

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

САРУЕВ Л.А.

**МЕХАНИКА**

(раздел "Теория механизмов и машин")

ЛЕКЦИИ

Томск 2010

Рецензент:

Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Института природных ресурсов Ан И-Кан

Конспект лекций по дисциплине “Механика” (раздел "Теория механизмов и машин") предназначен для подготовки студентов по направлению 280100 "Безопасность жизнедеятельности"

## Цель и задачи "Теории механизмов и машин"

Теория механизмов и машин - научная дисциплина (или раздел науки), которая изучает строение (структуру), кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом. (И.И.Артоболевский)

Цель ТММ - анализ и синтез типовых механизмов и их систем.

Задачи ТММ: разработка общих методов исследования структуры, геометрии, кинематики и динамики типовых механизмов и их систем.

Типовыми механизмами будем называть простые механизмы, имеющие при различном функциональном назначении широкое применение в машинах, для которых разработаны типовые методы и алгоритмы синтеза и анализа.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм. Этот механизм широко применяется в различных машинах: двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и насосах, станках, ковочных машинах и прессах. В каждом варианте функционального назначения при проектировании необходимо учитывать специфические требования к механизму. Однако математические зависимости, описывающие структуру, геометрию, кинематику и динамику механизма при всех различных применениях будут практически одинаковыми. Главное или основное отличие ТММ от учебных дисциплин изучающих методы проектирования специальных машин в том, что ТММ основное внимание уделяет изучению методов синтеза и анализа, общих для данного вида механизма, независящих от его конкретного функционального назначения. Специальные дисциплины изучают проектирование только механизмов данного конкретного назначения, уделяя основное внимание специфическим требованиям. При этом широко используются и общие методы синтеза и анализ, которые изучаются в курсе ТММ.

# Глава 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

## 1.1 Основные понятия и определения

Любая механическая система: механизм, машина, машинный агрегат состоят лишь из звеньев и кинематических пар.

Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующая одну жесткую систему, называется *подвижным звеном* механизма. Все неподвижные детали, образующие одну жесткую систему, называются неподвижным звеном или *стойкой*.

Соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение, называется *кинематической парой*.

Система звеньев, связанных кинематическими парами, называется *кинематической цепью*.

Кинематическая цепь, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения других звеньев, называется *механизмом*.

Устройство, выполняющее механическое движение, предназначенное для преобразования энергии, материалов или информации, называется *машиной*.

На рисунке 1 показана схема кривошипно-ползунного механизма. Этот механизм содержит подвижные звенья: кривошип **1**, шатун **2** и ползун **3**, а также стойку **0**. На рисунке обозначены кинематические пары: три вращательные: **A** (соединение кривошипа и стойки), **B** (соединение кривошипа и шатуна) и **C** (соединение шатуна и ползуна) и одна поступательная – (соединение ползуна со стойкой).

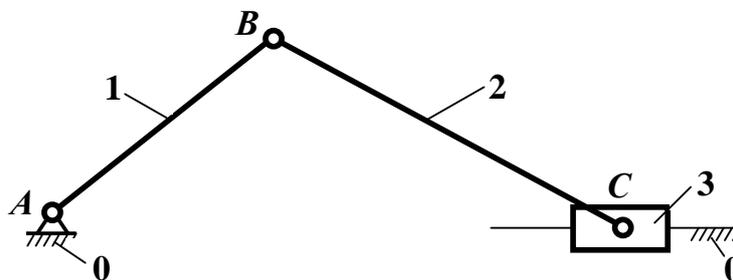


Рисунок 1 – Кривошипно-ползунный механизм

Из определения звена как твердого тела, входящего в состав механизма, следует, что это тело является несвободным, оно

взаимодействует с другими звеньями, которые ограничивают его движения. Взаимодействия звеньев могут быть различными – в виде соприкосновений, соединений, зацеплений и т.п. Эти взаимодействия называются *связями*.

## 1.2 Степени свободы и условия связей

Числом степеней свободы называется число независимых перемещений, которыми обладает звено механизма (рисунок 2).

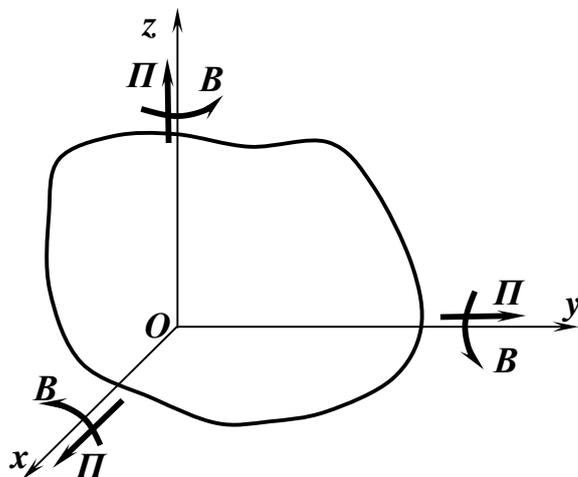


Рисунок 2 – Число степеней свободы твердого тела

Свободное тело обладает шестью степенями свободы, это три вращательных движения вокруг всех трех осей декартовой системы координат (**ВВВ**) и три поступательных движения вдоль тех же осей (**ППП**). Для свободного твердого тела можно записать число движений как **ВПВПВП**, т.е. вращательное и поступательное движения относительно трех осей, последовательно.

Несвободное тело имеет число степеней свободы

$$H = 6 - S,$$

где  $S$  – условия связей (ограничения, наложенные на относительные движения звеньев, образующих кинематическую пару).

При  $H = 6$  – твердое тело движется свободно. Движение таких жестких, не деформируемых тел изучается в теоретической механике.

При  $H = 0$  – рассматривается неподвижное твердое тело, в том числе деформируемое. Такие тела изучаются в курсе теоретической механики и в курсе сопротивления материалов.

В теории механизмов и машин изучаются подвижные тела, имеющие число степеней свободы  $1 \leq H \leq 5$ .

### 1.3 Основы теории кинематических пар по Дворникову Л.Т.

#### 1.3.1 Геометрические элементы звеньев

Геометрические связи звеньев могут осуществляться в точках, по линиям, по поверхностям, что определяется геометрией тех частей звеньев, которыми они контактируют друг с другом. Участки поверхностей звеньев, которые входят в непосредственный контакт с другими звеньями, названы профессором Дворниковым Л.Т. *геометрическими элементами звеньев* [1]. То, что взаимодействие звеньев может происходить в точке, по линии или по поверхности не является основанием утверждать, что геометрическими элементами могут быть точки или линии. Геометрическими элементами звеньев всегда являются поверхности. В процессе относительного движения звеньев в контакт могут входить другие точки, другие линии или другие участки поверхностей.

Из теории поверхностей известно (рисунок 3), что к любой точке поверхности ( $M$ ) можно провести касательную плоскость и на ней отыскать два главных взаимно перпендикулярных направления (**I-I** и **II-II**), одному из которых соответствует максимальная ( $k_1 = 1/\rho_1$ ), а другому минимальная ( $k_2 = 1/\rho_2$ ) кривизны нормальных сечений в данной точке поверхности. Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , соответственно, минимальный и максимальный радиусы кривизны в точке  $M$  плоских кривых, появляющихся в нормальных сечениях поверхности по главным направлениям. Кривизны могут быть разного знака. Положительный знак определяет выпуклость кривой, а отрицательный знак – вогнутость.

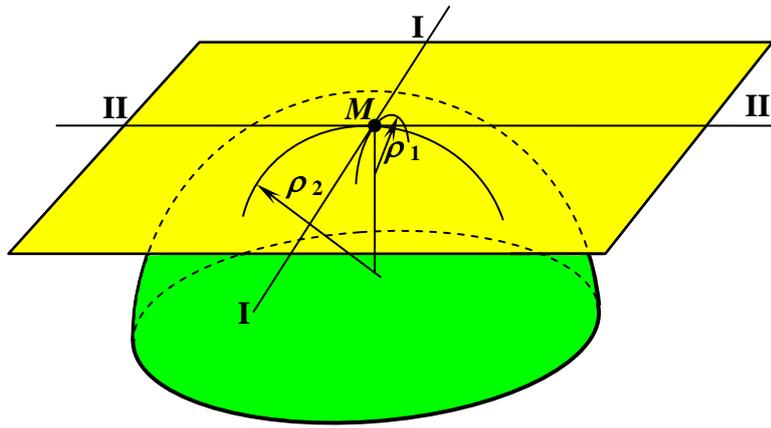


Рисунок 3 – Касательная плоскость к точке  $M$  поверхности

Произведение главных кривизн точки поверхности называют полной (гауссовой) кривизной

$$K = k_1 \cdot k_2. \quad (1)$$

В зависимости от значения  $K$  различают эллиптические, гиперболические и параболические точки поверхности.

Эллиптической называют такую точку поверхности (рисунок 4), для которой гауссова кривизна положительна, т.е. обе главные кривизны одного знака

$$K = k_1 \cdot k_2 > 0, \quad (2)$$

точка поверхности называется гиперболической, если гауссова кривизна отрицательна, т.е. главные кривизны разного знака

$$K = k_1 \cdot k_2 < 0, \quad (3)$$

а в том случае, когда гауссова кривизна оказывается равной нулю, точку поверхности называют параболической, для нее

$$K = k_1 \cdot k_2 = 0. \quad (4)$$

Если все точки поверхности или ее рассматриваемые куски удовлетворяют условию (2), то такую поверхность называют эллиптической, если условию (3), то гиперболической и если условию (4) – параболической.

В практике машиностроения для образования кинематических пар и сложных кинематических соединений используются исключительно простые поверхности, т.е. такие, которые не

меняют знака гауссовой кривизны в пределах зоны контакта с сопряженными поверхностями.

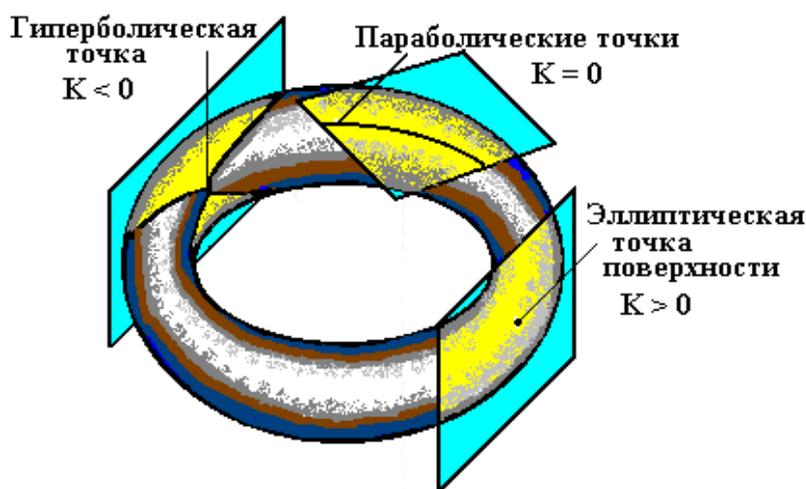


Рисунок 4 – Кривизны точек поверхности

Неравенство (2) может быть выполнено, когда каждая из главных кривизн положительна

$$k_1 > 0 \text{ и } k_2 > 0. \quad (5)$$

Согласно этому случаю поверхность или ее кусок будут двояковыпуклыми. Примерами простых двояковыпуклых поверхностей с эллиптическими точками могут служить эллипсоид, в частности, сфера, эллиптический параболоид, двуполостный гиперболоид. Геометрический элемент звена, выполненный согласно (5), принято называть условно “шаром” (обозначение – *Ш*).

Неравенство (2) соблюдается также, когда каждая из главных кривизн отрицательна

$$k_1 < 0 \text{ и } k_2 < 0. \quad (6)$$

В этом случае кусок поверхности с эллиптическими точками будет двояковогнутым. Примером таких поверхностей являются внутренние поверхности эллипсоида, сферы, эллиптического параболоида и т.п. Звено, геометрический элемент которого выполнен в соответствии с условием (6), имеет соприкасающуюся двояковогнутую внутреннюю поверхность, которая названа “лункой” (*Л*).

В гиперболической точке по формуле (3) главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  должны быть разных знаков. Это означает, что центры кривизн  $C_1$  и  $C_2$  лежат по разные стороны касательной плоскости, а с ними,

следовательно, и плоские кривые в сечениях поверхности по главным направлениям будут лежать с разных сторон касательной плоскости (рисунок 5).

Свяжем кривизны с одним из главных направлений. Если принять, что одна кривизна положительна и по модулю больше другой, отрицательной, т.е.

$$k_1 > 0, \quad k_2 < 0, \quad (7)$$

то такую поверхность принято называть выпукло-вогнутой.

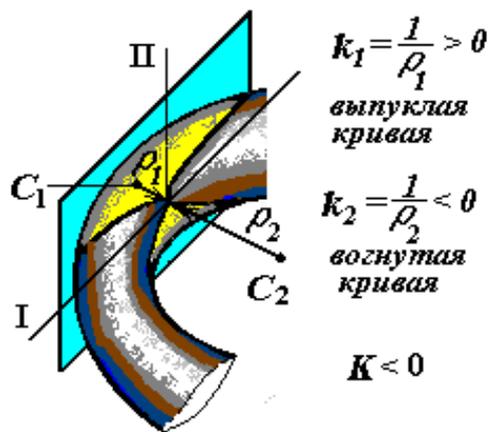


Рисунок 5 – Гиперболическая точка поверхности

Примерами простых выпукло-вогнутой поверхностей служат: однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид, катеноид, внутренняя поверхность тора и т.п. Геометрический элемент звена, выполненный в виде выпукло-вогнутой поверхности, называется “корсетом” ( $K$ ).

При условии, когда

$$k_1 < 0, \quad \text{а} \quad k_2 > 0, \quad (8)$$

описываемая поверхность будет вогнуто-выпуклой. Примерами таких поверхностей являются внутренние поверхности однополостного гиперболоида, катеноида и т.п.

Геометрические элементы звеньев, выполненные по условию (8), принято называть “седлом” ( $C$ ).

Поверхности, образованные параболическими точками согласно условию (4) при  $K = 0$ , могут быть выполнены по трем различным условиям. Рассмотрим их.

Если в параболической точке одна из главных кривизн, например  $k_2$ , обращается в нуль, а другая кривизна положительна

$$k_1 > 0, \quad k_2 = 0, \quad (9)$$

то вся простая поверхность станет выпуклой линейчатой. Примером такой поверхности может служить цилиндр как круговой, так и эллиптический, параболический, гиперболический, а также конус с образующей в виде прямой линии. Геометрический элемент звена, выполненный согласно условию (9), назван “цилиндром” (**Ц**).

Если при  $k_2 = 0$ , первую главную кривизну принять отрицательной

$$k_1 < 0, \quad k_2 = 0, \tag{10}$$

то полученные простые поверхности станут вогнутыми линейчатыми. Примерами таких поверхностей служат внутренние поверхности круговых, эллиптических и др. цилиндров. Геометрический элемент звена, исполненный в виде внутренних вогнутых поверхностей, назван “желобом” (**Ж**).

Возможна и третья ситуация, удовлетворяющая условию (4), а именно, когда каждая из главных кривизн в отдельности равна нулю

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0. \tag{11}$$

Поверхность, выполненная согласно условию (11), называется поверхностью уплощения. Этому условию удовлетворяет плоскость (на плоскости главные направления неопределенны в каждой точке поверхности). Геометрический элемент звена, выполненный в виде плоскости и являющийся частью твердого тела, принято называть “параллелепипедом” (**П**).

Итак, геометрическими элементами звеньев могут быть следующие семь поверхностей: шар, лунка, корсет, седло, цилиндр, желоб и параллелепипед. Условное обозначение и условное изображение геометрических элементов приведено на рисунке 6.

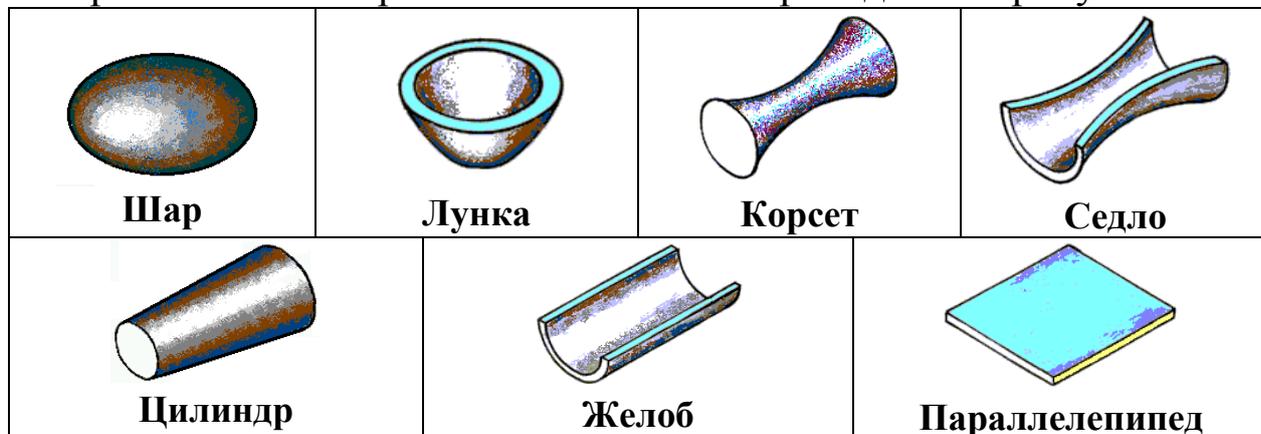


Рисунок 6 – Условное изображение геометрических элементов

## звеньев

- наложимыми являются соприкасающиеся, но не пересекающиеся поверхности, имеющие общие точки, линии или поверхности;

- касание двух поверхностей может происходить в одной точке, по одной линии или по одной поверхности.

В таблице 1 представлены все возможные элементарные геометрические связи (кинематические пары), полученные наложением геометрических элементов звеньев, выполненных в соответствии с рисунком 6.

Из таблицы 1 видно, что таких связей всего 15. Шар с цилиндром, шар с шаром, шар с корсетом, шар на плоскости, корсет с корсетом, корсет с цилиндром и цилиндр с цилиндром допускают пять относительных движений звеньев. Шар в седле, шар в желобе, цилиндр в седле и цилиндр на плоскости допускают по четыре независимых относительных движения. Шар в лунке и параллелепипед на плоскости – по три, и одна пара – цилиндр в желобе, допускает два движения. Отметим, что при общем рассмотрении поверхностей (рисунок 6) нельзя создать кинематические пары, обеспечивающих единственное относительное движение – вращательное или поступательное.

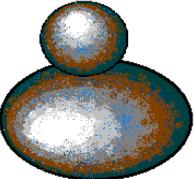
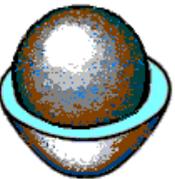
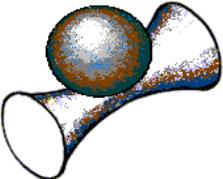
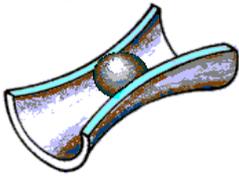
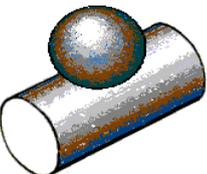
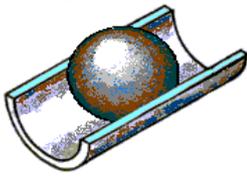
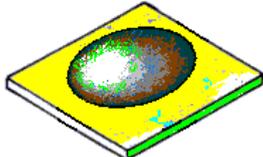
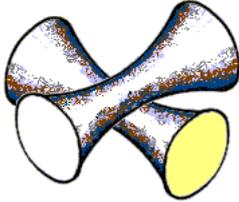
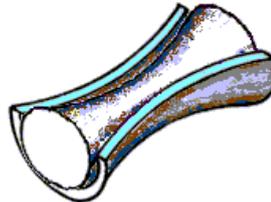
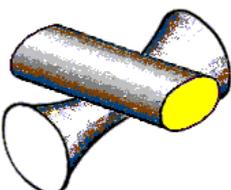
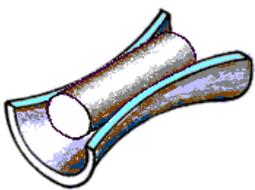
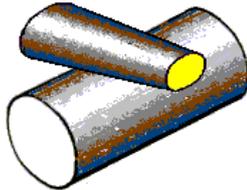
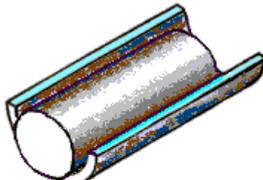
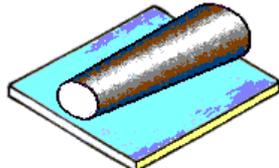
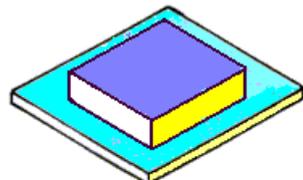
С точки зрения использования в технике тех кинематических пар, которые приведены в таблице 1, недостаточно. Определим все возможные и необходимые для практики комплексы относительных движений. Как это было показано выше, полный состав движений свободного твердого тела в пространстве будет **ВПВПВ**. Можно добиться устранения одного, двух, трех, четырех или пяти независимых относительных движений.

Формально, при использовании пяти из шести возможных компонентов движения, возможно получение двух комбинаций **ВПВПВ** и **ВПВПВ**, при четырех – четыре: **ВПВВ**, **ВППВ**, **ВПВП** и **ВППВ** при трех – шесть: **ВВВ**, **ВПВ**, **ПВВ**, **ВПП**, **ППВ** и **ППВ**, при двух – четыре: **ВВ**, **ВП**, **ПВ** и **ПП** и при использовании одного компонента – две: **В** и **П**, т.е. всего 18.

Исключим из этого числа все комбинации с **ППП**, так как невозможно в одной паре обеспечить контакт звеньев при трех относительных поступательных движениях одновременно. Действительно, если звенья соприкасаются между собой, то

относительное поступательное движение в направлении общей нормали к геометрическим элементам неизбежно разорвет контакт и кинематическая пара перестанет существовать, т.е. нельзя подобрать такие геометрические элементы звеньев, которые бы при соприкосновении допускали три независимых поступательных движения.

