален тогда и только тогда, когда

$$\min_{\varepsilon}\max_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon)\lambda(x) = \max_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon^*)\lambda(x) = m.$$

Поэтому план ε можно улучшить, если добавить в него точку $\tilde{x}$, в которой

$$\max_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon)\lambda(x) = d_{\text{н}}(\tilde{x},\varepsilon)\lambda(\tilde{x}) > m.$$

1. Пусть задан невырожденный и не D-оптимальный план $\varepsilon_0 = \{(x^1,p_1),\ldots,(x^{T_0},p_{T_0})\}$, $T_0 > m$, пусть $s=0$.

2. Находим $I_{\text{н}}(\varepsilon_s)$, $d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)$, $\max\limits_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)\lambda(x) = d_{\text{н}}(\tilde{x}_s,\varepsilon_s)\lambda(\tilde{x}_s) = \mathrm{H}(\varepsilon_s)$, т.е. получаем план $\varepsilon(\tilde{x}_s) = \{(\tilde{x}_s,1)\}$ из одной точки.

3. Составляем план

$$\varepsilon_{s+1} = \varepsilon_s(1-\alpha_s^*) + \alpha_s^*\varepsilon(\tilde{x}_s) = \{(x^1,(1-\alpha_s^*)p_1),\ldots,(x^{T_s},(1-\alpha_s^*)p_{T_s},(x^{T_s+1},\alpha_s^*)\}.$$

где $x^{T_s+1} = \tilde{x}_s$; $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]$; $T_s + 1 = T_{s+1}$.

4. Увеличиваем номер итерации s на единицу и возвращаемся к пункту 2 с новым планом ε_{s+1} вместо ε_s.

Итерационный процесс продолжается, пока величина $\mathrm{H}(\varepsilon_s)$ не достигнет достаточно близкого к m значения. Тогда непрерывный план ε_s можно считать «почти» D-оптимальным.

При реализации этого алгоритма рекомендуется на каждой итерации выдавать значения $I_{\text{н}}(\varepsilon_s)$, $\det I_{\text{н}}(\varepsilon_s)$, $d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)$, $\tilde{x}_s$, $\mathrm{H}(\varepsilon_s)$, α_s^* и план ε_{s+1}, уделяя внимание точности обращения матриц и нахождения точек $\tilde{x}_s$. Может оказаться, что проще решать уравнения $\max\limits_{x\in X} d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)\lambda(x) = d_{\text{н}}(\tilde{x}_s,\varepsilon_s)\lambda(\tilde{x}_s)$ приближенно, например, вычисляя значения $d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)\lambda(x)$ в узлах достаточно мелкой сетки, покрывающей область возможных измерений X.

Если точкой $\tilde{x}_s$ наибольшего значения $d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)\lambda(x)$ окажется точка, уже входящая в план ε_s с весом p_q, значит, в план ε_{s+1} эта точка войдет один раз с весом $\alpha_s^* + (1-\alpha_s^*)p_q$. Может оказаться, что наибольшее значение $d_{\text{н}}(x,\varepsilon_s)\lambda(x)$ получится в нескольких точках области X. Тогда рекомендуется включать в новый план ε_{s+1} сразу все эти точки с одинаковыми весами, сумма которых равна α_s^*.

Если итерационный процесс сходится медленно, а закономерность появления узлов и изменения весов последовательности планов ε_s простая, то можно ускорить сходимость, экстраполировав процесс изменения планов ε_s с ростом числа итераций.

При точно заданном количестве наблюдений N реализовать оптимальный непрерывный план ε^* удается лишь приближенно. Дискретный план $\tilde{\varepsilon}(N)$ можно получить из непрерывного $\varepsilon^* = \{(x^1, p_1), \ldots, (x^T, p_T)\}$, моделируя с помощью датчика случайных чисел N случайных n-мерных величин, принимающих дискретные значения x^q, $q = 1, \ldots, T$, с вероятностями p_q. Можно получить дискретный план и другим способом. Следует распределить $N_0 < N$ наблюдений, взяв количество наблюдений K_q в точках x^q равным целой части $p_q N$, $q = 1, \ldots, T$. Оставшиеся $N - N_0 < T$ наблюдений добавить по одному к тем K_q, где дробная часть $p_q N$ наибольшая.

