Уравнение теплопроводности

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(x,t)$$

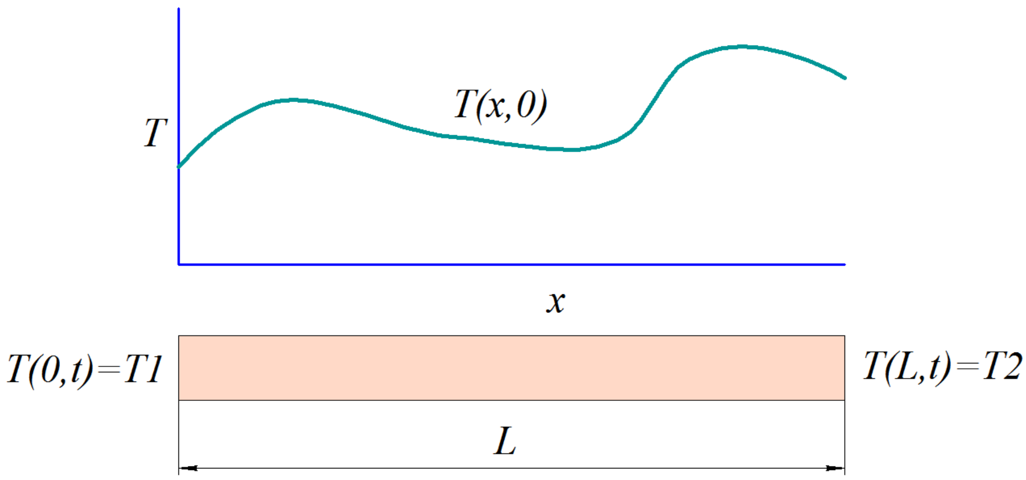
где T(x,t) – температура $[K]$; c – теплоемкость $\left[\frac{Дж}{кг\cdot K}\right]$; ρ – плотность $\left[\frac{кг}{м^3}\right]$; λ – коэффициент теплопроводности $\left[\frac{Вт}{м\cdot K}\right]$; f(x,t) – объемный источник\сток тепла;

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\left[\frac{Дж}{кг\cdot K}\cdot\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{K}{c}\right]=\left[\frac{H\cdot м}{кг\cdot K}\cdot\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{K}{c}\right]=\left[\frac{кг\cdot м\cdot м}{c^2\cdot кг\cdot K}\cdot\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{K}{c}\right]=\left[\frac{кг}{м\cdot c^3}\right]$$

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\left[\frac{Вт}{м\cdot K}\cdot\frac{K}{м^2}\right]=\left[\frac{Дж}{c\cdot м\cdot K}\cdot\frac{K}{м^2}\right]=\left[\frac{H\cdot м}{c\cdot м\cdot K}\cdot\frac{K}{м^2}\right]=\left[\frac{кг\cdot м\cdot м}{c^2\cdot c\cdot м\cdot K}\cdot\frac{K}{м^2}\right]=\left[\frac{кг}{м\cdot c^3}\right]$$

$$f(x,t)==\left[\frac{кг}{м\cdot c^3}\right]$$

Постановка задачи



$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(x,t)$$

Начальное условие:

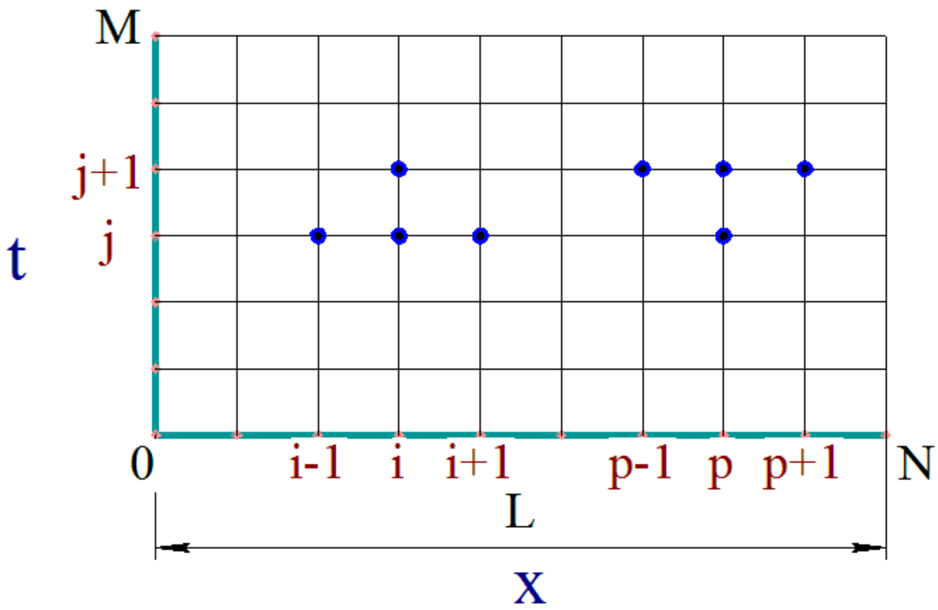
$$T(x,0)=F(x)$$

Граничные условия:

$$T(0,t)=T1=const$$
$$T(L,t)=T2=const$$

Разностные схемы

Для аппроксимации дифференциального уравнения разностным методом введем пространственно–временную сетку с координатами $x_i = i\cdot h$, $t_k = k\cdot\tau$ где h – шаг по пространству, τ – шаг по времени, $i=0..N$, $k=0..M$. Таким образом, вся расчетная область покрывается сеткой



Введем следующее обозначение: $T(x_i, t_k) = T_i^k$

Явная разностная схема: $c\rho \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2} \right)$

Решение: $T_i^{k+1} = T_i^k + \frac{\lambda\tau}{c\rho} \left(\frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2} \right) \quad i = 1..N-1$

$T_0^k = T1 = const$

$T_N^k = T2 = const$

Неявная разностная схема: $c\rho \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h^2} \right)$

Решение:

Приведем разностное выражение к виду $a \cdot T_{i-1}^{k+1} - c \cdot T_i^{k+1} + b \cdot T_{i+1}^{k+1} = -f$. Введем обозначение $D = \frac{\lambda \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot h^2}$.

$$[D] \cdot T_{i-1}^{k+1} - [2 \cdot D + 1] \cdot T_i^{k+1} + [D] \cdot T_{i+1}^{k+1} = -[T_i^k]$$

$$a = D$$
$$b = D$$
$$c = 2 \cdot D + 1$$
$$f = T_i^k$$

Предположим, что решение имеет вид $T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \beta_{i+1}$

Следовательно $T_{i-1} = \alpha_i T_i + \beta_i$

$$a \cdot (\alpha_i T_i + \beta_i) - c \cdot T_i + b \cdot T_{i+1} = -f$$

$$T_i = \frac{b}{c - a \cdot \alpha_i} \cdot T_{i+1} + \frac{f + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}$$

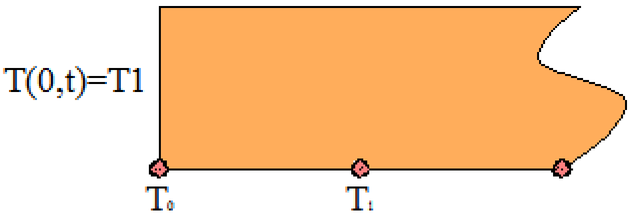
Сравнивая последнее выражение с выражением $T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \beta_{i+1}$, определим коэффициенты

$$\alpha_{i+1} = \frac{b}{c - a \cdot \alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}$$

Алгоритм расчета

1. Из граничного условия определяем коэффициенты α_1 β_1



$$\begin{cases} T_0 = \alpha_1 T_1 + \beta_1 \\ T_0 = T1 = const \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0;\ \ \beta_1 = T1$$

2. Далее производится расчет прогоночных коэффициентов

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{b}{c - a \cdot \alpha_i}; \\ \beta_{i+1} = \dfrac{f + a \cdot \beta_i}{c - a \cdot \alpha_i}; \end{cases} \quad i = 1..N-2$$

3. Из граничного условия определяется значение температуры

$$T_n = T2$$

4. Этап обратной прогонки, определение температуры в образце

$$T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i = n-1..0$$