Таблица 1 – Элементарные геометрические связи

Шар – шар 	Шар – лунка 	Шар – корсет 
Шар – седло 	Шар – цилиндр 	Шар – желоб 
Шар – параллелепипед 	Корсет – корсет 	Корсет - седло 
Корсет – цилиндр 	Седло – цилиндр 	Цилиндр – цилиндр 
Цилиндр–желоб 	Цилиндр – параллелепипед 	Параллелепипед – параллелепипед 

В таблице 2 представлены все возможные, отличающиеся по числу и виду, комплексы независимых относительных движений

соприкасающихся звеньев. Принято считать, что сочетание движений в виде **ВП** означает возможность одновременного вращательного и поступательного движений относительно одной из трех осей декартовой системы координат. Аббревиатура **ВПВП** означает, что данная кинематическая пара позволяет осуществлять вращательные и поступательные движения относительно двух осей. Сочетание же **ПВ** означает, что движения **В** и **П** осуществляются относительно разных осей. Остальные сочетания вполне понятны – **ВВ** (либо **ПП**) показывает, что вращательные (поступательные) движения совершаются относительно разных осей, так как не могут совершаться одинаковые движения относительно одной и той же оси.

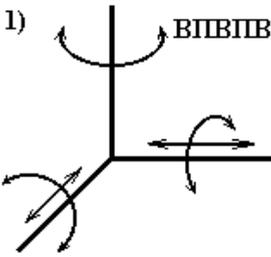
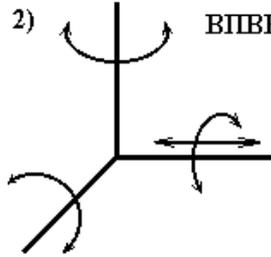
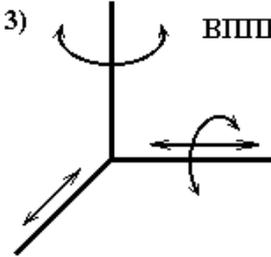
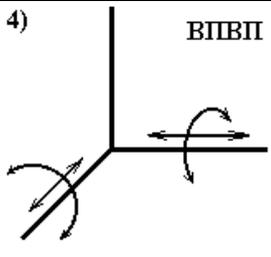
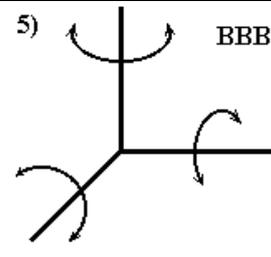
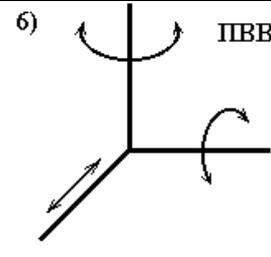
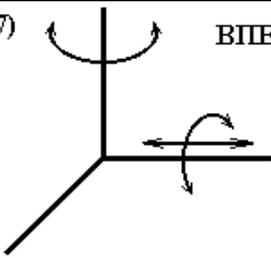
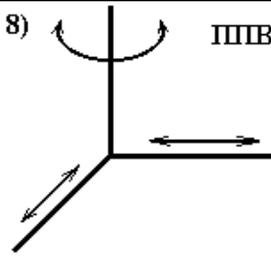
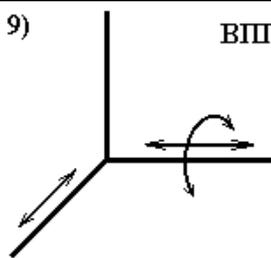
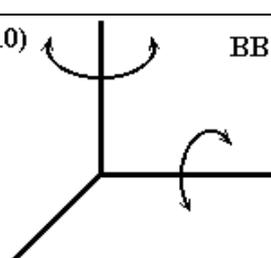
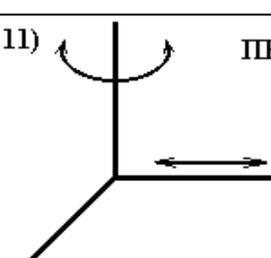
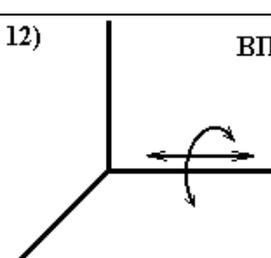
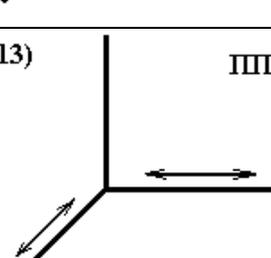
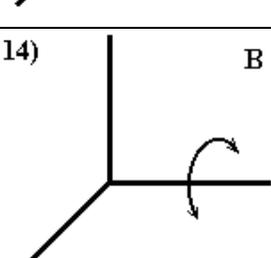
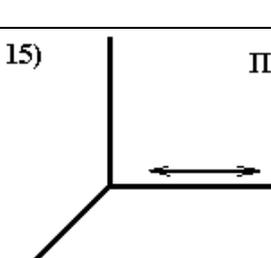
Итак, единственно возможный комплекс из пяти независимых относительных движений **ВПВПВ** реализуется парой “шар-параллелепипед”, но он может быть реализован также связями: шар-шар, шар-цилиндр и цилиндр-цилиндр. Такую пару называют парой первого класса.

Рассмотрим теперь отличия пар, обеспечивающих одинаковое число относительных движений. Пары второго класса с двумя вращательными и двумя поступательными движениями **ВПВП** и **ВПВВ** отличаются тем, что в первой паре два сочетания **ВП**, означающие, что вращательные и поступательные движения осуществляются относительно двух осей координат, а во второй – один комплекс **ВП**, а другой **ПВ**, следовательно, относительно одной оси осуществляется и вращательное и поступательное движения, относительно второй оси – поступательное движение, а относительно третьей оси – вращательное. Пары третьего класса, **ВПВ** и **ПВВ**, отличаются между собой тем, что в первом случае вращательное и поступательное движения совершаются относительно одной оси координат, а второе вращательное движение происходит относительно любой из двух других осей координат; во втором случае все три движения будут осуществляться относительно трех разных осей координат. То же относится и к парам **ППВ** и **ВПВ**, **ВП** и **ПВ**.

Из таблицы 2 видно, что всего комплексов независимых движений в кинематических парах, которые могут быть востребованы практикой – пятнадцать.

Из них с пятью относительными движениями – один (**ВПВП**), с четырьмя – три (**ВПВВ**, **ВППВ** и **ВПВП**), с тремя – пять (**ВВВ**, **ПВВ**, **ВПВ**, **ППВ** и **ВПП**), с двумя – четыре (**ВВ**, **ПВ**, **ВП** и **ПП**) и с одним – два (**В** и **П**).

Таблица 2 – Комплексы независимых относительных движений

1)  <b>ВПВП</b>	2)  <b>ВПВВ</b>	3)  <b>ВППВ</b>
4)  <b>ВПВП</b>	5)  <b>ВВВ</b>	6)  <b>ПВВ</b>
7)  <b>ВПВ</b>	8)  <b>ППВ</b>	9)  <b>ВПП</b>
10)  <b>ВВ</b>	11)  <b>ПВ</b>	12)  <b>ВП</b>
13)  <b>ПП</b>	14)  <b>В</b>	15)  <b>П</b>

### 1.3.2 Одноконтатные кинематические пары

Одноконтактной кинематической парой принято называть такую, в которой звенья соприкасаются в одной точке, по одной линии или по одной поверхности. Все соединения звеньев, приведенные в таблице 1, одноконтактные. Совместное изучение таблиц 1 и 2 позволяет сделать следующие выводы:

1. Не все требуемые практикой комплексы движений (таблица 2) могут быть реализованы кинематическими парами (таблица 1). Таких пар всего семь: одна пятиподвижная (шар-параллелепипед – поз.1, таблицы 2), три – четырехподвижные (шар-желоб, цилиндр-параллелепипед и корсет-корсет – поз. 2, 3 и 4 таблицы 2), две пары трехподвижные (шар-лунка и параллелепипед-параллелепипед – поз. 5 и 8) и одна пара двухподвижная (цилиндр-желоб – поз. 12).

2. Чтобы создать недостающие восемь одноконтактных пар – позиции 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14 и 15 таблицы 2, необходимо использовать специальный прием, который позволил бы изменить число относительных движений в кинематических парах, приведенных в таблице 1.

Для этих целей наложим на некоторые из пар (таблица 1) особые внутренние геометрические условия, – связи, обусловленные особыми геометрическими параметрами, формой или относительным расположением геометрических элементов звеньев.

Так, например, на кинематическую связь цилиндр-желоб, допускающую два относительных движения (*ВП*) – вращение вокруг и перемещение вдоль одной геометрической оси, можно наложить дополнительное условие – выполнить и цилиндр и желоб не круговыми, а эллиптическими (рисунок 7).

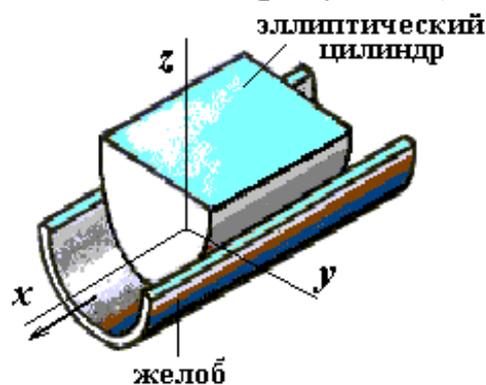


Рисунок 7 – Поступательная пара

Тогда вращательное движение одного звена относительно другого станет невозможным и пара окажется одноподвижной, а именно поступательной (**II**).

Возможно уменьшение числа относительных движений также в кинематической паре корсет-седло. Если поверхности корсета и седла выполнить конгруэнтными (совпадающими), то пара из трехподвижной превратится во вращательную, одноподвижную (рисунок 8).

Возможно создание кинематических пар с заданным комплексом относительных движений путем искусственного требуемого относительного расположения геометрических элементов звеньев. Например, если на элементарную геометрическую связь цилиндр-цилиндр наложить условие соприкосновения по линии (соответственно зацеплению зубьев цилиндрических колес или катков фрикционной передачи), то пара из пятиподвижной превращается в трехподвижную (рисунок 9) с комплексом движений **ВПП**.

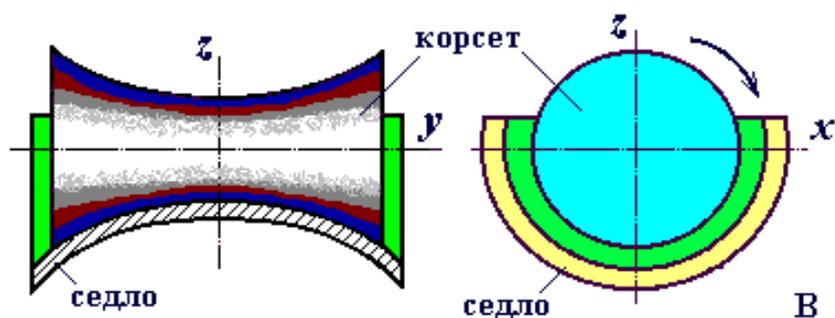


Рисунок 8 – Вращательная пара

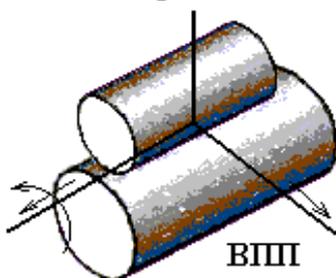


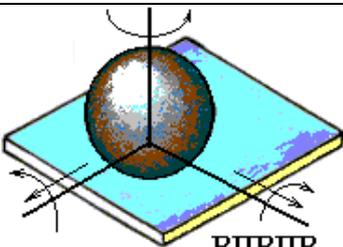
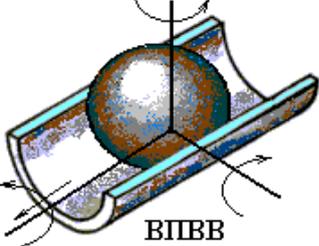
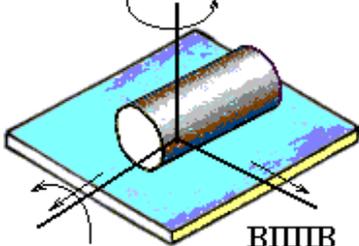
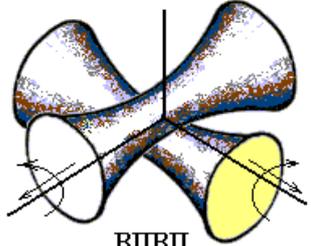
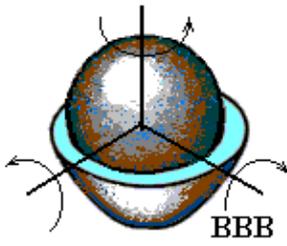
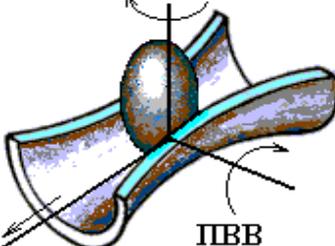
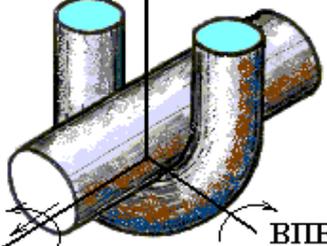
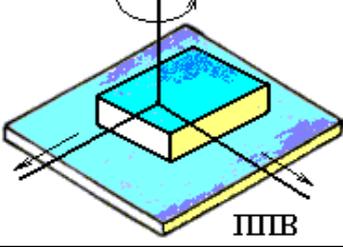
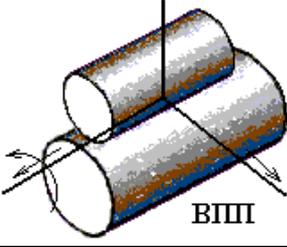
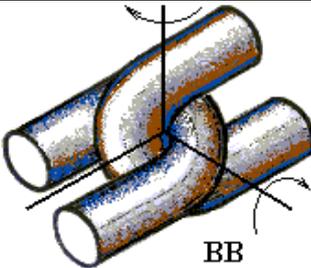
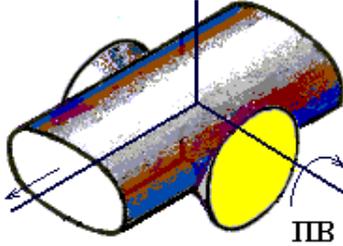
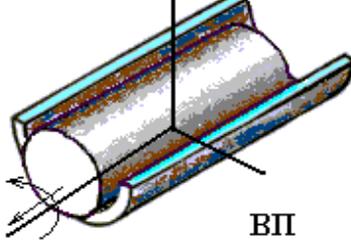
Рисунок 9 – Трехподвижная пара

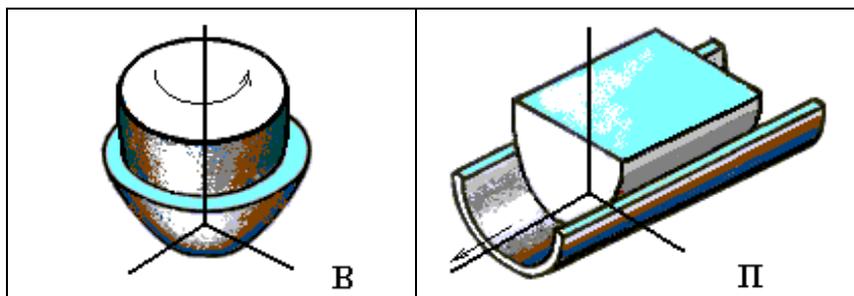
С использованием рассмотренного выше метода наложения внутренних связей на кинематические пары, приведенные в таблице 1, можно синтезировать дополнительно семь одноконтактных пар, а именно с комплексами движений: **ПВВ**, **ВПВ**, **ВПП**, **ВВ**, **ПВ**, **В** и **II**. Двухподвижная пара с комплексом

движений *III* в одноконтантном исполнении не может быть реализована.

Все четырнадцать одноконтантных пар, выделенные в классы по числу относительных движений звеньев, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Одноконтантные кинематические пары

I класса		
 ВПВВ		
II класса		
 ВПВВ	 ВПВВ	 ВПВВ
III класса		
 ВВВ	 ПВВ	 ВПВ
 ППВ	 ВПП	
IV класса		
 ВВ	 ПВ	 ВП
V класса		



### 1.3.3 Синтез многоконтактных кинематических пар

Приведенных в таблице 3 видов одноконтактных кинематических пар, по существу, вполне достаточно (исключение составляет пара *III*), чтобы реализовать на практике все необходимые комплексы относительных движений. Иными словами, любую механическую систему можно создать, используя лишь приведенные в таблице 3 четырнадцать видов кинематических пар. Однако в практике машиностроения могут встречаться особые требования, когда становится необходимым совмещение одноконтактных связей в сложные многоконтактные кинематические пары [2].

Два шара, соединенные в единое звено и помещенные на плоскость, не могут дать пять относительных движений. Такая пара становится двухконтактной и четырехподвижной. Шар, помещенный на две пересекающиеся плоскости, также получает второй контакт и образует с плоскостями четырехподвижную пару.

Причем эти два случая не дублируют друг друга. Звено в виде двух связанных шаров на параллелепипеде позволяет получить комплекс движений *ВППВ*, а шар, опирающийся на две плоскости, – комплекс *ВПВВ*.

За количественную меру отличия различных кинематических пар принято число связей в паре –  $S$ . Обозначив число условий связи в парах различных классов как  $S_I$  – для односвязных или пятиподвижных пар,  $S_{II}$  – для пар четырехподвижных,  $S_{III}$  – пар трехподвижных,  $S_{IV}$  – пар двухподвижных и  $S_V$  для одноподвижных пар, можно осуществить синтез многоконтактных кинематических пар всех пяти классов.

Очевидно, что кинематическая пара первого класса с одним условием связи  $S_I$  не может быть создана с числом контактов более одного. Неодноконтактные кинематические пары второго класса с  $S_{II}$  могут быть созданы лишь как двухконтактные по условию

$$S_I + S_I \rightarrow S_{II}, \quad (12)$$

где слева представлены одноконтактные пары.

Для неодноконтактных пар третьего класса с  $S_{III}$  можно создать два условия синтеза, а именно

$$S_I + S_{II} \rightarrow S_{III}, \quad (13)$$

$$S_I + S_I + S_I \rightarrow S_{III}. \quad (14)$$

По (13) могут быть созданы двухконтактные пары, по (14) – трехконтактные.

Повторим, что в этих зависимостях слева представлены лишь одноконтактные пары.

Рассмотрим возможности образования неодноконтактных пар четвертого класса или двухподвижных. Кроме трех одноконтактных кинематических пар этого класса, показанных в таблице 3, возможно создание двухконтактных пар в соответствии с условиями

$$S_I + S_{III} \rightarrow S_{IV}, \quad (15)$$

$$S_{II} + S_{II} \rightarrow S_{IV}, \quad (16)$$

трехконтактных

$$S_{II} + S_I + S_I \rightarrow S_{IV} \quad (17)$$

и четырехконтактных

$$S_I + S_I + S_I + S_I \rightarrow S_{IV}. \quad (18)$$

Важно отметить, что по этим зависимостям возможно создавать кинематические пары, позволяющие осуществлять комплекс движений *III*, чего невозможно достичь в одноконтактном исполнении.

Одноподвижные кинематические пары или пары первого класса, помимо двух видов в одноконтактном исполнении (таблица 3), могут создаваться как двухконтактные по зависимостям

$$S_{IV} + S_I \rightarrow S_V \quad (19)$$

и

$$S_{III} + S_{II} \rightarrow S_V, \quad (20)$$

как трехконтактные по зависимостям,

$$S_{III} + S_I + S_I \rightarrow S_V \quad (21)$$

и

$$S_{II} + S_{II} + S_I \rightarrow S_V, \quad (22)$$

как четырехконтактные по зависимости

$$S_{II} + S_I + S_I + S_I \rightarrow S_V \quad (23)$$

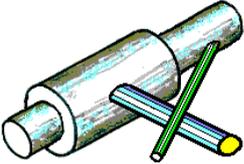
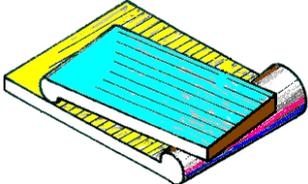
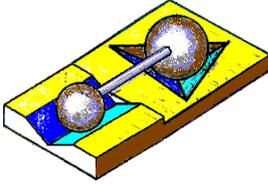
и как пятиконтактные по зависимости

$$S_I + S_I + S_I + S_I + S_I \rightarrow S_V \quad (24)$$

Если учесть, что в качестве исходных одноконтактных пар могут использоваться пары согласно таблице 3, а именно пара  $S_I$  – одна, пары  $S_{II}$  – три, пары  $S_{III}$  – пять, и пары  $S_{IV}$  – три, то по приведенным формулам (12)...(24) легко сосчитать общее число возможных многоконтактных пар различных классов. Каждая из многоконтактных пар формально может быть реализована в видах, обеспечивающих все возможные комплексы движений, а именно: для четырехподвижной пары в трех видах: **ВПВВ**, **ВППВ** и **ВПВП**; для трехподвижных в пяти видах: **ВВВ**, **ПВВ**, **ВПВ**, **ППВ** и **ВПП**; для двухподвижных в четырех: **ВВ**, **ПВ**, **ВП** и **ПП**; для одноподвижных пар в двух видах **В** и **П**.

В качестве примеров синтеза многоконтактных кинематических пар приведем три, показанные на рисунке 10. Двухконтактная одноподвижная поступательная пара (рисунок 10,а) создана по условию (20) из элементарных кинематических связей цилиндр-желоб (таблица 1, поз.13) и цилиндр-цилиндр (таблица 1, поз.12).

Двухконтактная двухподвижная пара с комплексом движений **ПП** (рисунок 10,б) создана согласно условию (16) из двух элементарных связей цилиндр-параллелепипед, причем один из “цилиндров” выполнен в виде конуса.

а) $S_{IV} + S_I \rightarrow S_V$	б) $S_{II} + S_{II} \rightarrow S_{IV}$	с) $S_I + S_I + S_I + S_I + S_I \rightarrow S_V$
		
Рисунок 10 – Многоконтактные кинематические пары		

Пятиконтактная вращательная пара выполнена согласно условию (24) из одинаковых связей шар-параллелепипед (рисунок 10,с).

Рассмотрим пример синтеза одноподвижной пары, с использованием двух связей  $S_{IV}$  (цилиндр-желоб) и  $S_I$  (шар-плоскость).

Так как одноподвижные пары могут быть двух видов, то в зависимости от расположения связи  $S_I$  в синтезируемой паре можно устранить поступательное, как показано на рисунке 11,а, либо вращательное, как показано на рисунке 11,б, движение.

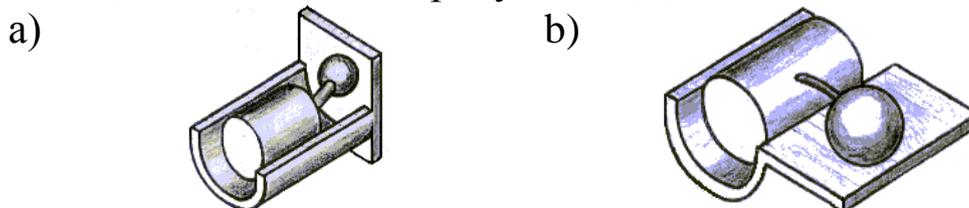


Рисунок 11 – Виды пар, синтезируемых из двух связей

Согласно условию (24) могут быть синтезированы вращательная и поступательная пары (рисунок 12,а и 12,б).