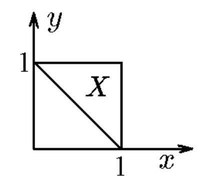
Необходимо проверить качество полученного таким образом дискретного плана $\tilde{\varepsilon}(N)$, вычислив $\det I_{\text{н}}(x, \tilde{\varepsilon}(N))$, $d_{\text{н}}(x, \tilde{\varepsilon}(N))$ и $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 x + \hat{c}_2 x^3 + \hat{c}_3 x^5$ регрессии функции $y(x) = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(-2) = -9.11$; $\zeta(-1) = -0.96$; $\zeta(-1.5) = -3.1$; $\zeta(0) = 0.29$; $\zeta(1) = 1.27$; $\zeta(2) = 9.02$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(-2) = \sigma^2(2) = \sigma^2(-1.5) = 0.01S$, $\sigma^2(0) = S$, $\sigma^2(-1) = \sigma^2(1) = 0.1S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2.5, 2.5]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 xy + c_3 x^2 + c_4 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



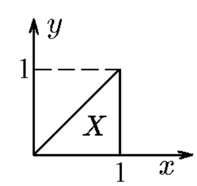
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/40$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 2

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y + \hat{c}_4 xy$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-2,-2) = 2.97$; $\zeta(2,2) = 4.29$; $\zeta(1,0) = 2.41$; $\zeta(0,0) = 3.50$; $\zeta(2,-2) = -0.51$; $\zeta(-2,2) = 5.37$, полученным со случайными независимыми несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x,y) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-2 \leqslant x \leqslant 2, -2 \leqslant y \leqslant 3\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = (1 + xy)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



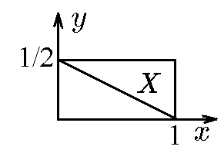
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/30$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 50$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 3

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1,-1) = 1.0$; $\zeta(1,1) = 2.12$; $\zeta(-1,1) = 0.22$; $\zeta(1,-1) = 2.71$; $\zeta(0,0) = 1.61$. Результаты получены со случайными независимыми ошибками, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии $\sigma^2(-1,1) = \sigma^2(1,1) = S$, $\sigma^2(0,0) = \sigma^2(1,-1) = \sigma^2(-1,-1) = 10S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



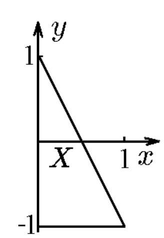
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1,\ldots,T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/50$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 2 \cdot 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 30$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 4

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 x^2$ регрессии функции $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(0) = 1.25$; $\zeta(1) = 2.94$; $\zeta(2) = 7.03$; $\zeta(-1) = -0.52$; $\zeta(-2) = 1.02$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(0) = S$, $\sigma^2(-1) = \sigma^2(1) = 4S$, $\sigma^2(2) = \sigma^2(-2) = 9S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2,3]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1/(1+x)$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



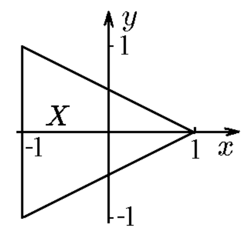
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1,\ldots,T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/150$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 5

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y + \hat{c}_4 xy$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1,-1) = -0.6$; $\zeta(1,1) = 0.84$; $\zeta(0,2) = -1.3$; $\zeta(0,0) = -0.1$; $\zeta(1,-1) = 2.43$; $\zeta(-1,1) = -2.25$, полученным со случайными независимыми несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x,y) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-2 \leqslant x \leqslant 2, -2 \leqslant y \leqslant 2\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



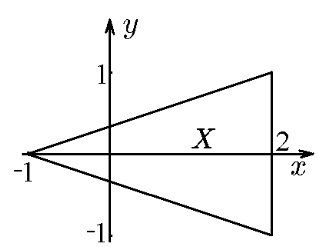
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/100$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 6