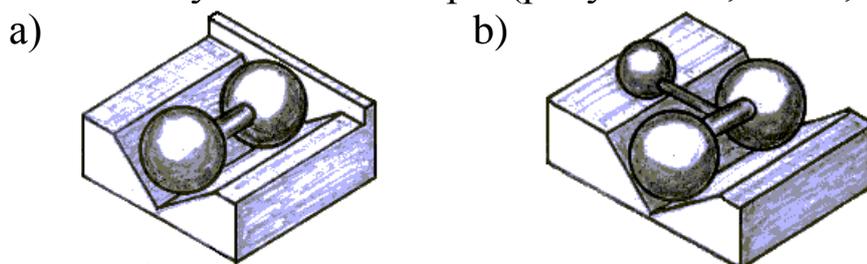


Рисунок 12 – Виды пар, синтезируемых из пяти связей

Пусть задано условие: синтезировать четырехконтактную двухподвижную кинематическую пару, используя только связи  $S_I$  шар-плоскость (**ВПВП**). Очевидным становится, что таких пар может быть четыре вида: **ВВ**, **ВП**, **ПВ** и **ПП**.

При синтезе пары вида **ВВ** необходимо устранить все поступательные движения, сохранив лишь два вращательных. Известно, что шар, помещенный в лунку, допускает три вращательных движения, следовательно, помещая один шар в трехгранную лунку (три контакта) и связывая его с другим шаром, лежащим на отдельной плоскости, т.е. устраняя, таким образом, одно вращательное движение, синтезируем пару, которая представлена на рисунке 13,а.

Синтезируем пару вида **ВП**. Один шар, помещенный в желоб, имеет три вращательных движения и одно поступательное. Чтобы устранить два вращательных движения, оставив лишь то движение,

которое может осуществляться вокруг той же оси, вдоль которой происходит поступательное, следует в двухгранный желоб поместить два жестко связанных между собой шара. В результате получим пару с требуемым комплексом независимых движений (рисунок 13,b).

Синтезируем пару вида *ПВ*. В отличие от предыдущей пары необходимо создать пару с таким условием, чтобы вращательное и поступательное движения осуществлялись относительно разных осей координат.

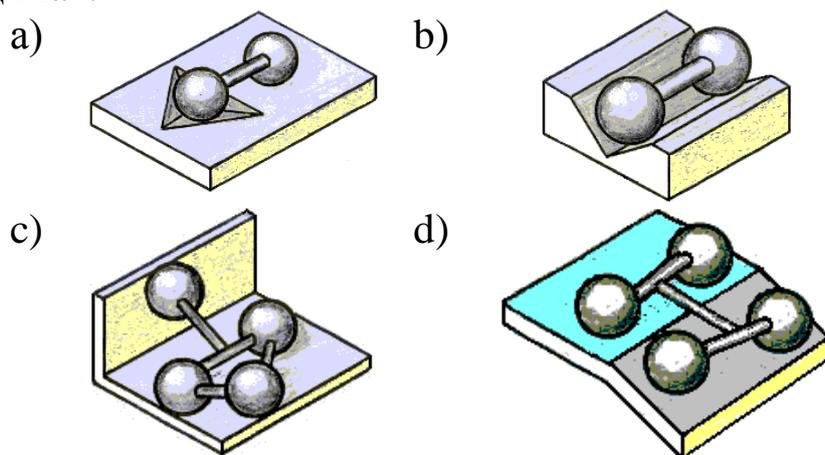


Рисунок 13 – Кинематические пары IV класса

Известно, что три шара, лежащие на одной плоскости, могут перемещаться по плоскости вдоль осей, принадлежащих ей и вращаться относительно оси, перпендикулярной плоскости (*ППВ*). Необходимо добавить еще один шар, не лежащий на плоскости, а упереть его в другую плоскость, устраняя, таким образом, одно поступательное движение, как показано на рисунке 13,c.

Синтезируем пару вида *ПП*. Пара с таким комплексом движений представлена на рисунке 10,b. Устанавливая вместо каждого из цилиндров по два шара и соединяя плоскости под углом менее  $180^\circ$ , получаем пару с заданным комплексом движений *ПП* (рисунок 13,d).

### 1.3.4. Критерии классификации кинематических пар

Целью классификации кинематических пар является выявление всех возможных различий между соединениями звеньев и

установление места каждой из них в классификационной таблице с выделением лишь ей присущих особенностей.

Основными критериями классификации кинематических пар являются следующие четыре:

### ***Число независимых относительных движений звеньев***

Первым (основным) критерием классификации кинематических пар принимается *число независимых относительных движений звеньев*.

На относительное движение каждого из звеньев, образующих кинематическую пару, накладываются ограничения, зависящие от контактирующих поверхностей звеньев – их геометрических элементов. Эти ограничения, называются “условиями связи”.

Любая кинематическая пара есть геометрическая связь двух звеньев. Рассматривая кинематическую пару, будем называть число ограничений, накладываемых этой парой на относительное движение звеньев “числом условий связи”.

Число условий связи является целым числом и должно быть меньше шести, так как, если число условий связи равно шести, звенья теряют относительную подвижность и кинематическая пара переходит в жесткое соединение звеньев. Число условий связи не может быть меньшим единицы, ибо в том случае, когда число условий связи равно нулю, звенья не соприкасаются, следовательно, кинематическая пара перестает существовать. Итак, число условий связи  $S$ , наложенных на относительное движение каждого из звеньев, входящих в кинематическую пару, может быть в пределах от 1 до 5. Очевидно, что сумма чисел независимых относительных движений в кинематической паре (подвижности –  $W$ ) и условий связи ( $S$ ) равна шести  $W + S = 6$ .

Число независимых относительных движений звеньев, допускаемых одной кинематической парой, соответствует числу степеней свободы. По этому параметру все пары делятся на классы. Так, кинематическая пара шар-плоскость допускает пять независимых относительных движений звеньев, она относится к парам I класса. Пара цилиндр-плоскость является парой II класса, так как позволяет осуществить четыре относительных независимых движения любого из звеньев – цилиндра либо плоскости, трехподвижные пары являются парами III класса, двухподвижные пары являются парами IV класса, а одноподвижные пары относятся

к парам V класса, допускающим лишь одно относительное движение, – вращательное либо поступательное.

### ***Составы движений кинематических пар***

В качестве второго критерия классификации принят *комплекс независимых относительных движений звеньев*, согласно которому все кинематические пары разделены на 15 видов.

Выше было показано, что, образуя между звеньями связи, и добиваясь устранения одного, двух, трех, четырех и пяти независимых относительных движений, можно реализовать пятнадцать различных комплексов относительных движений (таблица 2), отличающихся по числу движений, например, **ВВ** или **ВВВ**; по виду движений **В** или **П** и по характеру этих относительных движений **ВПВП** или **ВППВ**.

### ***Число независимых контактов***

Все кинематические пары разделяются согласно третьему критерию классификации – *числу контактов*, т.е. числу соприкосновений геометрических элементов звеньев в одной кинематической паре, на одноконтактные и многоконтактные, в которых число контактов может быть от двух до пяти, как было показано в параграфе 1.3.3.

### ***Составы контактов кинематических пар***

Четвертым критерием классификации является *комплекс независимых контактов*. Согласно этому критерию таких комплексов всего пятнадцать. Как было показано ранее (таблица 1, с. 11 и параграф 1.3.3), все одноконтактные пары образованы из пятнадцати элементарных геометрических связей, а все многоконтактные – из комплекса одноконтактных. Комплекс контактов предусматривает соединение геометрических элементов звеньев различных по виду (например, шар-шар и корсет-седло), по числу контактов (например, шар в трехгранной лунке – три контакта в виде шар-плоскость) и по относительному расположению этих контактов, например, так как созданы пятиконтактные (все контакты шар-плоскость) вращательная и поступательная пары, приведенные на рисунке 12.

## **1.4 Условное изображение кинематических пар**

При схематическом изображении механизмов на чертежах удобно вместо конструктивного исполнения кинематических пар и звеньев вводить условные их обозначения. На рисунке 14 представлены два варианта обозначения в плоскости вращательной кинематической пары V класса, образующейся при соединении двух подвижных звеньев 1 и 2 (рисунок 14,а) и при соединении подвижного звена 1 со стойкой 2 (рисунок 14,б).

Поступательная кинематическая пара V класса в плоскости представлена в двух вариантах: при соединении подвижных звеньев 1 и 2 (рисунок 15) и при соединении подвижного звена 1 со стойкой 2. (рисунок 16)

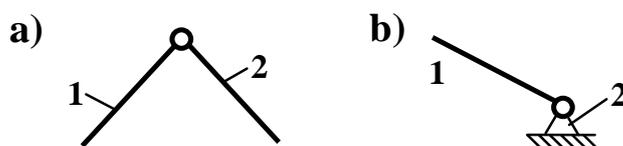


Рисунок 14 – Вращательная кинематическая пара: а – оба звена подвижные; б – одно звено подвижное

Причем, в зависимости от функционального назначения механизма на рисунках 15,а и 16,а показано соединение стержня с втулкой, на рисунках 15,б и 16,б – плунжера с направляющей и на рисунках 15,с и 16,с – поршня с цилиндром.



Рисунок 15 – Поступательная пара. Оба звена подвижные

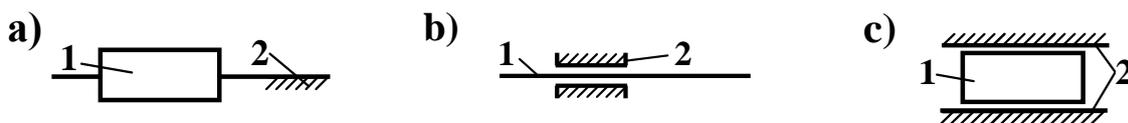


Рисунок 16 – Поступательная пара. Подвижное звено и стойка

Кинематические пары IV класса в плоскости – это соединения звеньев в кулачковых механизмах, зубчатых или фрикционных передачах. В кулачковых механизмах (рисунок 17) пары IV класса – это соединения ролика и кулачка (рисунок 17,а) или кулачка с коромыслом (рисунок 17,б).

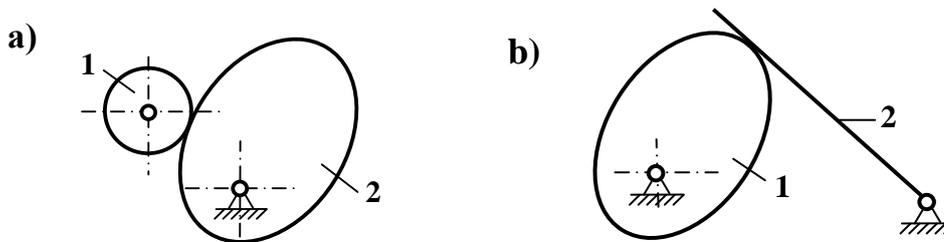


Рисунок 17 – Кулачковые механизмы

Зубчатые и фрикционные передачи на схемах механизмов изображаются практически одинаково, а кинематические пары – по разному (рисунок 18). Во фрикционной передаче пара IV класса обозначается дугами окружностей (рисунок 18,b), а в зубчатой передаче эвольвентными участками сопряженных зубьев (рисунок 18,d).

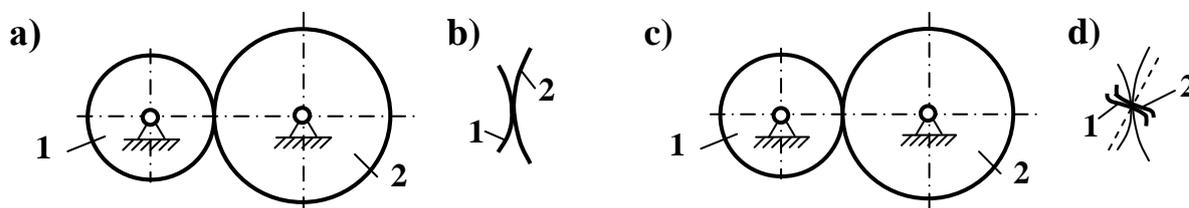
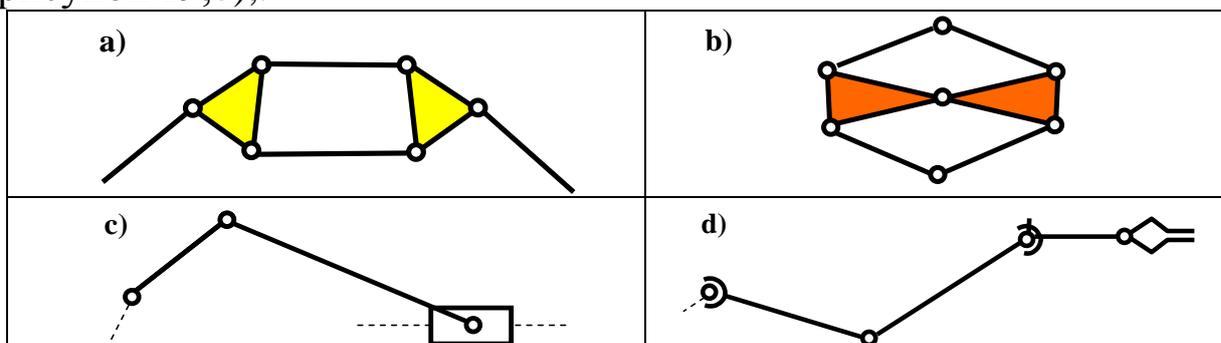


Рисунок 18 – Обозначение пар IV класса в передачах:  
a,b – фрикционная, c,d – зубчатая

### 1.5 Кинематические цепи

Кинематической цепью называют последовательное соединение звеньев посредством кинематических пар. Кинематические цепи бывают открытыми (рисунок 19,a) и закрытыми (рисунок 19,b), плоскими (рисунок 19,c) и пространственными (рисунок 19,d), простыми (рисунок 19,e) и сложными (рисунок 19,f) открытыми-сложными (рисунок 19,a,f), открытыми-простыми (рисунок 19,e), закрытыми-сложными (рисунок 19,b),.



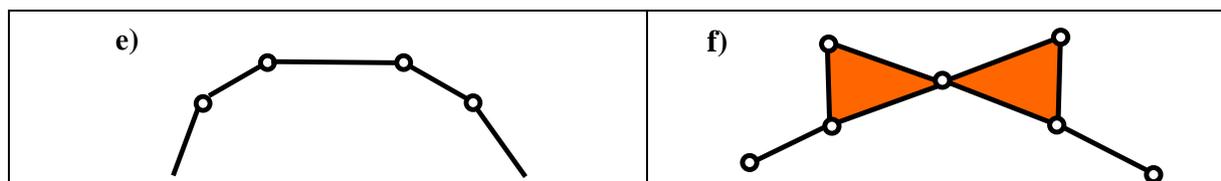


Рисунок 19 – Кинематические цепи: а – открытая; б – закрытая; с – плоская; d – пространственная; е – простая; f – сложная

*Открытой* кинематической цепью называется цепь, в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару. *Закрытой* называется цепь, каждое звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары.

*Плоской* называется кинематическая цепь, звенья которой соединяются только парами V или IV классов, *пространственной* – цепь, в состав которой входят пары I, II или III классов.

*Простой* кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары, *сложной* – кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

В сложных цепях выделяют наиболее сложное звено (рисунок 23, одно из звеньев 2, 3, 5, 7 или 12), которое называют базисным. Вообще говоря, под кинематической цепью понимают связанную в кинематические пары систему тел – звеньев, не имеющую соединений с неподвижным звеном – стойкой. Хотя это условие не является обязательным. И соединенная со стойкой система также есть кинематическая цепь.

Известно, что первым обратился к изучению кинематических цепей с точки зрения их подвижности П.Л. Чебышев [3]. В 1869 г. им была опубликована формула, по которой можно было определить внутреннюю подвижность плоского механизма. Эта формула имеет вид

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (25)$$

где  $W$  – степень подвижности механизма;

$n$  – число подвижных звеньев цепи;

$p_5$  – число кинематических пар пятого класса;

$p_4$  – число кинематических пар четвертого класса.

Для анализа пространственных механизмов структурная формула была записана впервые (1923 г.) профессором А.П.

Малышевым [4] и поэтому ее принято называть “формулой Малышева”.

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (26)$$

где  $p_1, p_2, p_3, p_4$  и  $p_5$  – число пар, соответственно, I, II, III, IV и V классов.

### 1.6 Универсальная структурная формула кинематической цепи (формула В.В. Добровольского)

Любая кинематическая цепь может быть исследована с точки зрения ее подвижности по универсальной структурной формуле профессора В.В. Добровольского [5], которая была предложена им в 1936 г.

В свернутом виде формулу Добровольского записывают так

$$W = (6 - m)n - \sum_5^{m+1} (k - m)p_k, \quad (27)$$

где  $W$  – подвижность цепи;

$n$  – число подвижных звеньев цепи;

$k$  – класс кинематических пар;

$p_k$  – число кинематических пар  $k$ -того класса.

Наиболее важным параметром формулы (27) является параметр  $m$ . Под  $m$  понимают число общих связей, накладываемых на всю исследуемую цепь. Например, на плоскую кинематическую цепь накладывают три общих условия связи, т.е.  $m = 3$ .

Это означает, что ни одно из звеньев цепи не может выйти из плоскости, т.е. невозможными являются для всей цепи движения вдоль одной оси и вокруг двух остальных осей.

Формула (27) впервые была записана Добровольским В.В. и поэтому она носит его имя.

### 1.7 Плоские механизмы или механизмы третьего семейства

*Механизмом* называется кинематическая цепь, подвижность которой равняется единице, т.е.  $W = 1$ . При  $W > 1$  кинематические цепи становятся механизмами или механическими системами заданной подвижности  $W$ .

Под подвижностью понимают число, определяющее число независимых движений, заданных механизму, или число звеньев, которым движение задается. В самом широком смысле – это число обобщенных координат системы.

Звенья, законы движений которых считаются заданными, называются *входными*. Звенья, совершающие движения, для выполнения которых и предназначен данный механизм, называются *выходными*.

Определим степень подвижности двух механизмов (рисунок 20).

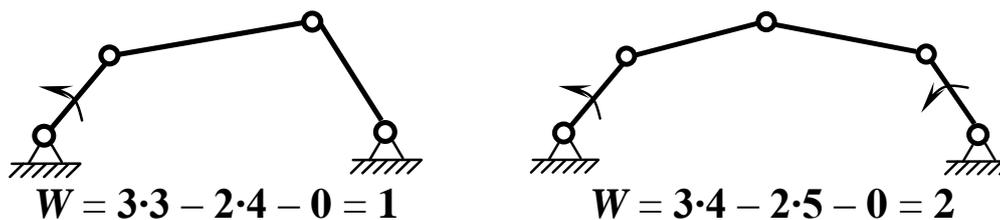


Рисунок 20 – Определение степени подвижности

Дуговыми стрелками на рисунке показано, каким звеньям следует задать движение, чтобы все остальные звенья двигались вполне определенно.

*Степень подвижности* механизма показывает, какому числу звеньев необходимо задать законы движения, чтобы данная кинематическая цепь являлась механизмом.

*Ведущим* называется звено механизма, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, положительна (больше нуля).

*Ведомым* называется звено механизма, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, отрицательна или равна нулю.

### 1.8 Принцип образования механизмов по Ассурю Л.В.

Любой механизм может быть образован путем присоединения к ведущему звену (ведущим звеньям) кинематических цепей с нулевой степенью подвижности [6].

Кинематические цепи с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми образуют кинематические пары свободные геометрические элементы их звеньев, и которые не распадаются на более простые цепи, также обладающие нулевой

степенью подвижности, называются *элементарными группами Ассура*.

$$W_{zp} = 3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (28)$$

Для цепей, собранных посредством пар V класса

$$W_{zp} = 3n - 2p_5 = 0, \text{ откуда } p_5 = \frac{3}{2}n.$$

Отсюда следует, что условию не распадающихся на простые групп Ассура могут удовлетворять следующие пары чисел звеньев и кинематических пар (таблица 4).

Таблица 4 – Сочетания чисел звеньев и кинематических пар

<b>Число звеньев</b>	2	4	6	8	10	12	<b>и т.д.</b>
<b>Число пар</b>	3	6	9	12	15	18	

Простейшей группой Ассура с парой четвертого класса  $p_4$  по (28) будет однозвенная:  $n = 1, p_5 = 1, p_4 = 1$ .

### 1.9 Структурная классификация плоских механизмов

Ведущее звено, образующее со стойкой кинематическую пару V класса, называется механизмом I класса.



Рисунок 21 – Механизмы I класса

Класс всех остальных механизмов определяется классом включенных в них структурных групп Ассура.

В свою очередь *класс структурной группы* определяется числом кинематических пар, которые образуют наиболее сложный замкнутый подвижный контур.

*Класс механизма* определяется наивысшей по классу структурной группой, входящей в состав механизма.

Простейшими структурными группами Ассура могут быть кинематические цепи, состоящие из двух звеньев и трех кинематических пар. Их называют диадами, а точнее диадами Д. Сильвестра, по имени английского ученого, впервые показавшего диады.

Академик Артоболевский И.И. предложил классифицировать механизмы следующим образом (рисунок 22): если наиболее сложное звено имеет лишь две кинематические пары (двухугольное), то механизм, собранный из таких звеньев будет второго класса; если одно из звеньев механизма имеет три кинематические пары, то такой механизм является механизмом третьего класса.

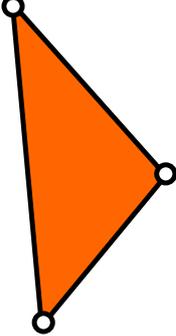
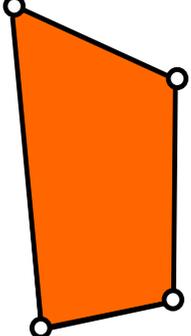
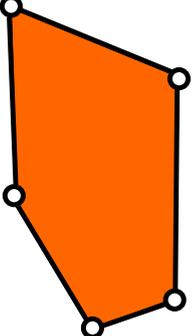
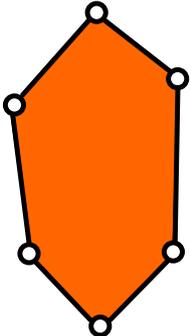
Класс контура				
II	III	IV	V	VI
				

Рисунок 22 – Контурные группы различных классов

Если же наиболее сложное звено содержит четыре пары, или несколько звеньев структурной группы образуют замкнутый контур, то механизм, содержащий такую группу, называть механизмом четвертого класса [7].

Механизмы, созданные на основе замкнутых изменяемых контуров начиная с четырехугольного, Артоболевский И.И. назвал “механизмами высоких классов”.

### 1.10 Порядок структурного анализа механизма

При решении задач структурного анализа механизмов необходимо последовательно произвести ряд операций, а именно:

1. Определить степень подвижности механизма (кинематической цепи);
2. Выделить структурные группы и определить их класс;
3. Записать структурную формулу и определить класс механизма.

Рассмотрим порядок структурного анализа на примере газораспределительного механизма паровоза (рисунок 23).

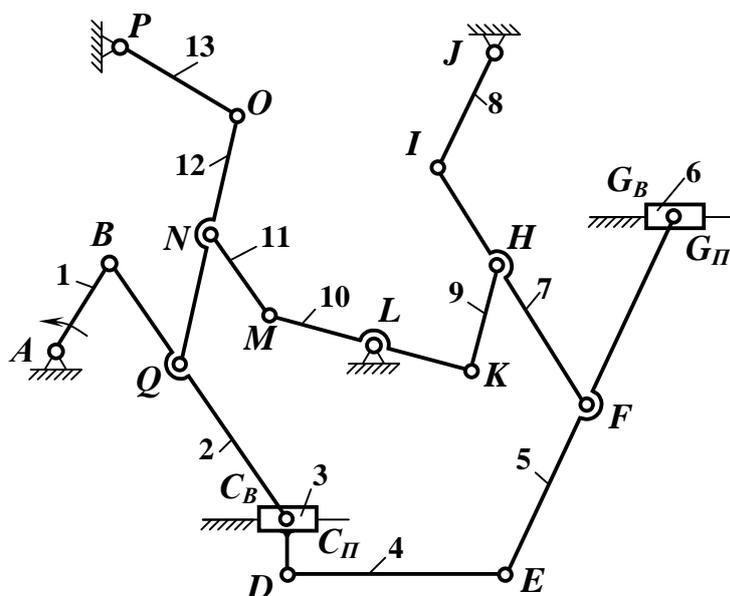


Рисунок 23 – Газораспределительный механизм паровоза

1. Прежде всего, определим степень подвижности механизма. Для этого считаем числа звеньев и числа кинематических пар. Присваиваем каждому звену номер, начиная с ведущего (показано дуговой стрелкой) звена. В рассматриваемой схеме число подвижных звеньев  $n = 13$ . Подсчитываем число кинематических пар, имея в виду, что кинематическая пара – это подвижное соединение двух звеньев.

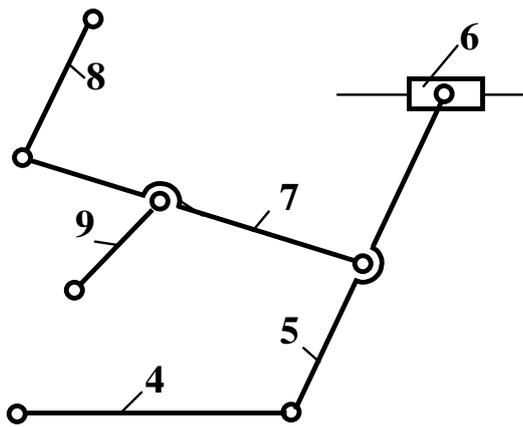
Кинематических пар четвертого класса в этом механизме нет. Пар пятого класса 19, семнадцать – вращательных и две ( $C_П$  и  $G_П$ ) – поступательных, они обозначены латинскими буквами.

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 19 - 0 = 1.$$

Степень подвижности механизма равна единице. Это означает, что достаточно задать лишь одному звену движение, чтобы все остальные звенья двигались определенным образом.

2. Выделяем структурные группы, таким образом, чтобы оставшаяся кинематическая цепь являлась механизмом (чтобы все звенья совершали определенные движения). Поэтому выделения нельзя начинать с первого звена.

Первую структурную группу, которую можно выделить, это звенья 4, 5, 6, 7, 8 и 9.



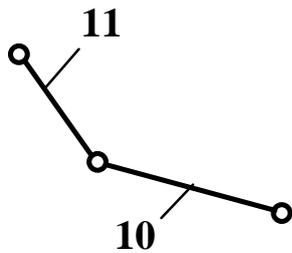
В этой кинематической цепи  $n = 6$ , число пар  $p_5 = 9$ , (8 пар вращательных и одна – соединение ползуна 6 со стойкой, поступательная) тогда

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 0.$$

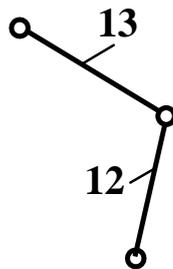
Это структурная группа Асура третьего класса (так как звенья 5 и 7 имеют по три пары) нулевой подвижности.

В оставшейся кинематической цепи звенья совершают вполне определенные движения, она является механизмом.

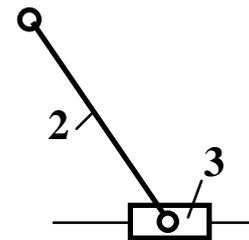
Далее последовательно выделяют структурные группы только второго класса: звенья 10 и 11, звенья 12 и 13 – это группы первого вида; звенья 2 и 3 – это группа второго вида. В каждой группе определяют степень подвижности.



$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$



$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$



$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

Остается механизм первого класса – ведущее звено и стойка, соединенные вращательной парой V класса. Для него степень подвижности



$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

3. Записываем структурную формулу образования механизма в порядке обратном выделению структурных групп

$I(1) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(12,13) \rightarrow II(10,11) \rightarrow III(4,5,6,7,8,9)$ , которая читается так: к механизму I класса присоединили группу Асура II класса (звенья 2,3), затем группу Асура II класса (звенья 12,13), потом группу Асура II класса (звенья 10,11) и группу III класса (звенья 4,5,6,7,8,9).

Определяем класс механизма. Так как кроме групп II класса, присутствует группа III класса, то данная кинематическая цепь является механизмом III класса.

## Глава 2. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Формулы Чебышева и Малышева можно использовать только при анализе механизмов. Для задач синтеза структур механизмов они не годятся.

В 1939 г. профессор Добровольский В.В. ввел новое понятие – число общих наложенных на механизм связей ( $m$ ). Формула подвижности механизмов получила дальнейшее развитие

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=1}^n (k - m)p_k,$$

где  $k$  – класс кинематических пар ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

В 1946 г. И.И. Артоболевский задает различные значения  $m$  и делит механизмы на семейства:

$m = 0$  – нулевое семейство (формула Малышева);

$m = 1$  – первое семейство  $W = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2$ ;

$m = 2$  – второе семейство  $W = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3$ ;

$m = 3$  – третье семейство  $W = 3n - 2p_5 - p_4$  (формула Чебышева);

$m = 4$  – четвертое семейство  $W = 2n - p_5$ .

Последняя формула используется для анализа механизмов, в которых присутствуют только поступательные пары – клиновые (рисунок 24).

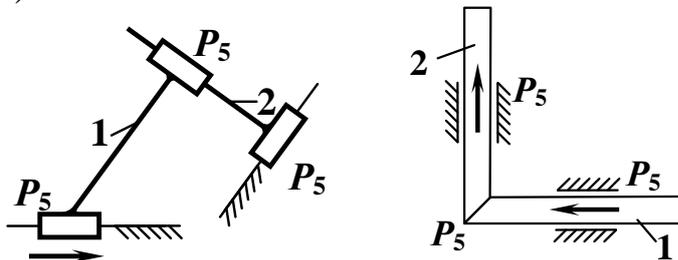


Рисунок 24 – Степень подвижности клинового механизма

В этом механизме два подвижных звена и три поступательные кинематические пары. Для него

$$W = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

## 2.1 Синтез структур кинематических цепей

Многие ученые в России и за рубежом, начиная с Чебышева П.Л. (Грюблер Ф., Асур Л.В., Баранов Г.Г. и др.) занимались поиском методов синтеза механизмов. В настоящем конспекте излагается оригинальный метод структурного синтеза механизмов – метод профессора Дворникова Л. Т. [1].

Он вводит понятие “базисного звена –  $\tau$ -угольника (для плоских цепей) или  $\tau$ -вершинника” (для пространственных цепей). Базисное звено – это звено с наибольшим в рассматриваемой цепи числом кинематических пар.

Рассмотрим плоскую кинематическую цепь (рисунок 25).

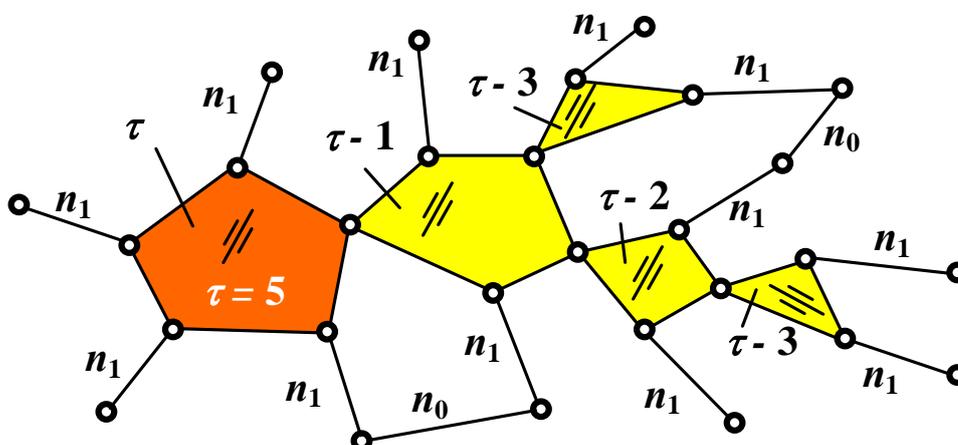


Рисунок 25 – Плоская кинематическая цепь

В этой кинематической цепи два звена имеют наибольшее число кинематических пар (по пяти), но одно из них выбрано за  $\tau$ -угольник, второе тогда добавляет в цепь только четыре пары, следовательно, это звено обозначено как  $(\tau-1)$ -угольное. Звено, имеющее четыре пары, добавляет в цепь только три, поэтому обозначено как  $(\tau-2)$ -угольное, и т.д. Звенья, которые присоединяясь к цепи, добавляют по одной паре обозначены  $n_1$  и звенья, не добавляющие в цепь пар –  $n_0$ .

Для анализа и синтеза структурных схем механизмов профессором Дворниковым Л.Т. выведена “универсальная структурная система”, в которой в первом уравнении определяется число кинематических пар в цепи: к числу пар  $\tau$ -угольника добавляется число пар звеньев ( $n_{\tau-1}$ ), содержащих на одну пару ( $\tau -$

1) меньше, затем на две и т.д. до звеньев, добавляющих в цепь по две ( $n_2$ ) и по одной ( $n_1$ ) паре.

$$\begin{cases} p = \tau + (\tau - 1)n_{\tau-1} + (\tau - 2)n_{\tau-2} + \dots + i \cdot n_i + \dots + 2n_2 + n_1, \\ n = 1 + n_{\tau-1} + n_{\tau-2} + \dots + n_i + \dots + 2n_2 + n_1 + n_0, \\ W = (6 - m)n - \sum (k - m)p_k, \quad (k - m) > 0. \end{cases}$$

Для рассматриваемой кинематической цепи первое уравнение

$$p = 5 + (5 - 1) \cdot 1 + (5 - 2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 12 = 28.$$

Во втором уравнении подсчитывается число звеньев цепи: звено  $\tau$ -угольное – одно, к нему добавляются звенья  $n_{\tau-1}$ ,  $n_{\tau-2}$  и т.д. до  $n_2$ ,  $n_1$  и  $n_0$ .

$$n = 1 + 1 + 1 + 2 + 12 + 2 = 19.$$

В третьем уравнении определяется степень подвижности кинематической цепи. Рассматриваемая кинематическая цепь плоская и незамкнутая с одними парами пятого класса, ее решение

$$W = (6 - 3)19 - (5 - 3)28 = 1.$$

В универсальной структурной системе есть четыре независимых задаваемых параметра:  $m$ ,  $W$ ,  $k$  и  $\tau$ .

Использование универсальной структурной системы покажем на двух примерах.

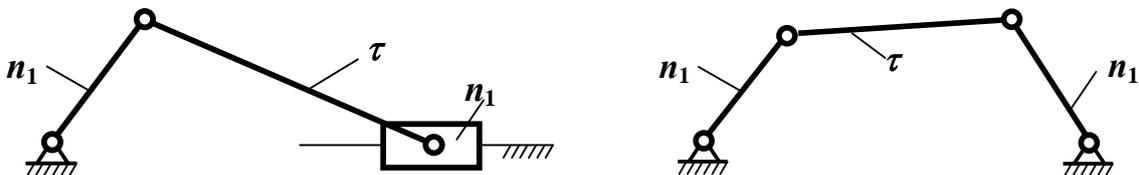
### Пример 1.

Синтезировать плоский ( $m = 3$ ) механизм ( $W = 1$ ) с одноподвижными парами ( $k = 5$ ) и линейными ( $\tau = 2$ ) звеньями. Подставляем значения в систему

$$\begin{cases} p_5 = 2 + n_1, \\ n = 1 + n_1, \\ W = 3n - 2p_5 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы  $n_1 = n - 1$ , из первого уравнения  $p_5 = 2 + n_1 = 2 + n - 1 = n + 1$ . Подставим значения  $n_1$  и  $p_5$  в третье уравнение  $1 = 3n - 2(n + 1) = 3n - 2n - 2$ , откуда  $n = 3$ ,  $p_5 = 4$ ,  $n_1 = 2$ .

Это кривошипно-ползунный или четырехзвенный шарнирный механизмы.



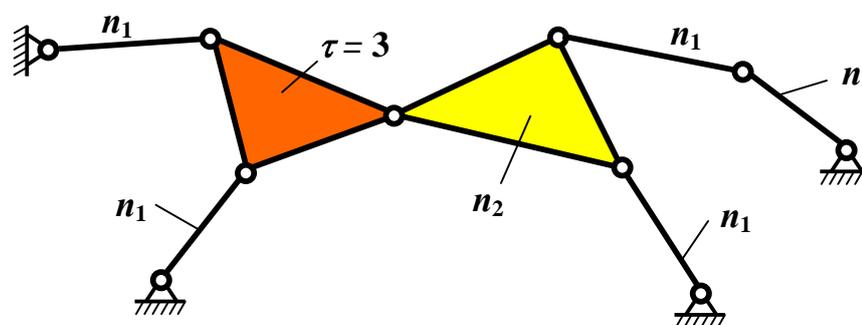
### Пример 2.

Синтезировать плоский ( $m = 3$ ) механизм ( $W = 1$ ) с одноподвижными парами ( $k = 5$ ) с треугольным ( $\tau = 3$ ) и линейными звеньями. Число звеньев ( $n = 7$ ). Подставляем значения в систему

$$\begin{cases} p_5 = \tau + 2n_2 + n_1, \\ n = 1 + n_2 + n_1, \\ W = 3n - 2p_5 = 1. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы  $W = 1 = 3 \cdot 7 - 2p_5$  имеем  $p_5 = 10$ , из второго уравнения  $n_1 = 6 - n_2$ . Подставим значения в первое уравнение и получим  $n_2 = 1$ , тогда  $n_1 = 5$ .

Решением этой задачи будет семизвенный механизм.



Сборка этого механизма осуществляется следующим образом: берется базисное треугольное звено, к нему присоединяются два линейных звена и одно двухугольное (добавляющее две кинематические пары), к которому присоединяются два линейных звена, а к одному из них – механизм первого класса (также добавляющий одну пару).

## Глава 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### 3.1 Задачи и методы кинематического анализа

Задачами кинематического анализа механизмов являются: определение положений, скоростей и ускорений всех точек механизма, а также определение угловых скоростей и угловых ускорений всех звеньев механизма.

Существует три метода кинематического исследования механизмов: аналитический, самый точный метод (в этом конспекте не рассматривается); графо-аналитический – метод планов и графический – метод кинематических диаграмм, самый неточный (подробно рассмотрен в пособии [13]).

### **План механизма. Масштабы ТММ**

Схематическое изображение звеньев механизма в определенном масштабе без учета конструктивных форм звеньев и кинематических пар, называется планом механизма.

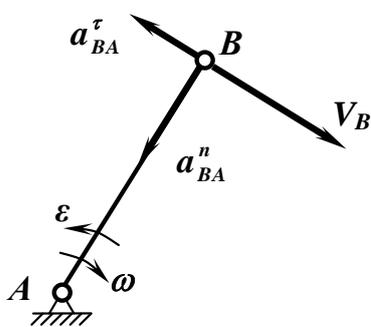
Масштабом ТММ (масштабным коэффициентом) называется отношение численного значения какой-либо физической величины к отрезку, ее изображающему.

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \left[ \frac{\text{М}}{\text{мм}} \right]. \quad \mu = (1; 2; 2,5; 4; 5)10^n,$$

где  $n$  – любое целое число от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

### **3.2 Определение скоростей и ускорений при шарнирном соединении звеньев**

**а) звено совершает вращательное движение**



$$V_B = V_{BA} = \omega \cdot l_{AB}.$$

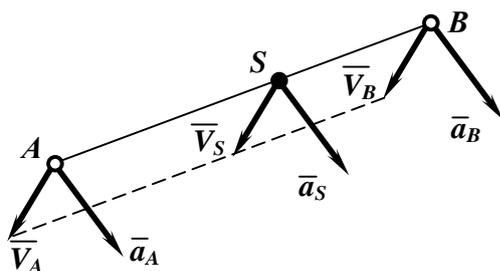
$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

$$a_{BA}^n = \omega^2 l_{AB}, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot l_{AB}.$$

1-ый частный случай: в начале и при колебательном движении звена в момент изменения направления угловой скорости, при  $\omega = 0$ ,  $a_{BA} = \varepsilon \cdot l_{AB}$ ,  $a_{BA}^n = 0$ .

2-ой частный случай,  $\omega = \text{const}$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $a_{BA} = \omega^2 l_{AB}$ .

**б) звено совершает поступательное движение**

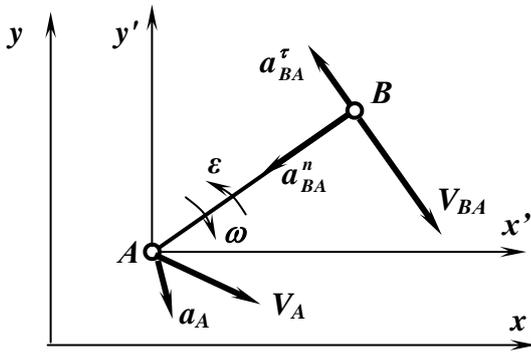


$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \dots = \bar{V}_S,$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \dots = \bar{a}_S.$$

При поступательном движении звена скорости всех его точек одинаковы, также как и равны ускорения всех точек звена.

### с) звено совершает сложное движение



Сложное движение звена раскладываем на два движения – поступательное вместе с новой системой координат  $x'Ay'$  и вращательное вокруг точки  $A$ .

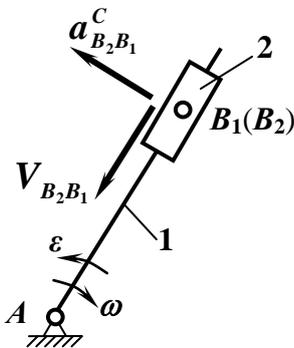
$$\bar{V}_B^{abc} = \bar{V}_B^{nep} + \bar{V}_B^{omn}, \quad \bar{V}_B^{nep} = \bar{V}_A, \\ \bar{V}_B^{omn} = \bar{V}_{BA}, \quad \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}.$$

Точка  $A$ , скорость которой считается известной, называется полюсом.

$$\bar{a}_B^{abc} = \bar{a}_B^{nep} + \bar{a}_B^{omn}, \quad \bar{a}_B^{nep} = \bar{a}_A, \quad \bar{a}_B^{omn} = \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \\ \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Нормальное ускорение на плане механизма всегда направлено к точке, принятой за полюс. В данном примере нормальное ускорение точки  $B$  относительно  $A$  ( $\bar{a}_{BA}^n$ ) направлено от точки  $B$  к точке  $A$ . Полное относительное ускорение  $a_{BA} = l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ .

### 3.3 Определение скоростей и ускорений при соединении звеньев поступательной парой



Сложное движение кулисного камня 2 раскладываем на два движения: переносное вращательное движение вместе с кулисой и относительное поступательное вдоль кулисы.

$$\bar{V}_{B_2}^{abc} = \bar{V}_{B_2}^{nep} + \bar{V}_{B_2}^{omn}, \quad \bar{V}_{B_2}^{nep} = \bar{V}_{B_1},$$

$$\bar{V}_{B_2}^{omn} = \bar{V}_{B_2B_1}, \quad \bar{V}_{B_2} = \bar{V}_{B_1} + \bar{V}_{B_2B_1}.$$

$$\bar{a}_{B_2}^{abc} = \bar{a}_{B_2}^{nep} + \bar{a}_{B_2}^{omn}, \quad \bar{a}_{B_2}^{nep} = \bar{a}_{B_1}, \quad \bar{a}_{B_2}^{omn} = \bar{a}_{B_2B_1}^c = \bar{a}_{B_2B_1}^r + \bar{a}_{B_2B_1}^\tau,$$

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{B_2B_1}^c + \bar{a}_{B_2B_1}^\tau, \quad \text{где } a_{B_2B_1}^c = 2\omega \cdot V_{B_2B_1}.$$

Для определения направления ускорения Кориолиса  $a_{B_2B_1}^c$  необходимо вектор относительной скорости  $\bar{V}_{B_2B_1}$  повернуть на  $90^\circ$  в сторону вращения кулисы  $\omega_3$  (в настоящем примере – по ходу часовой стрелки).

### **3.4 Графо-аналитический метод исследования механизмов. Планы скоростей и ускорений звена, группы**

Планом скоростей (ускорений) звена называется графическое построение, представляющее собой плоский пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости (ускорения) точек звена, а отрезки, соединяющие концы лучей, – относительные скорости (ускорения) соответствующих точек звена в определенном масштабе при данном положении звена. Концы векторов абсолютных скоростей и ускорений точек принято обозначать на планах скоростей (ускорений) строчными буквами, соответствующими прописным буквам точек на плане механизма, скорости (ускорения) которых изображают векторы. Точка  $p$ , из которой выходят векторы абсолютных скоростей, называется полюсом плана скоростей; в этой точке находятся все точки механизма, абсолютные скорости которых равны нулю (полюс плана ускорений принято обозначать буквой  $\pi$ , здесь находятся все точки, ускорения которых равны нулю).

Как известно, любой механизм состоит из стойки, одного или нескольких ведущих звеньев (движение которых задается) и одной или нескольких структурных групп. Кинематическое исследование начинается с начального звена, а затем исследуются структурные группы в той последовательности, в какой они образовывали механизм.