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 x^2$ регрессии функции $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(0) = 0.91$; $\zeta(1) = 0.83$; $\zeta(2) = 1.48$; $\zeta(3) = 5.12$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(0) = S$, $\sigma^2(1) = \sigma^2(3) = 0.3S$, $\sigma^2(2) = 0.1S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[0,5]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = (1 + |x|)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



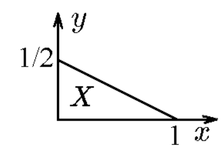
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \right); \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{2}{15} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \frac{1}{10} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \frac{1}{10} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/60$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 200$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 7

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 xy + \hat{c}_3 x^2$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 xy + c_3 x^2$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1,-1) = 2.91$; $\zeta(1,1) = 3.18$; $\zeta(-1,1) = -0.51$; $\zeta(1,-1) = -0.23$; $\zeta(0,0) = 1.14$. Результаты получены со случайными независимыми ошибками, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии $\sigma^2(-1,-1) = \sigma^2(1,1) = S$, $\sigma^2(-1,1) = \sigma^2(1,-1) = 0.1S$, $\sigma^2(0,0) = 0.01S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-1.5 \leqslant x \leqslant 1.5, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.6, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



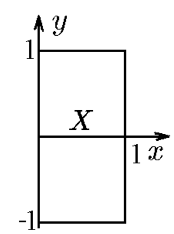
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1,\ldots,T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/40$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 50$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 8

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 x^2$ регрессии функции $f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1) = -0.09$; $\zeta(0) = 0.17$; $\zeta(1) = 1.88$; $\zeta(2) = 5.91$; $\zeta(4) = 10.88$. Результаты получены независимо со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 4]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 x + c_2 y + c_3 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = (|xy| + 2)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



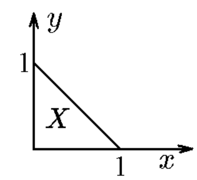
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1,\ldots,T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/30$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 1000$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 9

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 x + \hat{c}_2 x^3 + \hat{c}_3 x^5$ регрессии функции $y(x) = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(-2) = -988$; $\zeta(-1) = -161$; $\zeta(-0.5) = -38$; $\zeta(0.5) = 20$; $\zeta(1) = 156$; $\zeta(2) = 937$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(0.5) = \sigma^2(-1) = \sigma^2(1) = \sigma^2(-0.5) = 0.01S$, $\sigma^2(-2) = \sigma^2(2) = S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 2]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.8, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3 y^2 + c_4$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



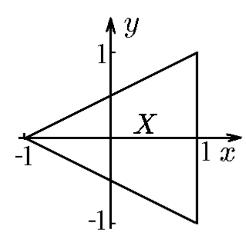
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/80$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 50$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 10

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x, y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y$ регрессии функции $f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(0, 1) = 20.3$; $\zeta(1, 0) = 19$; $\zeta(0.5, 0) = 12$; $\zeta(0, 0) = 26$; $\zeta(1, 1) = 35.4$; $\zeta(0, 0.5) = 18$, полученным со случайными независимыми несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x, y) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



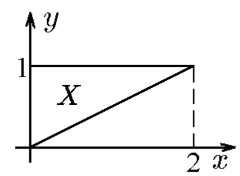
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/40$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 200$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 11

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 x^2$ регрессии функции $f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1) = 1.96$; $\zeta(0) = 0.88$; $\zeta(0.5) = 1.35$; $\zeta(1) = 2.09$; $\zeta(2) = 4.94$; $\zeta(-2) = 5.01$. Результаты получены независимо со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 2]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.9, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = (2 + xy)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



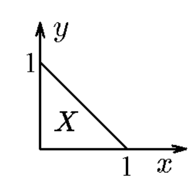
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{2}{9} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/30$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 150$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 12