## **3.5 Кинематика четырехшарнирного механизма**

### **3.5.1 Построение плана положений механизма**

В некоторых механизмах построить план положений механизма достаточно просто. К таким механизмам относится механизм шарнирного четырехзвенника [8].

Пусть заданы схема механизма и длины звеньев:  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ , а также расстояния между стойками (точками  $A$  и  $D$ ) –  $x$  и  $y$ . (рисунок 26,а).

Выбирается масштабный коэффициент длины

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \left[ \frac{\text{М}}{\text{ММ}} \right]$$

и вычисляются все длины в отрезках чертежа.

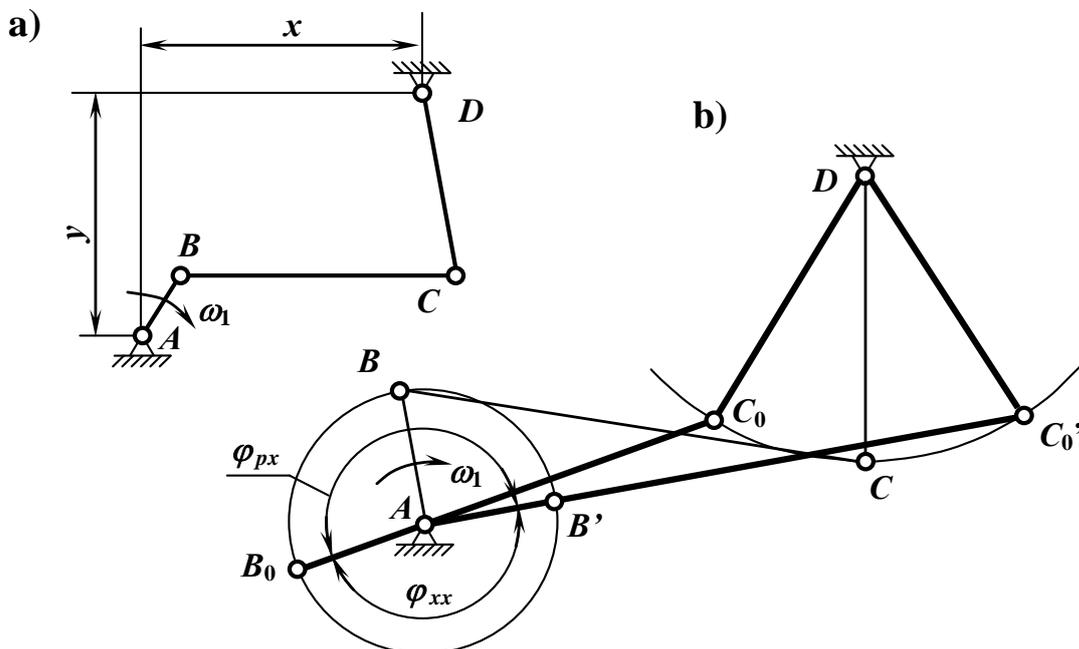


Рисунок 26 – Построение плана положений механизма:  
а – схема; б – план

Строится произвольное положение механизма. Берется произвольная точка  $A$ , относительно которой определяется положение точки  $D$ . Радиусами  $AB$  и  $CD$  проводятся окружности (траектории точек  $B$  и  $C$ ). Из произвольной точки  $B$  окружности  $AB$  радиусом  $BC$  делается засечка на окружности  $CD$ . При этом могут получиться две точки  $C$  и  $C'$  (на рисунке не показана). Выбирается та, которая соответствует заданной схеме, в данном случае, точка  $C$ . Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  соединяются прямыми линиями, получается произвольное положение механизма (на рисунке 26 оно показано тонкими линиями).

Определяется крайние положения коромысла: правое получится, когда кривошип  $AB$  и шатун  $BC$  вытянутся вдоль одной линии, при условии  $AC = AB + BC$ . Крайнее левое положение коромысла будет, когда кривошип  $AB$  и шатун  $BC$  также вытянутся вдоль одной линии, но при  $AC = BC - AB$ . Получается две точки  $B$  ( $B_0$  и  $B'$ ) и две точки  $C$  ( $C_0$  и  $C'$ ). При заданном направлении угловой скорости кривошипа за начало рабочего хода следует принять точку  $B$ , так как при правильном проектировании

механизма угол поворота кривошипа при рабочем ходе  $\varphi_{рх}$  должен быть больше чем угол холостого хода  $\varphi_{хх}$ .

Начиная от точки  $B$  окружность радиуса  $AB$  делится по направлению вращения кривошипа на необходимое число отрезков (6, 8 или 12) и получается соответствующее число положений кривошипа. От точек  $B_1, B_2$  и т.д. радиусом  $BC$  на траектории точки  $C$  коромысла делаются засечки, получают точки  $C_1, C_2$  и т.д., которые соединяют с соответствующими точками  $B$  и с точкой  $D$  и получают необходимое число положений механизма.

### 3.5.2 Построение плана скоростей

Задана схема механизма, длины звеньев и угловая скорость ведущего звена  $\omega_1 = \text{const}$ . Выбирается масштабный коэффициент длины  $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \left[ \frac{\text{М}}{\text{ММ}} \right]$  и строится план механизма (рисунок 27,а).

Определяется скорость точки  $B$  механизма

$V_B = \omega_1 l_{AB}$ , так как звено  $AB$  совершает вращательное движение. Выбирается произвольная точка, которая принимается за полюс плана скоростей –  $p$ . В полюсе находятся все точки, абсолютные скорости которых равны нулю, это точки  $a$  и  $d$ . Из полюса (рисунок 27,б) проводится линия, перпендикулярная звену  $AB$  на плане механизма, направленная в сторону угловой скорости звена. Как только на этой линии ставится стрелка и буква  $b$ , получается отрезок  $pb$ , изображающей в масштабе вектор скорости точки  $B$  –  $\bar{v}_B$ . Откуда масштабный коэффициент плана скоростей

$$\mu_v = \frac{V_B}{pb} \left[ \frac{\text{М/С}}{\text{ММ}} \right].$$

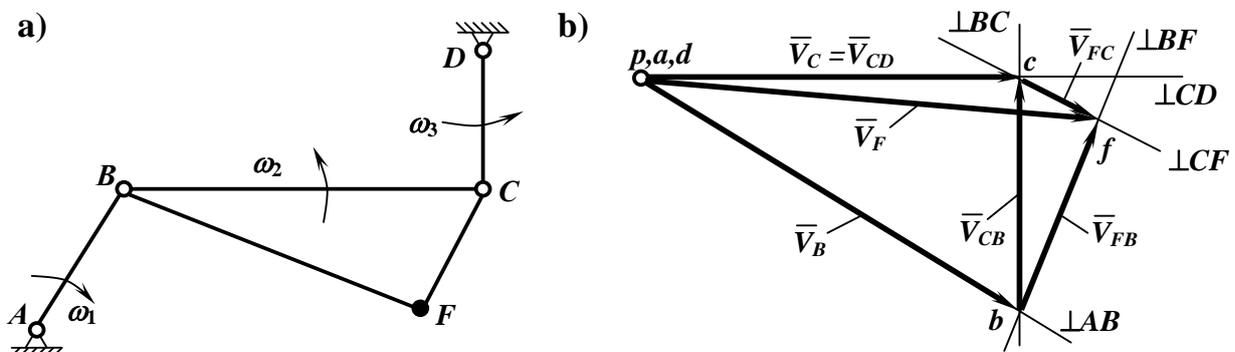


Рисунок 27 – Кинематика шарнирного четырехзвенника:

а – план механизма; b – план скоростей

Скорость точки  $C$  для звена 2, совершающего сложное движение находится по векторному уравнению

$$\underline{\underline{\bar{V}_C}} = \underline{\underline{\bar{V}_B}} + \underline{\underline{\bar{V}_{CB}}} . \quad (29)$$

Скорость точки  $B$  уже известна по величине и направлению, вектор подчеркивается двумя линиями, Скорость точки  $C$  относительно точки  $B$  известна только по направлению, она перпендикулярна отрезку  $BC$  на плане механизма (между точками одного звена возможно лишь вращательное движение), поэтому вектор подчеркивается одной линией  $\bar{V}_{CB} \perp BC$ , так как величина этого вектора неизвестна. Вектор скорости точки  $C$  неизвестен ни по величине, ни по направлению. Таким образом, в векторном уравнении три неизвестных и решить его графически невозможно.

Составляется векторное уравнение скорости точки  $C$  звена 3, совершающего вращательное движение

$$\underline{\underline{\bar{V}_C}} = \underline{\underline{\bar{V}_D}} + \underline{\underline{\bar{V}_{CD}}} . \quad (30)$$

Скорость точки  $D$  известна, она равна нулю, точка  $d$  находится в полюсе плана скоростей, вектор  $\bar{V}_D$  подчеркивается двумя линиями. Скорость точки  $C$  относительно точки  $D$  известна только по направлению, она перпендикулярна отрезку  $CD$  на плане механизма, поэтому вектор подчеркивается одной линией  $\bar{V}_{CD} \perp CD$ , так как величина этого вектора неизвестна. И в этом уравнении три неизвестных.

Так как звенья 2 и 3 соединены вращательной парой, то скорости точки  $C$  для обоих звеньев одинаковы. Уравнения (29) и (30) объединяются в систему

$$\begin{cases} \underline{\underline{\bar{V}_C}} = \underline{\underline{\bar{V}_B}} + \underline{\underline{\bar{V}_{CB}}}, \\ \underline{\underline{\bar{V}_C}} = \underline{\underline{\bar{V}_D}} + \underline{\underline{\bar{V}_{CD}}}, \end{cases} \quad (31)$$

в которой левые части одинаковы, следовательно, равны и правые части, а в правых частях всего два неизвестных. Тогда проводится из точки  $b$  плана скоростей прямая линия, перпендикулярно отрезку  $BC$  на плане механизма, а из полюса (точнее, точки  $d$ ) прямая, перпендикулярно звену  $CD$ . Точка пересечения этих прямых и будет точкой  $c$ , а отрезки  $bc$  и  $dc$  изобразят,

соответственно, векторы скорости  $\overline{V}_{CB}$  и  $\overline{V}_{CD}$  в принятом ранее масштабе (рисунок 27, b).

По плану скоростей определяются направления указанных векторов и их модули

$$V_{CB} = bc \cdot \mu_V, \text{ м/с и } V_{CD} = pc \cdot \mu_V \text{ м/с.}$$

Аналогично, по системе векторных уравнений находится скорость точки  $F$  ( $V_F$ ) относительно ранее найденных скоростей точек  $B$  и  $C$ .

$$\begin{cases} \overline{V}_F = \overline{V}_B + \overline{V}_{FB}, \\ \overline{V}_F = \overline{V}_C + \overline{V}_{FC}. \end{cases} \quad (32)$$

В этой системе уравнений вектор  $V_{FB}$  перпендикулярен отрезку  $FB$  на плане механизма, а вектор  $V_{FC}$  перпендикулярен отрезку  $FC$ . Проведя перпендикуляры из точек  $b$  и  $c$ , на их пересечении получают точку  $f$ . Соединив полюс плана с точкой  $f$ , получают отрезок  $pf$ , который изображает абсолютную скорость точки  $F$  ( $V_F$ ). Направление вектора – от полюса к точке  $f$ . Отрезки  $bf$  и  $cf$  изобразят, соответственно, векторы скорости  $\overline{V}_{FB}$  и  $\overline{V}_{FC}$  в принятом ранее масштабе.

По плану скоростей определяются направления указанных векторов (к точке  $f$ ) и их модули

$$V_{FB} = bf \cdot \mu_V, V_{FC} = cf \cdot \mu_V, \text{ и } V_F = pf \cdot \mu_V.$$

*Графическое построение, в котором лучи, выходящие из полюса, изображают абсолютные скорости точек, а отрезки, соединяющие концы этих лучей, – относительные скорости точек звеньев в определенном масштабе, называется планом скоростей для заданного положения механизма.*

### **Свойства планов скоростей:**

1. *Фигура на плане скоростей, образованная векторами относительных скоростей точек, принадлежащих одному звену, подобна фигуре звена на плане механизма и сходственно расположена.*

Треугольники  $bcf$  и  $BCF$  подобны, так как их стороны взаимно перпендикулярны:  $bc \perp BC$ ,  $cf \perp CF$ ,  $bf \perp BF$ .

Сходственность их доказывается тем, что вершины обоих треугольников обходятся одинаково – по ходу часовой стрелки.

2. С помощью плана скоростей можно определить угловую скорость звена по величине и направлению:

Для определения величины угловой скорости звена необходимо модуль относительной скорости вращательного движения между двумя точками, принадлежащими этому звену, разделить на расстояние между этими точками

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}}, 1/c, \text{ или } \omega_2 = \frac{V_{FB}}{l_{BF}}, \text{ или } \omega_2 = \frac{V_{FC}}{l_{CF}}, \omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}}.$$

Для определения направления угловой скорости звена необходимо вектор относительной скорости перенести с плана скоростей на план механизма в соответствующую точку и посмотреть – куда этот вектор стремится повернуть звено.

В рассматриваемом примере следует, например, вектор  $\bar{V}_{CB}$  (по индексу вектора можно понять, что точка  $C$  движется относительно точки  $B$ ) перенести в точку  $C$ , тогда очевидно, что вектор  $\bar{V}_{CB}$  стремится повернуть звено 2 относительно точки  $B$  против хода часовой стрелки. Вектор  $\bar{V}_{CD}$ , перенесенный в ту же точку  $C$ , стремится повернуть звено 3 также против хода часовой стрелки.

### 3.5.3 Определение относительной угловой скорости в шарнирах

Вспользуемся методом инверсии, т.е. сообщим звеньям угловую скорость  $(-\omega_k)$  тогда звено  $k$  станет неподвижным и

$$\omega_B = \omega_{ik} = |\omega_i - \omega_k|.$$

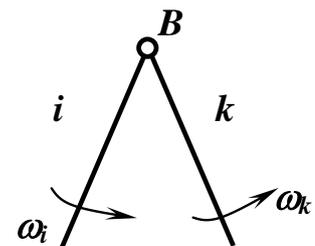
В рассматриваемом механизме (рисунок 27)

$$\omega_A = \omega_{01} = |\omega_0 - \omega_1| = \omega_1,$$

$$\omega_B = \omega_{12} = |\omega_1 - \omega_2| = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_C = \omega_{23} = |\omega_2 - \omega_3| = \omega_2 - \omega_3,$$

$$\omega_D = \omega_{30} = |\omega_3 - \omega_0| = \omega_0.$$



### 3.5.4 Построение плана ускорений

Определяется ускорение точки  $B$ . Так как  $\omega = \text{const}$  и  $a_{BA}^{\tau} = 0$ , то  $a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}$ . Выбирается произвольная точка  $\pi$ , она принимается за полюс плана ускорений (рисунок 28), из которого проводится вектор  $\pi b$ , изображающий ускорение точки  $B$  ( $a_B$ ).

Масштабный коэффициент плана ускорений  $\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} \left[ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right]$ .

Ускорение точки  $C$  определяется по системе уравнений

$$\begin{cases} \underline{\underline{a_C}} = \underline{\underline{a_B}} + \underline{\underline{a_{CB}^n}} + \underline{\underline{a_{CB}^{\tau}}}, \\ \underline{\underline{a_C}} = \underline{\underline{a_D}} + \underline{\underline{a_{CD}^n}} + \underline{\underline{a_{CD}^{\tau}}}. \end{cases} \quad (33)$$

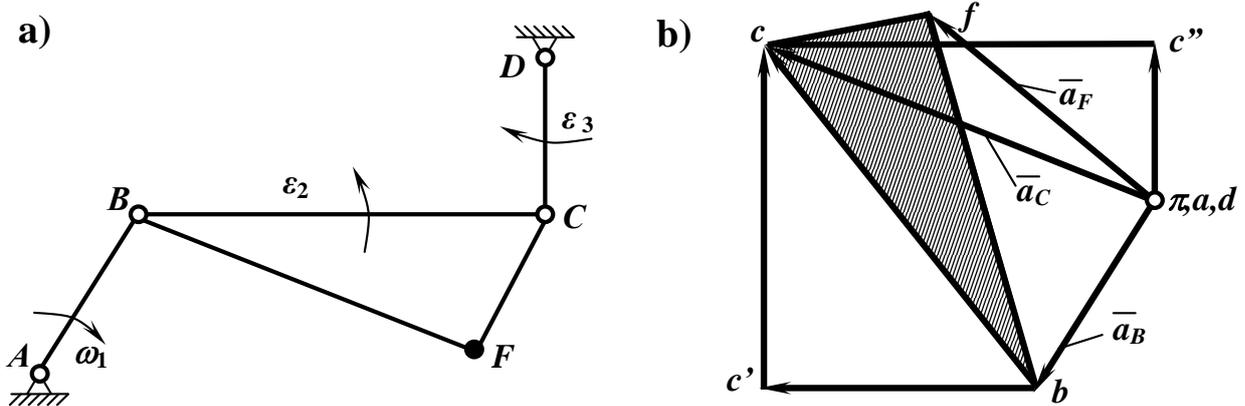


Рисунок 28 – Кинематика шарнирного четырехзвенника:  
а – план механизма; б – план ускорений

Ускорение точки  $B$  известно по величине и направлению, известно также и ускорение точки  $D$  (оно равно нулю), векторы подчеркиваются двумя чертами. Нормальные ускорения можно определить по величине

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC}, \quad a_{CD}^n = \omega_2^2 l_{CD},$$

векторы нормальных ускорений также подчеркиваются двумя чертами. Тангенциальные ускорения известны по направлению  $a_{CB}^{\tau} \perp BC$ , а  $a_{CD}^{\tau} \perp CD$ , поэтому их векторы подчеркивают одной чертой. Таким образом, в правых частях системы (33) всего два неизвестных, ее можно решить графически (рисунок 28,б).

Вектор  $bc'$  представляет собой нормальное ускорение  $a_{CB}^n$ ,  
 $bc' = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a}$  мм, вектор  $\pi c'' = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a}$  мм. Величины тангенциальных

ускорений ( $c's$  и  $c''c$ ) определяются из построения

$$a_{CB}^t = c's \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2, \quad a_{CD}^t = c''c \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки  $C$  также определяется из построения

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

*Графическое построение, в котором лучи, выходящие из полюса, изображают абсолютные ускорения, а отрезки, соединяющие концы этих лучей – относительные ускорения соответствующих точек в определенном масштабе называется планом ускорений в данном положении механизма.*

### **Свойства планов ускорений**

1. Теорема подобия. *Фигура на плане ускорений, образованная векторами относительных ускорений точек, принадлежащих одному звену, подобна фигуре звена на плане механизма и сходственно расположена.* Теорема доказывается аналитически. Согласно 3.2,с

$$\begin{cases} a_{CB} = l_{CB} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \\ a_{FB} = l_{FB} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \\ a_{FC} = l_{CF} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \end{cases}$$

выразим относительные ускорения и длины звеньев через отрезки на плане ускорений и плане механизма, соответственно, тогда

$$\begin{cases} bc = BC \frac{\mu_l}{\mu_a} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \\ fb = FB \frac{\mu_l}{\mu_a} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \\ fc = FC \frac{\mu_l}{\mu_a} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \end{cases}$$

откуда видно, что все стороны звена умножаются на одну и ту же величину. Треугольник  $bcf$  на плане ускорений подобен треугольнику  $BCF$  – звену 2.

2. С помощью плана ускорений можно определить угловое ускорение звена по величине и направлению.

Для определения величины углового ускорения следует тангенциальное ускорение между двумя точками звена разделить на расстояние между этими точками.

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{l_{CB}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^{\tau}}{l_{CD}}.$$

Для определения направления углового ускорения нужно вектор тангенциального ускорения мысленно перенести с плана ускорений на план механизма в соответствующую точку и посмотреть, куда он стремится повернуть звено.

### 3.6 Кинематика кулисного механизма

#### 3.6.1 Построение плана скоростей

Дана схема кулисного механизма. Заданы длины звеньев и угловая скорость ведущего звена  $\omega_1 = \text{const}$ . Выбирается масштабный коэффициент длины и строится план механизма (рисунок 29, а).

Скорость точки  $B$ .  $V_B = \omega_1 l_{AB}$ . Из точки  $p$ , принятой за полюс плана скоростей (рисунок 29,б), проводится вектор  $pb$ , перпендикулярно звену  $AB$ , который изображает скорость точки  $B$  с принятым масштабным коэффициентом  $\mu_v$ .

Определяется скорость точки  $C$ . Точка  $C$  принадлежит трем звеньям: шатуну 2 ( $C_2$ ), ползуну 3 ( $C_3$ ) и стойке ( $C_0$ ). Так как звенья 2 и 3 соединяются вращательной парой, то скорость  $V_{C_2} = V_{C_3}$ . Скорость этих точек может быть обозначена как  $V_C$ ,  $\bar{V}_{C_2} = \bar{V}_{C_3} = \bar{V}_C$ . Скорость точки  $C_0$  известна, она равна нулю.