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 xy + \hat{c}_3 y^2$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 xy + c_3 y^2$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-2,-2) = -2.17$; $\zeta(2,2) = -2.2$; $\zeta(-2,2) = 0.14$; $\zeta(2,-2) = 0.2$; $\zeta(0,0) = -0.98$. Результаты получены со случайными независимыми ошибками, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии $\sigma^2(0,0) = S$, $\sigma^2(-2,-2) = \sigma^2(2,2) = 100S$, $\sigma^2(-2,2) = \sigma^2(2,-2) = 10S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-2.5 \leqslant x \leqslant 2.5, -2 \leqslant y \leqslant 2\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



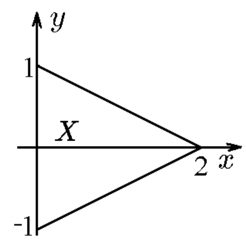
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \Big\{ \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big); \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \Big) \Big\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/40$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 1000$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 13

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x^2 + \hat{c}_3 x^4$ регрессии функции $y(x) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^4$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(-2) = 211$; $\zeta(-1) = 107$; $\zeta(0) = -7$; $\zeta(1) = 80$; $\zeta(2) = 234$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(-1) = \sigma^2(0) = \sigma^2(1) = 0.01S$, $\sigma^2(-2) = \sigma^2(2) = S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 3]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



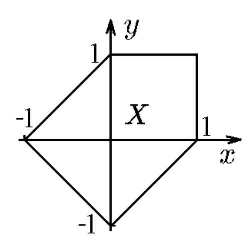
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/100$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 14

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x, y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y$ регрессии функции $f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-5, -5) = -0.06$; $\zeta(5, 5) = -1.68$; $\zeta(0, 0) = -0.81$; $\zeta(5, -5) = -3.03$; $\zeta(-5, 5) = 1.51$, полученным со случайными независимыми несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x, y) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-5 \leqslant x \leqslant 5, -5 \leqslant y \leqslant 6\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 + c_2 xy + c_3 x + c_4 y$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



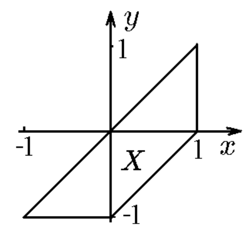
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/200$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 15

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 x^2 + \hat{c}_4 x^3$ регрессии функции $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1) = 5$; $\zeta(0) = -17$; $\zeta(1) = -108$; $\zeta(2) = -81$; $\zeta(3) = 2$, $\zeta(4) = 24$. Результаты получены независимо со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 5]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.6, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 x + c_2 y + c_3$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = (1 + |xy|)^{-1}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



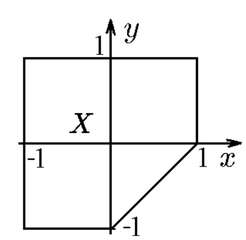
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/60$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 500$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 16

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x^3 + \hat{c}_3 y^3$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 x^3 + c_3 y^3$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1,-1) = 0.4$; $\zeta(1,1) = 2.95$; $\zeta(-1,1) = 1.49$; $\zeta(0,0) = 1.25$; $\zeta(1,-1) = 1.91$. Результаты получены со случайными независимыми ошибками, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии $\sigma^2(-1,-1) = \sigma^2(1,-1) = \sigma^2(-1,1) = S$, $\sigma^2(1,1) = \sigma^2(0,0) = 0.1S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.8, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



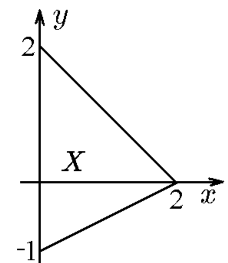
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/100$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 17

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 x + \hat{c}_2 x^2 + \hat{c}_3 x^4$ регрессии функции $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4$ по результатам её независимых наблюдений $\zeta(-2) = -94$; $\zeta(-1) = 38$; $\zeta(0) = 2$; $\zeta(1) = 11$; $\zeta(2) = -101$; $\zeta(3) = -891$. Результаты получены со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых $\sigma^2(-2) = \sigma^2(2) = S$, $\sigma^2(0) = \sigma^2(-1) = \sigma^2(3) = \sigma^2(1) = 10S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии в точке и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-2, 3]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.7, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