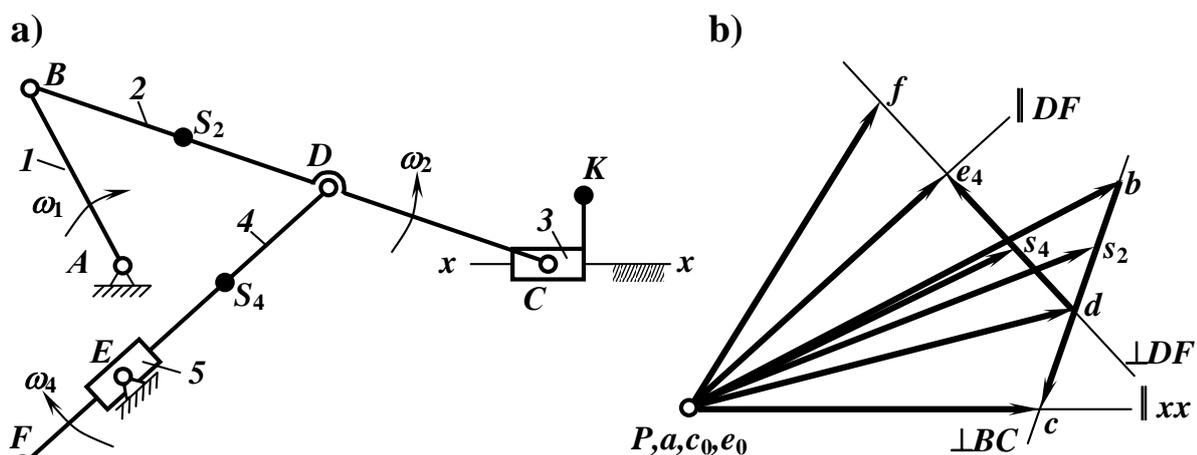


Рисунок 29 – Кулисный механизм:  
 а – план механизма; б – план скоростей

Скорость точки  $C$  определяется по системе уравнений, относительно точки  $B$  и относительно  $C_0$ .

$$\begin{cases} \overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}}, \\ \overline{V_C} = \overline{V_{C_0}} + \overline{V_{CC_0}}. \end{cases} \quad (34)$$

Скорость точки  $C$  относительно точки  $B$  перпендикулярна линии  $BC$  звена 2 ( $V_{CB} \perp BC$ ), так как эти точки принадлежат одному звену и между ними может быть лишь вращательное движение, а скорость точки  $C$  относительно  $C_0$  направлена параллельно оси  $x-x$ , так как ползун 3 движется относительно стойки вдоль линии  $x-x$  ( $V_{C_0} \parallel x-x$ ). Из точки  $B$  проводится прямая, перпендикулярно  $BC$ , а из полюса, где находится точка  $c_0$  – прямая, параллельная  $x-x$ . На пересечении этих прямых находится точка  $c$ . Вектор  $\overline{bc}$  выражает в принятом масштабе  $\overline{V_{CB}}$ , а вектор  $\overline{pc}$  –  $\overline{V_{CC_0}}$ .

$$V_C = V_{CC_0} = pc \cdot \mu_V, \quad V_{CB} = bc \cdot \mu_V.$$

Скорость точки  $D$  определяется по теореме подобия.

$$\frac{BD}{BC} = \frac{bd}{bc}, \text{ откуда } bd = bc \frac{BD}{BC}, \text{ мм.}$$

На отрезке  $bc$  плана скоростей находится точка  $d$ . Из полюса до точки  $d$  проводится вектор  $\overline{pd}$ , который изображает в принятом масштабе скорость точки  $D$  ( $V_D = pd \cdot \mu_V$ ).

Точка  $E$  принадлежит одновременно трем звеньям: звену 4 ( $E_4$ ), звену 5 – куливному камню ( $E_5$ ) и стойке ( $E_0$ ). Так как звено 5 и стойка соединены вращательной парой, то  $V_{E_5} = V_{E_0} = \mathbf{0}$ , обозначается как  $V_E$ . Следовательно, определяется скорость точки  $E_4$  ( $V_{E_4}$ ) по системе уравнений относительно точки  $D$  и относительно точки  $E$ .

$$\begin{cases} \overline{V}_{E_4} = \overline{V}_D + \overline{V}_{E_4D}, \\ \overline{V}_{E_4} = \overline{V}_E + \overline{V}_{E_4E}. \end{cases} \quad (35)$$

Скорость точки  $E_4$  относительно  $D$  ( $V_{E_4D}$ ) направлена перпендикулярно звену  $ED$  (обе принадлежат звену 4), скорость точки  $E_4$  относительно  $E$  ( $V_{E_4E}$ ) направлена параллельно  $ED$ .

Из точки  $d$  плана скоростей проводится линия,  $\perp DE$ , а из полюса (точки  $e$ ) – прямая,  $\parallel DE$ . На их пересечении находится точка  $e_4$  (рисунок 29,б). Векторы  $de_4$  и  $pe_4$  изображают в масштабе скорости  $V_{E_4D}$  и  $V_{E_4}$ , соответственно.

$$V_{E_4D} = de_4 \mu_V, \quad V_{E_4} = pe_4 \mu_V.$$

Скорость точки  $F$  определяется по теореме подобия  $\frac{df}{de_4} = \frac{DF}{DE}$ , откуда  $df = de_4 \frac{DF}{DE}$  находят точку  $f$  на продолжении прямой  $de_4$ . Вектор  $pf$  изображает в масштабе скорость  $V_F = pf \cdot \mu_V$ .

Также по свойству подобия находят скорости центров тяжести звеньев 2 и 4.

$$\frac{bs_2}{bc} = \frac{BS_2}{BC}, \text{ откуда } bs_2 = bc \frac{BS_2}{BC}, \text{ и } V_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_V \text{ и}$$

$$\frac{ds_4}{de_4} = \frac{DS_4}{DE}, \text{ откуда } ds_4 = de_4 \frac{DS_4}{DE}, \text{ и } V_{S_4} = ps_4 \cdot \mu_V.$$

По второму свойству определяют угловые скорости звеньев по величине и направлению

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}}; \quad \omega_3 = \mathbf{0}, \text{ так как звено 3 движется поступательно;}$$

$$\omega_4 = \frac{V_{E_4D}}{l_{ED}}; \quad \omega_5 = \omega_4, \text{ так как звенья 4 и 5 соединяются}$$

поступательной парой. Направления угловых скоростей звеньев показаны на рисунке 29,b.

### 3.6.2 Построение плана ускорений

$$a_B = \omega_1^2 l_{AB}, \text{ так как } \omega_1 = \text{const}, \quad \mu_a = \frac{a_B}{\pi b} \left[ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right].$$

$$\begin{cases} \overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}, \\ \overline{a_C} = \overline{a_{C_0}^c} + \overline{a_{CC_0}^c} + \overline{a_{CC_0}^r}, \end{cases}$$

где  $a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC}$  – направлено параллельно  $BC$  от точки  $C$  к точке  $B$  на плане механизма,  $a_{CB}^t$  – перпендикулярно  $BC$ ,  $a_{C_0}^c = 0$ ,  $a_{CC_0}^c = 2\omega_3 V_{CC_0} = 0$ , так как  $\omega_3 = 0$ ,  $a_{CC_0}^r$  – направлено параллельно  $x-x$ .

Из точки  $b$  на плане ускорений проводится вектор  $\overline{bc'}$ , изображающий в соответствующем масштабе  $a_{CB}^n$ , из конца которого проводится прямая, перпендикулярная  $BC$ , а из полюса – прямая, параллельная  $x-x$ . На пересечении этих прямых находится точка  $c$ . Тогда определяются векторы  $\overline{c'c}$  и  $\overline{\pi c}$ , которые изображают в принятом масштабе ускорения  $a_{CB}^t$  и  $a_{CC_0}^r$ , соответственно (рисунок 30,b).

$$a_{CB}^t = c'c \cdot \mu_a, \quad a_C = a_{CC_0}^r = \pi c \cdot \mu_a.$$

Ускорение точки  $D$  – по теореме подобия

$$\frac{BD}{BC} = \frac{bd}{bc}, \text{ откуда } bd = bc \frac{BD}{BC}, \text{ мм.}$$

На отрезке  $bc$  плана ускорений находится точка  $d$ . Из полюса до точки  $d$  проводится вектор  $\overline{\pi d}$ , который изображает в принятом масштабе ускорение точки  $D$  ( $a_D = \pi d \cdot \mu_a$ ).

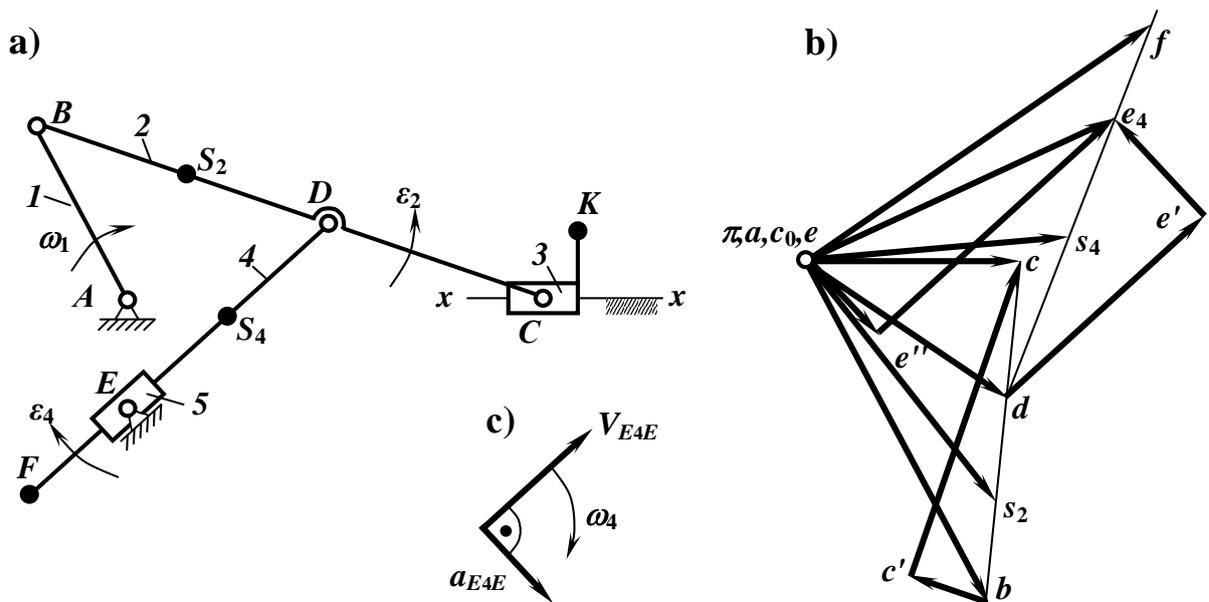


Рисунок 30 – Кулисный механизм: а – план механизма; б – план ускорений; с – определение направления ускорения  $\mathbf{a}_{E_4E}^c$

Ускорение точки  $E$  звена 4 определяется относительно точки  $D$  того же звена и точки  $E$  звена 5,  $\mathbf{a}_{E_5} = \mathbf{a}_{E_0} = \mathbf{a}_E = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{a}_{E_4}} = \overline{\mathbf{a}_D} + \overline{\mathbf{a}_{E_4D}^n} + \overline{\mathbf{a}_{E_4D}^\tau}, \\ \overline{\mathbf{a}_{E_4}} = \overline{\mathbf{a}_E} + \overline{\mathbf{a}_{E_4E}^c} + \overline{\mathbf{a}_{E_4E}^\tau}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{a}_{E_4D}^n = \omega_4^2 l_{DE}$  – вектор нормального ускорения направлен на плане механизма от точки  $E$  к точке  $D$ ,

$\mathbf{a}_{E_4D}^\tau$  – вектор тангенциального ускорения направлен перпендикулярно  $DE$ .

Определяется ускорение Кориолиса по величине  $\mathbf{a}_{E_4E}^c = 2\omega_4 V_{E_4E}$  и по направлению, для чего вектор относительной скорости поступательного движения  $\overline{V}_{E_4E}$  поворачивается на  $90^\circ$  в сторону угловой скорости звена 4 –  $\omega_4$ , в данном случае по ходу часовой стрелки (рисунок 30,с). Релятивное ускорение направлено вдоль звена 4, т.е. параллельно  $ED$ .

Строится план ускорений, находится точка  $e_4$  и определяются ускорения

$$a_{E_4D}^{\tau} = e' e_4 \cdot \mu_a, \quad a_{E_4E}^r = e'' e_4 \cdot \mu_a, \quad a_{E_4} = \pi e_4 \cdot \mu_a.$$

По свойству подобия определяются ускорения центров тяжести звеньев (те же формулы, что и для скоростей).

Определяются угловые ускорения звеньев по величине и направлению (рисунок 30,а)

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{l_{BC}}, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{E_4D}^{\tau}}{l_{ED}}, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_4.$$

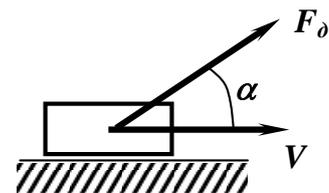
## Глава 4. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### 4.1 Силы, действующие на звенья механизма

1. *Движущие силы,  $F_d$  (моменты движущих сил,  $M_d$ )* – силы, стремящиеся ускорить движение ведущего звена. Элементарная работа, совершаемая движущей силой, на элементарном перемещении всегда положительна

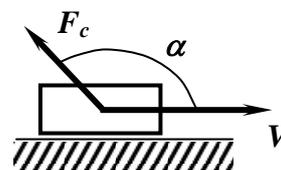
$$dA = F_d dS \cdot \cos(F_d \wedge V) > 0.$$

Направление скорости движения и силы, вызывающей это движение, совпадают или образуют острый угол.



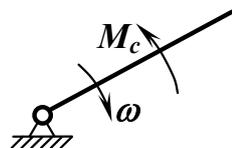
При вращательном движении звена момент движущей силы ( $M_d$ ) направлен в сторону угловой скорости звена –  $\omega$ .

2. *Силы сопротивления,  $F_c$  (моменты сил сопротивления,  $M_c$ )* – силы, стремящиеся замедлить движение ведущего звена. Элементарная работа, совершаемая силой сопротивления на элементарном перемещении, всегда отрицательна



$$dA = F_c dS \cdot \cos(F_c \wedge V) < 0.$$

Направление скорости движения и силы сопротивления противоположны или образуют тупой угол.



При вращательном движении звена момент силы сопротивления ( $M_c$ ) направлен в сторону, противоположную угловой скорости звена –  $\omega$ .

Силы сопротивления делятся на силы полезных сопротивлений и силы вредных сопротивлений.

*Силы полезных сопротивлений  $F_{nc}$*  – силы, приложенные к выходным звеньям механизма и совершающие работу, необходимую для выполнения требуемого технологического процесса.

*Силы вредных сопротивлений  $F_{vc}$*  – силы, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа, сверх той, которая необходима для преодоления сил полезных сопротивлений. Это силы трения и силы сопротивления среды.

*Силы трения,  $F_f$  (моменты сил трения,  $M_f$ )* возникают в кинематических парах (поступательных – силы и вращательных – моменты) при относительном движении соприкасающихся поверхностей.

3. *Силы тяжести звеньев,  $G$*  – силы, работа которых на некотором, отсчитываемом по вертикали отрезке  $h$  (рисунок 31), будет определяться по формуле  $A_G = \pm G \cdot h$

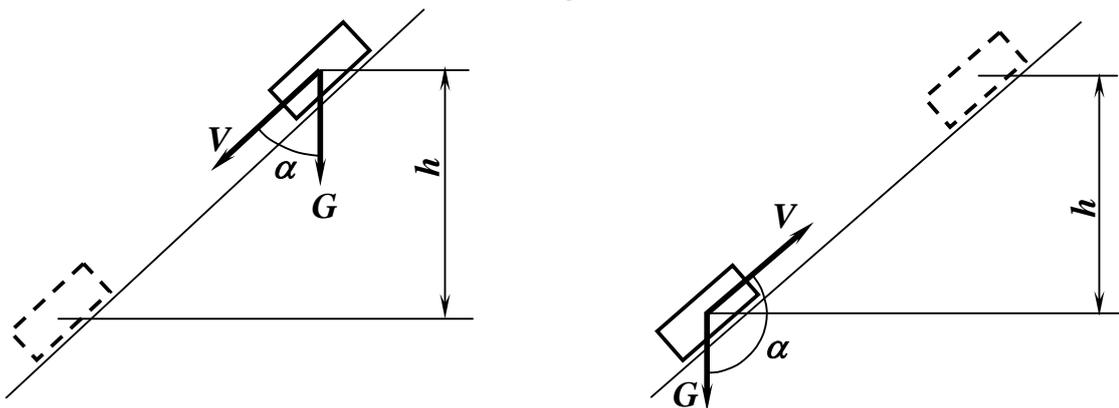
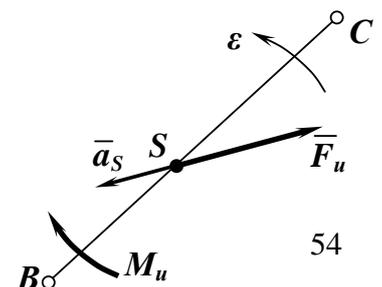


Рисунок 31 – Работа силы тяжести

и является положительной, когда центр тяжести звена опускается (сила тяжести является движущей – угол между направлениями силы и скорости острый); отрицательной, когда центр тяжести поднимается (сила тяжести оказывается силой сопротивления – угол между направлениями силы и перемещения тупой); равна нулю, если центр тяжести звена остается на одном и том же горизонтальном уровне.

4. *Силы инерции  $F_u$  и моменты сил инерции  $M_u$*  звеньев возникают при движении звеньев с ускорением  $\bar{F}_u = -m \cdot \bar{a}_S$ ,  $M_u = \varepsilon \cdot J_S$ ,

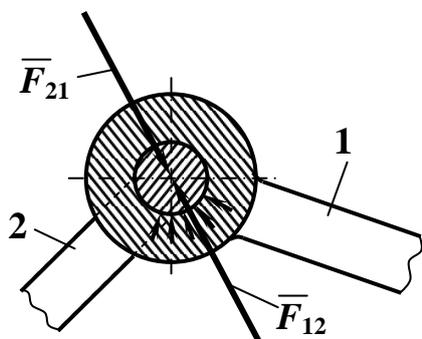


где  $J_S$  – момент инерции звена, относительно оси, проходящей через центр его тяжести.

5. Реакции связей  $F_{24}$  – это силы, приложенные к геометрическим элементам звеньев, и представляющие давление звеньев друг на друга. Реакции связей являются внутренними силами для всего механизма и внешними для каждого звена в отдельности.  $F_{24}$  – это сила, действующая со стороны звена 2 на звено 4. По третьему закону Ньютона

$$\bar{F}_{24} = -\bar{F}_{42}.$$

#### 4.2 Условие статической определенности кинематической цепи



Вращательная кинематическая пара V класса.

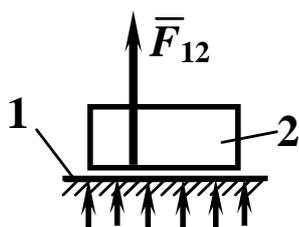
$F_{12}$  – сила, действующая со стороны звена 2 на звено 1.

$F_{21}$  – сила, действующая со стороны звена 1 на звено 2.

$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}.$$

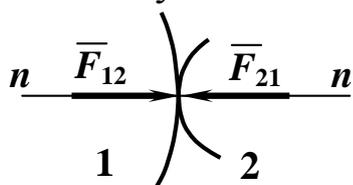
Модуль неизвестен, направление неизвестно, известна только точка приложения реакции.

Поступательная кинематическая пара V класса.



В поступательной кинематической паре V класса неизвестны величина и точка приложения реакции, зато известно направление – перпендикулярно направляющей (по нормали к поверхности).

Кинематическая пара IV класса.



В двухподвижной кинематической паре неизвестна величина реакции, известны направление (по нормали к соприкасающимся поверхностям) и точка приложения (точка касания).

Число уравнений статики, которое можно составить для плоского механизма –

$3n$  ( $n$  – число подвижных звеньев);

$2p_5$  – число неизвестных параметров у пар V класса;

$p_4$  – число неизвестных параметров у пар IV класса.

Для того, чтобы задача была решена, необходимо, чтобы  $3n = 2p_5 + p_4$ . Если пар четвертого класса нет, то  $3n - 2p_5 = 0$ ,

откуда  $p_5 = \frac{3}{2}n$ , т.е. статически определяемыми являются

структурные группы Ассура.

Силовой анализ проводится в порядке, обратном образованию механизма.

Чтобы для механизма можно было применить уравнения статики, следует воспользоваться *принципом D'Alembert*: если ко всем силам, приложенным к звену или нескольким звеньям, добавить силы инерции, развиваемые этими звеньями, то данная система будет находиться в равновесии.

### 4.3 Кинетостатика четырехшарнирного механизма

При определении реакций в кинематических парах проводят силовой расчет механизма. Если при расчете не учитываются силы инерции звеньев, расчет называется статическим. Если силы инерции учитываются при расчете механизма, то такой расчет называется кинетостатическим. Рассмотрим пример кинетостатического расчета четырехшарнирного механизма.

*Задано:*  $G_1, G_2, G_3, M_3, J_{S1}, J_{S2}, J_{S3}$  (рисунок 32). По плану ускорений определяются ускорения центров тяжести звеньев и угловые ускорения звеньев.

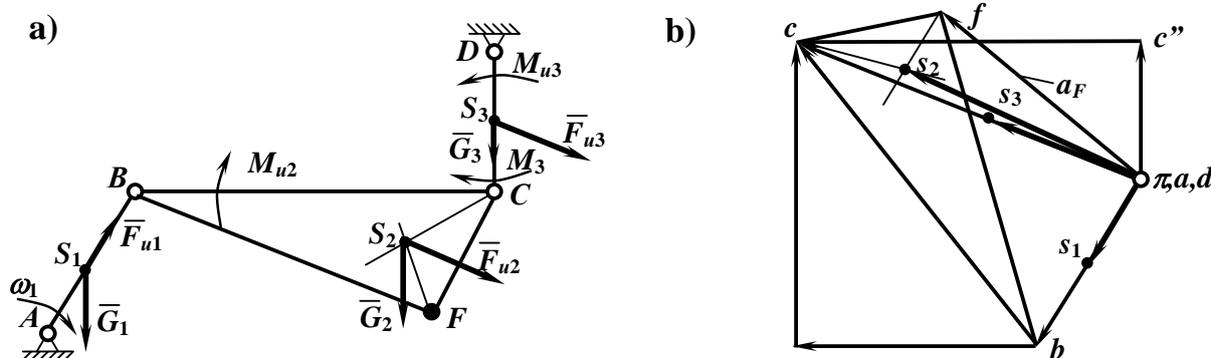


Рисунок 32 – Кинетостатика шарнирного четырехзвенника:  
а – план механизма; б – план ускорений

Ускорения центров тяжести определяются по теореме подобия. Определяются силы инерции и моменты сил инерции.

$F_{u1} = m_1 a_{S_1}$ ,  $M_{u1} = J_{S_1} \varepsilon_1 = \mathbf{0}$ , так как  $\varepsilon_1 = \mathbf{0}$ , ( $\omega_1 = \text{const}$ ).  
 $F_{u2} = m_2 a_{S_2}$ ,  $M_{u2} = J_{S_2} \varepsilon_2$ ,  $F_{u3} = m_3 a_{S_3}$ ,  $M_{u3} = J_{S_3} \varepsilon_3$ . Силы инерции направлены противоположно направлениям ускорений центров тяжести звеньев, а моменты сил инерции – противоположно угловым ускорениям звеньев.

$M_3$  – момент сил полезных сопротивлений, приложен к третьему звену – коромыслу, противоположно направлению угловой скорости звена.

### 4.3.1 Кинестатика структурной группы

Выделяют структурную группу (звенья 2 и 3) заменяя связи их реакциями (рисунок 33).