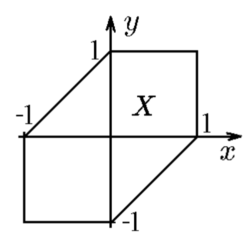
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/50$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 200$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 18

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x, y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x^2 + \hat{c}_3 y^2$ регрессии функции $f(x, y) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1, -1) = 18$; $\zeta(1, 1) = 22.1$; $\zeta(0, -1) = 19$; $\zeta(-1, 0) = 19.2$; $\zeta(0, 0) = 17$, полученным со случайными независимыми несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x, y) = \sigma^2 = \mathrm{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{-1.5 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.9, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1/2}$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



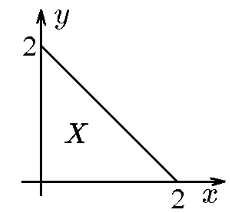
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/50$ или $\alpha_s^* = [\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m]/[m\mathrm{H}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 100$, получить для него $\mathrm{H}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 19

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{y}(x) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x^2 + \hat{c}_3 x^4$ регрессии функции $y(x) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^4$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(-1) = 0.98$; $\zeta(0) = 0.12$; $\zeta(1) = 1.01$; $\zeta(2) = 6.57$; $\zeta(3) = 2.43$. Результаты получены независимо со случайными несмещёнными ошибками, дисперсии которых одинаковы: $\sigma^2(x) = \sigma^2 = \text{const}$. Оценить σ^2, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов регрессии $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. На интервале $[-1, 3]$ построить графики полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.6, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 xy + c_3 x^2 + c_4 y^2$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



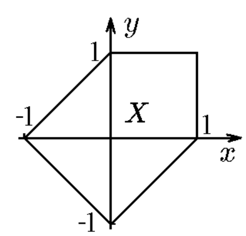
$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\text{Н}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/40$ или $\alpha_s^* = [\text{Н}(\varepsilon_s) - m]/[m\text{Н}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 2 \cdot 10^{-2}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 200$, получить для него $\text{Н}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.

Вариант № 20

1. Найти наилучшую линейную оценку $\hat{f}(x,y) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3 y + \hat{c}_4 xy$ регрессии функции $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ по результатам наблюдений этой функции $\zeta(0,0) = 0.07$; $\zeta(0,2) = 1.08$; $\zeta(2,0) = 0.93$; $\zeta(2,2) = 10.15$; $\zeta(1,1) = 2.16$. Результаты получены со случайными независимыми ошибками, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсии $\sigma^2(0,0) = \sigma^2(0,2) = \sigma^2(2,0) = S$, $\sigma^2(1,1) = \sigma^2(2,2) = 4S$. Оценить S, матрицу ковариаций ошибок коэффициентов $\hat{c}_i$, дисперсию оценки регрессии $M[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2$ и её вероятностную среднеквадратичную ошибку. В области $\{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ построить графики поверхностей (или их разрезы) полученной регрессии и коридора ошибок с уровнем доверия 0.5, отметив наблюдения и их доверительные интервалы.

2. Функциональная зависимость $f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ оценивается по её независимым наблюдениям со случайными ошибками, функция эффективности которых $\lambda(x,y) = 1$. Задана область возможных измерений X и невырожденный начальный план эксперимента



$$\varepsilon_0\{\bar{x}^q, p_q, q = 1, \ldots, T_0\} =$$
$$= \varepsilon_0 : \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8} \right); \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Итерационным методом построить непрерывный план эксперимента ε_s, близкий к D-оптимальному настолько, чтобы выполнялось одно из условий: $\text{Н}(\varepsilon_s) - m \leqslant m/100$ или $\alpha_s^* = [\text{Н}(\varepsilon_s) - m]/[m\text{Н}(\varepsilon_s) - m] \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$. На основе непрерывного плана ε_s построить дискретный план эксперимента $\tilde{\varepsilon}(N)$ с полным числом экспериментов $N = 200$, получить для него $\text{Н}(\tilde{\varepsilon}(N))$ и $\det I_{\text{н}}(\tilde{\varepsilon}(N))$.