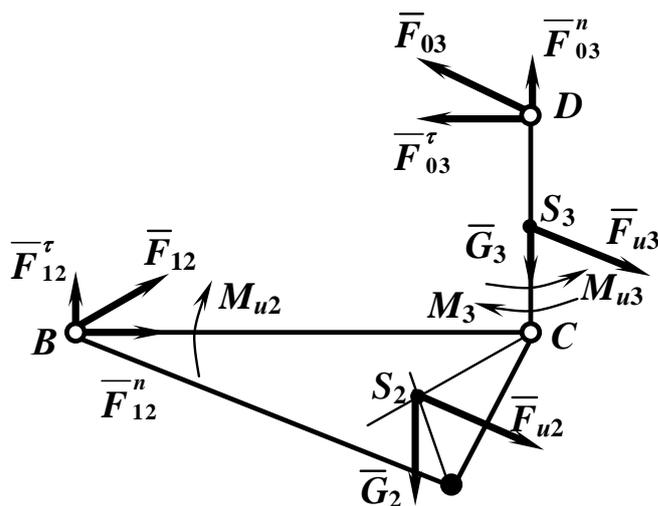


Рисунок 33 – Структурная группа (звенья 2, 3)

Необходимо определить величину и направление реакций,  $F_{03}$  (внешние реакции для группы) и  $F_{23}$  (внутренняя реакция).

Условие равновесия для структурной группы

$$\sum \bar{F} = \mathbf{0}, \quad \bar{F}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{u3} + \bar{F}_{03} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

В этом уравнении четыре неизвестных – величины и направления реакций  $F_{12}$  и  $F_{03}$ .

Раскладывают внешние реакции на составляющие

$$\bar{F}_{12} = \bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^\tau \quad \text{и} \quad \bar{F}_{03} = \bar{F}_{03}^n + \bar{F}_{03}^\tau,$$

причем нормальные составляющие направляют вдоль соответствующих звеньев таким образом, чтобы линии их действия проходили через точку  $C$ , а тангенциальные – перпендикулярно звеньям.

$$\underline{\underline{F}}_{12}^n + \underline{\underline{F}}_{12}^\tau + \underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{F}}_{u2} + \underline{\underline{G}}_3 + \underline{\underline{F}}_{u3} + \underline{\underline{F}}_{03}^\tau + \underline{\underline{F}}_{03}^n = \mathbf{0}. \quad (37)$$

В уравнении (37) также 4 неизвестных, решить его невозможно.

Рассматривают равновесие одного из звеньев, например, звена 2 (рисунок 34).

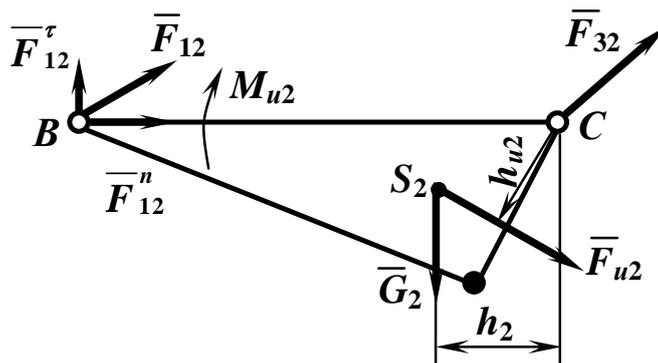


Рисунок 34 – Равновесие звена 2

$$\sum M_C = 0, \quad -F_{12}^\tau l_{BC} - M_{u2} + G_2 h_2 \mu_l + F_{u2} h_{u2} \mu_l = 0,$$

откуда 
$$F_{12}^\tau = \frac{G_2 h_2 \mu_l + F_{u2} h_{u2} \mu_l - M_{u2}}{l_{BC}}.$$

Затем рассматривают равновесие звена 3 (рисунок 35) и определяют тангенциальную составляющую реакции  $\underline{\underline{F}}_{03}^\tau$ .

$$\sum M_C = 0, \quad F_{03}^\tau l_{CD} - M_3 + M_{u3} - F_{u3} h_{u3} \mu_l = 0,$$

$$F_{03}^\tau = \frac{M_3 + F_{u3} h_{u3} \mu_l - M_{u3}}{l_{BC}}.$$

Так как определились тангенциальные составляющие реакций, то можно решить уравнение (37) графически.

$$\underline{\underline{F}}_{12}^n + \underline{\underline{F}}_{12}^\tau + \underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{F}}_{u2} + \underline{\underline{G}}_3 + \underline{\underline{F}}_{u3} + \underline{\underline{F}}_{03}^\tau + \underline{\underline{F}}_{03}^n = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Для этого на направлении нормальной составляющей реакции  $F_{12}$  берут произвольную точку и от нее в выбранном масштабе сил откладывают известную касательную составляющую, затем, согласно уравнению (38) все известные силы последовательно складывают. Из конца вектора  $\underline{\underline{F}}_{03}^\tau$  проводят направление нормальной составляющей (рисунок 36) до пересечения с

направлением нормальной составляющей реакции  $F_{12}$ . Так как сумма сил равна нулю, то силовой многоугольник должен быть замкнутым.

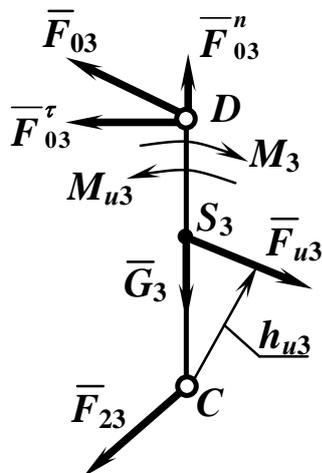


Рисунок 35 – Равновесие звена 3

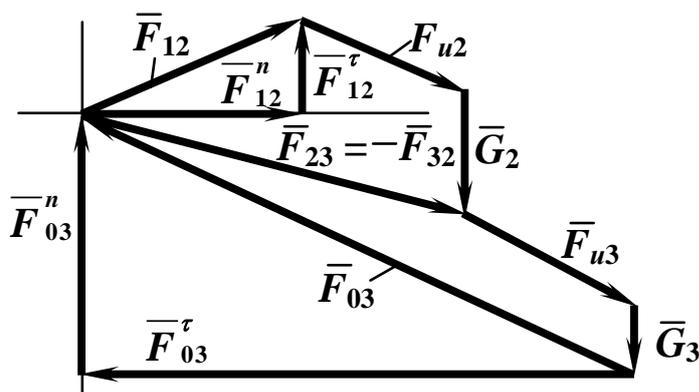


Рисунок 36 – Графическое решение уравнения (38)

Так графически определяются направления и величины неизвестных реакций. На этом же силовом многоугольнике можно найти и внутреннюю реакцию, например, для звена 2 из условия равновесия

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{F}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{32} = 0 \text{ определяется } \bar{F}_{32}.$$

Можно было рассмотреть условие равновесия звена 3

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{G}_3 + \bar{F}_{u3} + \bar{F}_{03} + \bar{F}_{23} = 0.$$

#### 4.3.2 Кинетостатика ведущего звена (определение уравновешивающей силы, уравновешивающего момента)

Необходимо определить реакцию в кинематической паре  $A$  ( $F_{01}$ ) – величину и направление (рисунок 37), а также величину и направление уравновешивающего момента –  $M_y$ .

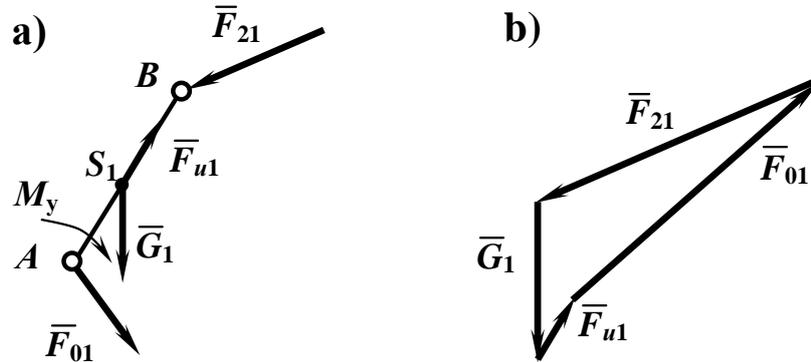


Рисунок 37 – Кинетостатика ведущего звена

Так как степень подвижности ведущего звена (механизма I класса) не равна нулю ( $W \neq 0$ ), то ведущее звено после приложения к нему сил инерции не будет находиться в равновесии. Для равновесия необходимо приложить к нему уравновешивающую силу либо уравновешивающий момент. В этом примере к звену  $AB$  прикладывается уравновешивающий момент.

Если рассматриваемая кинематическая цепь является двигателем, то уравновешивающий момент – это момент, приложенный со стороны рабочей машины к ведомому валу двигателя (рисунок 38,а).

Если рассматриваемая кинематическая цепь является рабочей машиной, то уравновешивающий момент – это момент, приложенный со стороны двигателя к ведущему валу рабочей машины (рисунок 38,б).

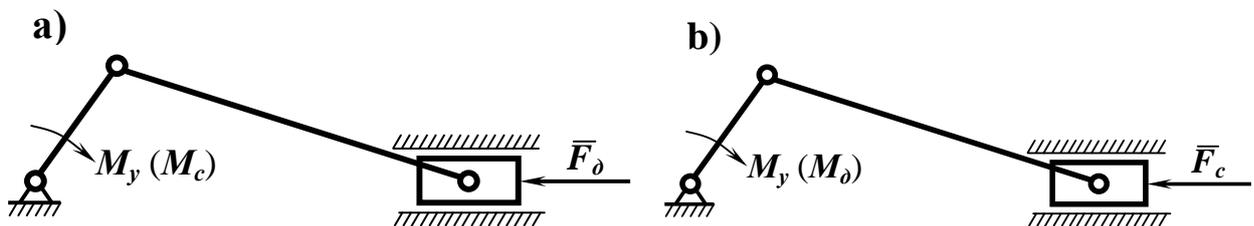


Рисунок 38 – Уравновешивающий момент:  
а – двигатель; б – рабочая машина (насос)

Под действием всех сил и уравновешивающего момента ведущее звено находится теперь в равновесии и для него можно применять условия статики

$$\sum M_A = 0, \quad -M_y - G_1 h_1 \mu_l + F_{21} h_{21} \mu_l = 0,$$

откуда находят уравновешивающий момент

$$M_y = F_{21} h_{21} \mu_l - G_1 h_1 \mu_l.$$

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{G}_1 + \bar{F}_{u3} + \bar{F}_{21} + \bar{F}_{01} = 0,$$

откуда находят реакцию в паре  $A$  (рисунок 37,b).

#### 4.4 Кинетостатика кулисного механизма

Определяются силы инерции и моменты сил инерции, развиваемые звеньями кулисного механизма (рисунок 39).

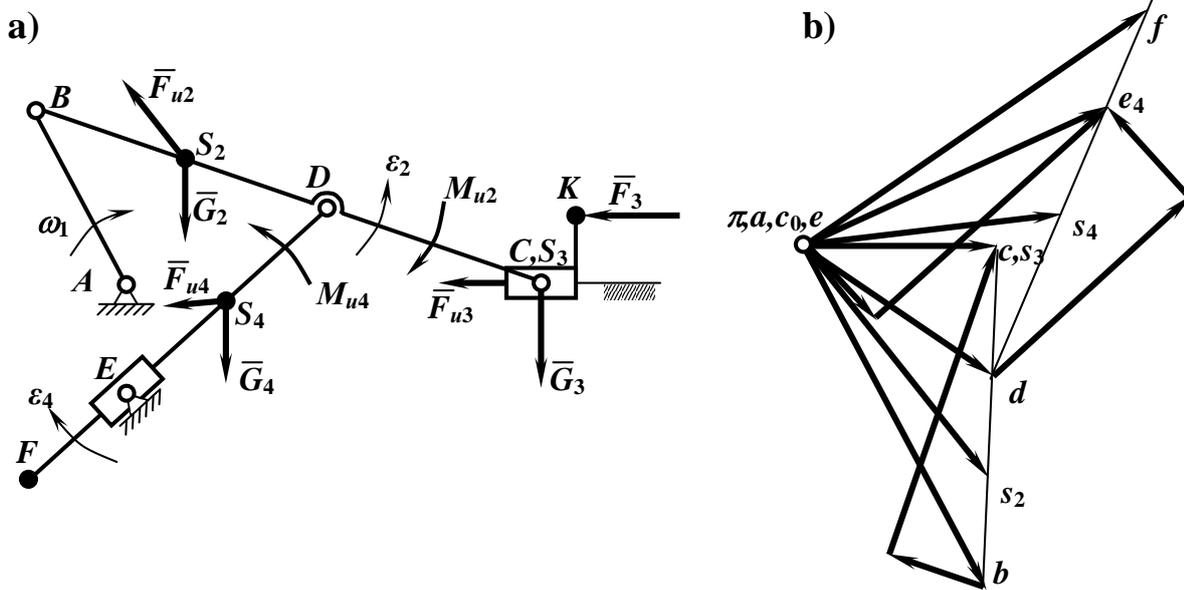


Рисунок 39 – Определение сил инерции и моментов сил инерции кулисного механизма: а – план механизма; б – план ускорений

$F_{u1} = m_1 a_{S_1} = 0$ , так как  $m_1 = 0$ ,  $M_{u1} = \varepsilon_1 J_{S_1} = 0$ , так как  $\varepsilon_1 = 0$ ;

$$F_{u2} = m_2 a_{S_2}, \quad M_{u2} = \varepsilon_2 J_{S_2};$$

$$F_{u3} = m_3 a_{S_3}, \quad M_{u3} = \varepsilon_3 J_{S_3} = 0, \text{ так как } \varepsilon_3 = 0;$$

$$F_{u4} = m_4 a_{S_4}, \quad M_{u4} = \varepsilon_4 J_{S_4};$$

$F_{u5} = m_5 a_{S_5} = 0$ , так как  $m_5 = 0$ ,  $M_{u5} = \varepsilon_5 J_{S_5} = 0$ , так как  $J_{S_5} = 0$ .

Сила полезного сопротивления  $F_3$  направлена в сторону, противоположную скорости точки  $K$ .

#### 4.4.1 Кинестатика структурной группы

Выделяется последняя присоединенная группа Ассура (рисунок 40, звенья 4, 5), заменяются связи их реакциями, про которых известно лишь то, что они проходят  $F_{24}$  – через точку  $D$ , а  $F_{05}$  – через точку  $E$ . В уравнении

$$\sum F = 0, \quad \bar{F}_{24} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{u4} + \bar{F}_{05} = 0 \quad (39)$$

четыре неизвестных, решить его графически невозможно. Это структурная группа Асура второго класса. Для ее решения можно применить следующий прием.

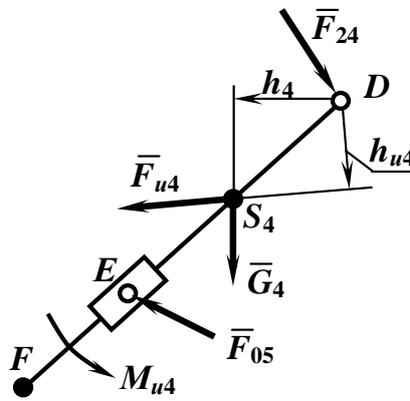


Рисунок 40 – Кинестатика группы (звенья 4, 5)

Рассматривается равновесие звена 5 (кулисного камня), на который действуют две реакции  $F_{05}$  и  $F_{45}$  (рисунок 41), про которые известно, что  $F_{05}$  проходит через центр шарнира, а  $F_{45}$  направлена перпендикулярно  $DE$ .

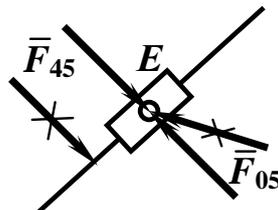


Рисунок 41 – Равновесие звена 5

Так как под действием этих сил звено 5 находится в равновесии, то для него можно использовать уравнения

$\sum M_E = 0$ , тогда  $F_{45}h_{45} = 0$ . Так как  $F_{45} \neq 0$ , то  $h_{45} = 0$ . Следовательно, сила  $F_{45}$  проходит через точку  $E$  и остается перпендикулярной  $DE$ . Из другого условия равновесия

$\sum \bar{F} = \mathbf{0}$ ,  $\bar{F}_{45} + \bar{F}_{05} = \mathbf{0}$  получается, что  $\bar{F}_{45} = -\bar{F}_{05}$ , т.е. что реакция  $F_{05}$  перпендикулярна звену  $DE$  (неверные силы перечеркнуты). Зная точку приложения и направление реакции можно определить ее по величине, взяв для структурной группы

$$\sum M_D = 0, \quad -F_{05}l_{DE} + G_4h_4\mu_l - G_{u4}h_{u4}\mu_l + M_{u4} = 0,$$

откуда  $F_{05} = \frac{G_4h_4\mu_l - G_{u4}h_{u4}\mu_l + M_{u4}}{l_{DE}}$ .

Теперь в уравнении  $\bar{F}_{24} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{u4} + \bar{F}_{05} = \mathbf{0}$  всего два неизвестных и оно решается графически (рисунок 42).

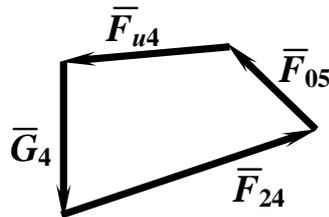


Рисунок 42 – Решение уравнения 39

Выделяется следующая структурная группа (звенья 2, 3), заменяются связи их реакциями (рисунок 43).

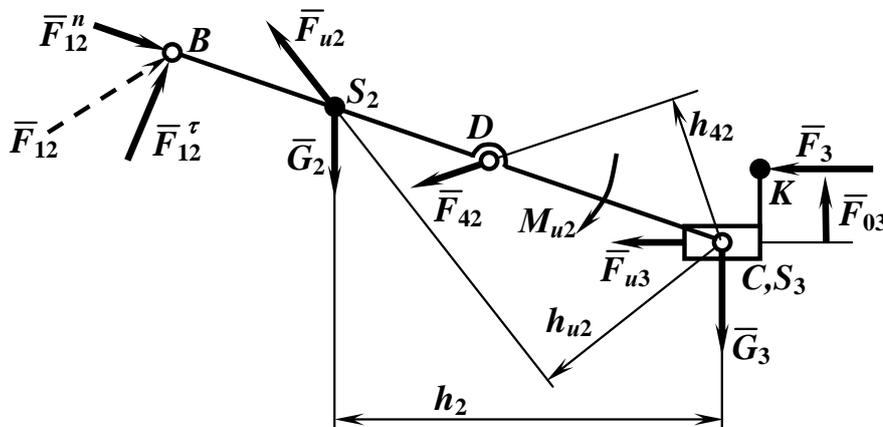


Рисунок 43 – Кинетостатика группы (звенья 2, 3)

Требуется определить реакции  $F_{12}$ ,  $F_{03}$  и  $F_{23}$  по величине и направлению. По условию равновесия

$$\sum \bar{F} = \mathbf{0}, \quad \bar{F}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{42} + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{03} = \mathbf{0}$$

определить  $F_{12}$  и  $F_{23}$  не удастся, хотя всего три неизвестных. Это группа Ассур второго класса, для нее приходится раскладывать  $F_{12}$  на нормальную и тангенциальную составляющие

$$\bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^\tau + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{42} + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{03} = 0, \quad (40)$$

но и в этом уравнении три неизвестных. Поэтому рассматривается равновесие звена 2, для которого

$$\sum M_C = 0,$$

$$-F_{12}^\tau l_{BC} + G_2 h_2 \mu_l - F_{u2} h_{u2} \mu_l + F_{42} h_{42} \mu_l - M_{u2} = 0, \text{ откуда}$$

$$F_{12}^\tau = \frac{G_2 h_2 \mu_l - F_{u2} h_{u2} \mu_l + F_{42} h_{42} \mu_l - M_{u2}}{l_{BC}}.$$

Теперь в уравнении (40) два неизвестных и оно решается графически

$$\bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{12}^\tau + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{42} + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{03} = 0.$$

Рассмотрев условия равновесия звена 3

$$\sum F = 0, \quad \bar{F}_{23} + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{03} = 0$$

находят реакцию  $F_{23}$  (рисунок 44) по величине и направлению

$$\sum M_C = 0, \quad F_3 h_3 + F_{03} h_{03} = 0$$

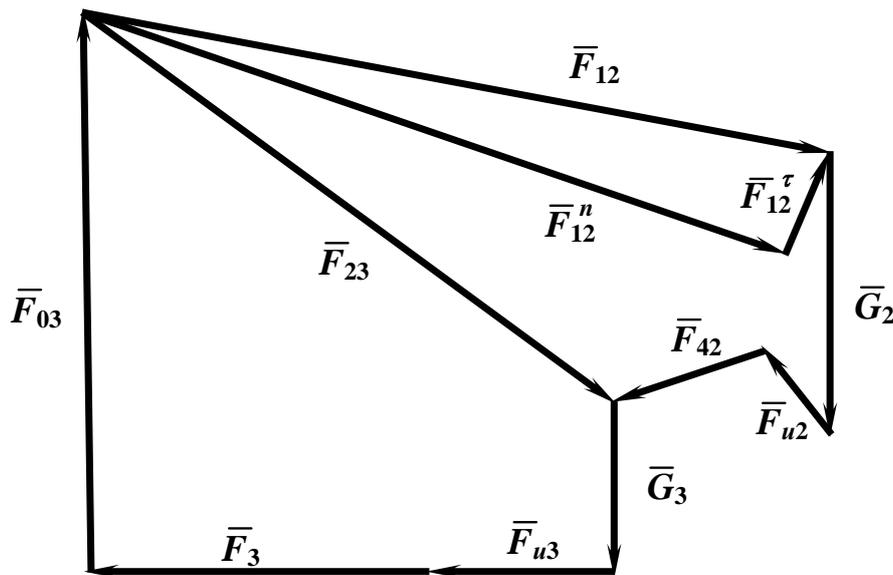


Рисунок 44 – Силовой многоугольник для структурной группы

и точку приложения реакции  $F_{03}$  (рисунок 45).

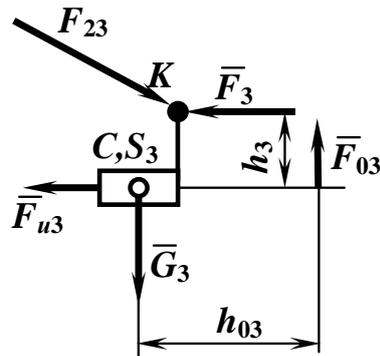


Рисунок 45 – Равновесие звена 3

$$h_{03} = -\frac{F_3 h_3}{F_{03}}, \text{ знак "минус" показывает, что реакция } F_{03}$$

приложена не справа, а слева от точки  $C$ .

#### 4.4.2 Кинестатика ведущего звена

Для ведущего звена  $AB$  определяется реакция  $F_{01}$ , а также (в этом примере) уравновешивающая сила  $F_y$ , которая прикладывается к ведущему звену в точке  $B$  перпендикулярно звену (рисунок 46).

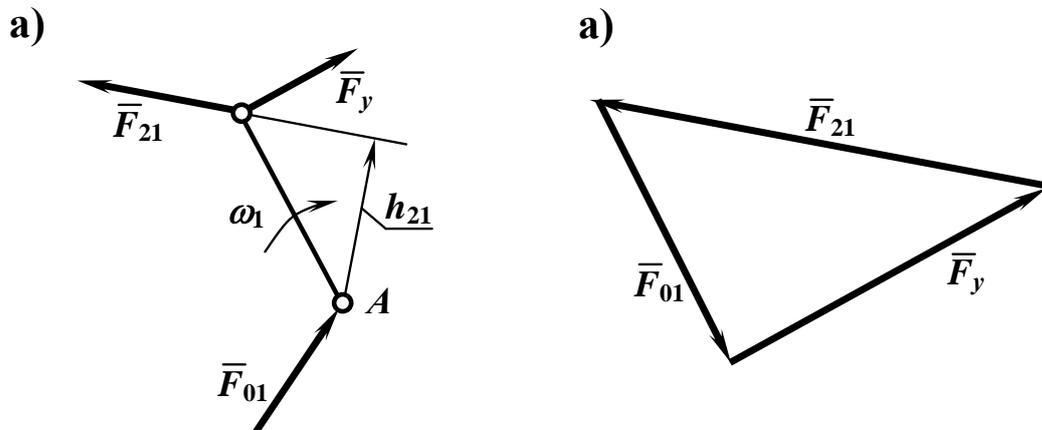


Рисунок 46 – Кинестатика ведущего звена:  
а – ведущее звено; б – план сил

Из условий равновесия определяется сначала  $F_y$ ,

$$\sum M_A = 0, \quad F_{21} h_{21} - F_y AB = 0, \text{ откуда } F_y = \frac{F_{21} h_{21}}{AB},$$

а затем  $F_{01}$ :  $\sum F = 0, \quad \underline{\underline{F}}_{21} + \underline{\underline{F}}_{21} + \underline{\underline{F}}_{01} = 0.$

#### 4.5 Приведенные силы и моменты сил

При исследовании механизма удобно все силы и моменты сил, приложенные к звеньям механизма, заменять одной приведенной силой ( $F_{np}$ ) или моментом сил ( $M_{np}$ ). Обычно за звено приведения принимается ведущее звено рабочей машины (механизма) или ведомое (выходное) звено двигателя.

Приведенной называется сила, мгновенная мощность которой должна быть равна сумме мгновенных мощностей, развиваемых приложенными силами и моментами в данном положении механизма

$$P = F_{np}V_1 \text{ или } P = M_{np}\omega_1,$$

$$P = \sum P_i = \sum (F_i V_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i), \text{ откуда}$$

$$F_{np} = \sum (F_i \frac{V_i}{V_1} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{V_1}) \text{ или}$$

$$M_{np} = \sum (F_i \frac{V_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}).$$



Рисунок 47 – Приведенные силы и моменты сил

Приведенным называется момент, мгновенная мощность которого должна быть равна сумме мгновенных мощностей, развиваемых приложенными силами и моментами в данном положении механизма.

#### 4.6 Рычаг Н.Е. Жуковского

Согласно принципу возможных перемещений (если на какую-либо механическую систему действуют внешние силы, то, прибавляя к данным силам силы инерции и давая возможные для данного ее положения перемещения, получаем ряд элементарных работ, сумма которых должна равняться нулю)

$$\sum F_i \delta S_i \cos \alpha_i = 0, \tag{41}$$

где  $F_i$  – приложенные силы,

$\delta S_i$  – возможные перемещения точек, в которых приложены силы

$\alpha$  – угол между направлением приложенной силы и возможного перемещения.

Так как рассматриваемая цепь является механизмом, а связи считаем независимыми от времени (нет износа, ржавчины), то действительные перемещения будут в числе возможных

$$\sum F_i dS_i \cos \alpha_i = 0,$$

где  $dS_i$  – действительные перемещения

$$\sum F_i \frac{dS_i}{dt} \cos \alpha_i = 0 \text{ или}$$

$$\sum F_i V_i \cos \alpha_i = 0 \text{ – мощность, развиваемая всеми силами.}$$

Пусть на звено  $BC$  действует сила  $F_i$ , приложенная в точке  $D$ . Известна скорость точки  $B$  и направление скорости точки  $C$ . Построим план скоростей для звена и найдем скорость точки  $D$  (рисунок 48,б). Вектор скорости точки  $D$  переносим на план звена (рисунок 48,а) и найдем угол между скоростью этой точки и силой  $F_i$ .

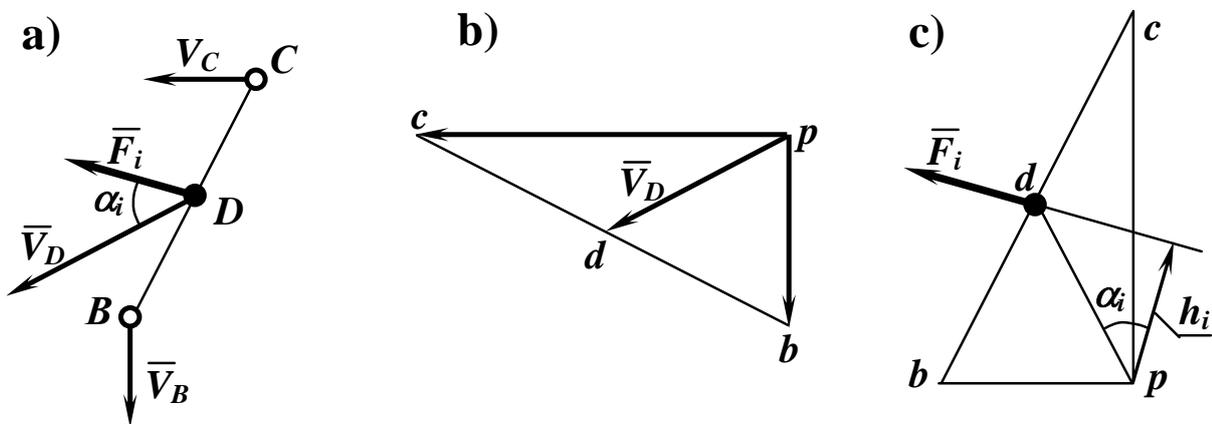


Рисунок 48 – Рычаг Жуковского:

а – план звена; б – план скоростей; с – повернутый план скоростей

Поворачиваем план скоростей на  $90^\circ$  в любую сторону (в примере – по ходу часовой стрелки), на него переносим силу  $F_i$ , не изменяя ее по направлению. На линию действия силы  $F_i$  из полюса опускаем перпендикуляр.

Определяем мощность, развиваемую силой  $F_i$

$$P_i = F_i V_D \cos \alpha_i. \tag{42}$$

На повернутом плане скоростей найдем угол  $\alpha_i$ . Это угол между линией  $pd$  и перпендикуляром к силе –  $h_i$  (стороны, образующие угол, взаимно перпендикулярны:  $pd \perp V_D$ , а  $h_i \perp F_i$ ). Определим  $\cos \alpha_i$  и подставим в формулу (42)

$$P_i = F_i pd \mu_V \frac{h_i}{pd}, \text{ откуда } P_i = F_i h_i \mu_V.$$

Для всех сил, действующих на звенья механизма

$$\Sigma F_i h_i \mu_V = 0, \text{ но так как } \mu_V \neq 0, \text{ то } \Sigma F_i h_i = 0.$$

**Правило.** Все внешние силы, включая силы инерции, переносят на, повернутый на  $90^\circ$ , план скоростей в соответствующие точки, не изменяя ни их величины, ни направления. Повернутый план скоростей считают жестким рычагом, который под действием внешних сил может вращаться вокруг полюса плана сил  $p$  как вокруг неподвижной опоры.

Рассмотрим, как определяются моменты сил на рычаге Жуковского. Пусть на звено  $BC$  действует момент инерции сил –  $M_u$  (рисунок 49). Заменим его парой сил, приложенных в точках  $B$  и  $C$ , перпендикулярно звену.

$$F_{u1} = F_{u2} = \frac{M_u}{l_{BC}}.$$

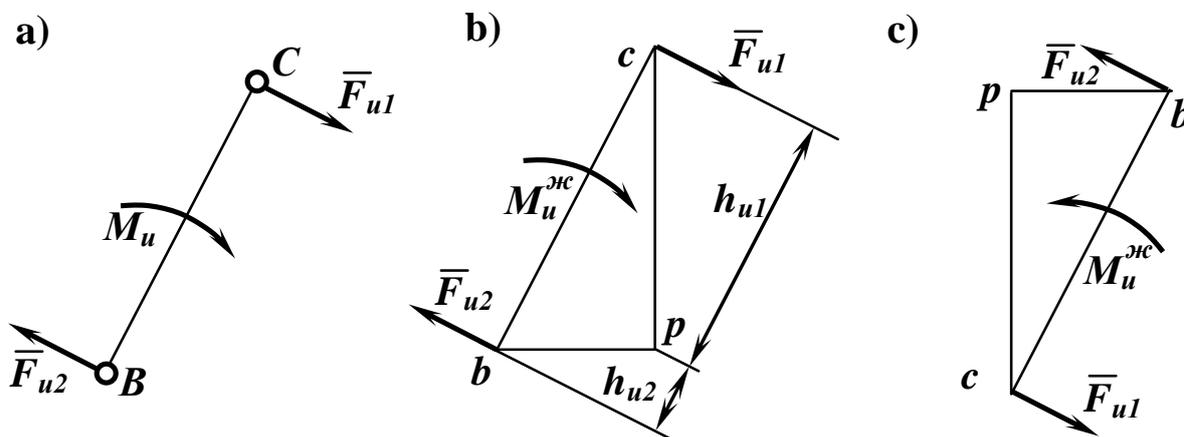


Рисунок 49 – Моменты сил на рычаге Жуковского:

а – звено; б – сходственность отрезков  $BC$  и  $bc$ ;

с – несходственность отрезков  $BC$  и  $bc$

Переносим силы на повернутый по ходу часовой стрелки план скоростей в соответствующие точки и определяем момент сил инерции на рычаге Жуковского

$$M_u^{жс} = F_{u1}h_{u1} + F_{u2}h_{u2}.$$

Так как  $\underline{V}_C = \underline{V}_B + \underline{V}_{CB}$  и  $V_{CB} \perp BC$ , то, повернув отрезок  $bc$  на  $90^\circ$ , получим  $bc \parallel BC$ , следовательно  $h_{u1} + h_{u2} = bc$ . Тогда

$$M_u^{жс} = F_{u1}h_{u1} + F_{u2}h_{u2} = M_u \frac{bc}{l_{BC}}, \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

При повороте плана скоростей против хода часовой стрелки (рисунок 49,с) момент инерции на рычаге Жуковского изменяет направление и тогда, в общем виде

$$M_u^{жс} = \pm M_u \frac{bc}{l_{BC}}.$$

**Правило:** При переносе на рычаг Жуковского момент своего направления не изменяет, если отрезки на плане механизма и на повернутом плане скоростей сходственно расположены.

#### 4.7 Определение приведенных и уравнивающих сил методом Жуковского

Рассмотрим определение уравнивающей силы методом Жуковского на примере кулисного механизма (параграф 2.5). Вычерчиваем план механизма с нанесенными на него силами и моментами сил инерции, а также план скоростей этого механизма (рисунок 50).

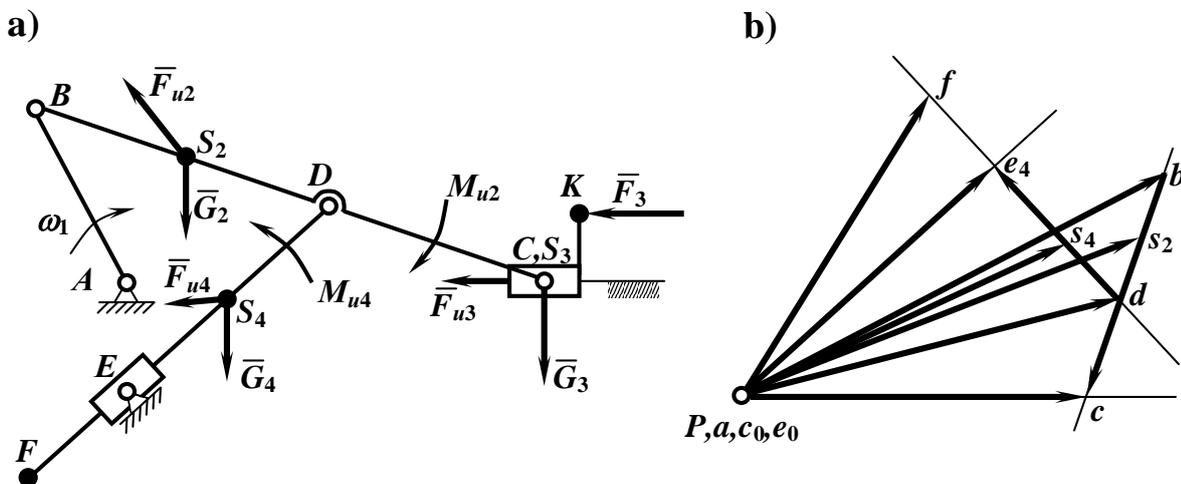


Рисунок 50 – Определение уравнивающей силы:

а – план механизма; б – план скоростей

Поворачиваем план скоростей на  $90^\circ$  и переносим на него в соответствующие точки все силы, включая силы инерции (рисунок 51).

Рассматриваем повернутый план скоростей как жесткий рычаг, который под действием приложенных к нему сил и моментов может вращаться вокруг полюса как вокруг неподвижной опоры. Чтобы он не вращался (находился в равновесии), приложим к нему в точке **b** уравнивающую силу (перпендикулярно **pb**, т.е. звену **AB**), которую и определяем из условия

$$\Sigma M_p = 0.$$

$$F_y pb + M_{u2}^{жс} - F_{u2} h_{u2} - G_2 h_2 - (F_{u3} + F_3) pc - F_{u4} h_{u4} - G_2 h_2 - M_{u4}^{жс} = 0,$$

откуда

$$F_y = \frac{F_{u2} h_{u2} + G_2 h_2 + (F_{u3} + F_3) pc + F_{u4} h_{u4} - G_2 h_2 + M_{u4}^{жс} - M_{u2}^{жс}}{pb}.$$

$$\overline{F}_{np} = -\overline{F}_y.$$

Приведенная сила равна по величине уравнивающей, приложена в той же точке и противоположно направлена.



## Глава 5. ДИНАМИКА МАШИН

### 5.1 Режимы движения механизмов

При включении любой машины звенья ее из состояния покоя разгоняются до определенных номинальных скоростей, машина заданное время работает и затем по какой-либо причине останавливается.

Полным временем движения машины называется промежуток времени от момента начала движения машины до момента окончания движения. Так как закон движения всех звеньев механизма определяется законом движения ведущего звена, то полным временем движения машины является промежуток времени от момента начала движения ведущего звена до момента окончания его движения. Полное время движения машины (рисунок 52) состоит из: времени разгона ( $t_p$ ), времени установившегося движения ( $t_{y.d.}$ ), времени выбега ( $t_e$ ).

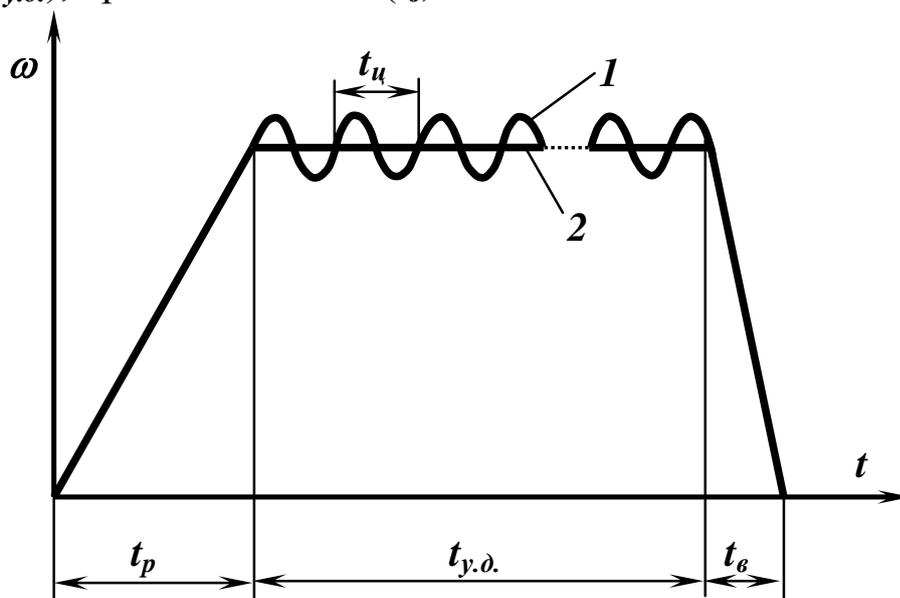


Рисунок 52 – Режимы движения

Время разгона характеризуется возрастанием скорости ведущего звена от нулевого до некоторого среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости этого звена машины.

Время выбега характеризуется уменьшением скорости ведущего звена от среднего до нулевого значения и зависит от

характера выключения: окончание работы, резкое торможение, внезапная поломка и т.д.

$t_p$  – время разгона,

$t_{y.d.}$  – время установившегося движения,

$t_g$  – время выбега,

$t_u$  – время цикла  $t_{y.d.} = t_u N_u$ .

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$A_d - A_c = \sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mV_0^2}{2},$$

где  $A_d$  – работа приведенных движущих сил,

$A_c$  – работа приведенных сил сопротивления.

$$t_p: \sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mV_0^2}{2} > 0, \quad A_d > A_c;$$

$$t_{y.d.}: \sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mV_0^2}{2} = 0, \quad A_d = A_c;$$

$$t_g: \sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mV_0^2}{2} < 0, \quad A_d < A_c.$$

*Неустановившимся* называют движение, происходящее под действием сил, сумма работ которых за любой промежуток времени не равна нулю ( $t_p, t_g$ ).

*Периодом движения* машины называют промежуток времени, по истечении которого положения, скорости и ускорения всех точек механизма принимают первоначальные значения и вновь повторяются с прежней закономерностью.

*Неравновесным установившимся* называют движение, происходящее под действием сил, сумма работ которых за период равна нулю (кривая 1).

*Равновесным установившимся* называют движение, происходящее под действием сил, сумма работ которых за любой промежуток времени равна нулю (прямая 2).

## 5.2 Кинетическая энергия механизма

Кинетическая энергия отдельных звеньев:

а) звено совершает сложное движение

$$T = \frac{mV_S^2}{2} + \frac{J_S \omega^2}{2},$$

где  $m$  – масса звена;

$V_S$  – скорость центра тяжести звена;

$\omega$  – угловая скорость звена;

$J_S$  – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр его тяжести.

b) звено движется поступательно

$$T = \frac{mV_S^2}{2};$$

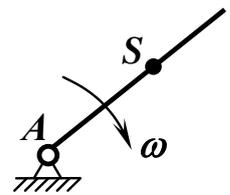
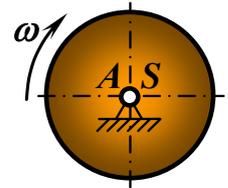
c) звено совершает вращательное движение

1. Центр тяжести звена совпадает с центром его вращения

$$T = \frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{J_S \omega^2}{2}.$$

2. Центр тяжести звена не совпадает с центром его вращения

$$T = \frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{(J_S + m \cdot l_{AS}^2) \omega^2}{2} = \frac{mV_S^2}{2} + \frac{J_S \omega^2}{2}.$$



Для кривошипно-ползунного механизма (рисунок 53), в котором кривошип совершает вращательное движение, шатун – сложное, а ползун – поступательное, кинетическая энергия определяется

$$T = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_1 V_{S_1}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{m_3 V_{S_3}^2}{2}.$$

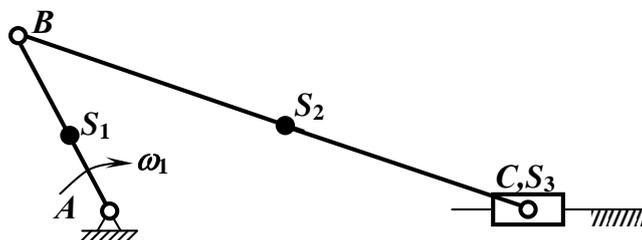


Рисунок 53 – Кинетическая энергия механизма

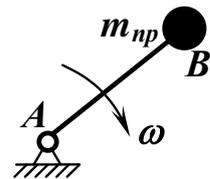
### 5.3 Приведенная масса и приведенный момент инерции масс механизма

Кинетическая энергия любого механизма может быть определена по формуле

$$T = \sum \left( J_{Si} \frac{\omega_i^2}{2} + m_i \frac{V_{Si}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum (J_{Si} \omega_i^2 + m_i V_{Si}^2),$$

$$T = \frac{V_B^2}{2} \sum [m_i \left( \frac{V_{Si}}{V_B} \right)^2 + J_{Si} \left( \frac{\omega_i}{V_B} \right)^2], \quad T = \frac{m_{np} V_B^2}{2}.$$

Приведенной массой ( $m_{np}$ ) называется условная масса, сосредоточенная в точке приведения, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма в данном положении.



$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \sum [m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_1} \right)^2 + J_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2], \quad T = \frac{J_{np} \omega_1^2}{2}.$$

Приведенным моментом инерции ( $J_{np}$ ) называется момент инерции условного тела, вращающегося вместе со звеном приведения, кинетическая энергия которого равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма в данном положении.

#### 5.4 Коэффициент полезного действия механизмов

Сумма работ движущих сил и сил сопротивления есть работа сил инерции механизма

$$A_d - A_c = \sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mV_0^2}{2} = \pm A_u.$$

$\pm A_u$  – работа сил инерции, “плюс” или “минус” так как кинетическая энергия может уменьшаться или увеличиваться.

$$A_d - A_c \pm A_u = 0, \quad A_d - A_c \pm A_u \pm A_G = 0,$$

$$A_d - A_{nc} - A_{mp} \pm A_u \pm A_G = 0,$$

где  $A_{nc}$  – работа сил полезных сопротивлений,

$A_{mp}$  – работа сил трения,

$A_G$  – работа сил тяжести.

За цикл установившегося движения  $\pm A_u = 0$ ,  $\pm A_G = 0$ , тогда

$$A_d - A_{nc} - A_{mp} = 0.$$

Коэффициентом полезного действия машины является отношение полезной работы к затраченной работе

$$\eta = \frac{A_{\partial} - A_{mp}}{A_{\partial}} = 1 - \frac{A_{mp}}{A_{\partial}} < 1 \text{ для любой машины.}$$

При  $A_{mp} = A_{\partial}$   $\eta = 0$  – холостой ход, при  $A_{mp} > A_{\partial}$   $\eta < 0$  – режим самоторможения.

### 5.4.1 Определение КПД при последовательном соединении механизмов

Коэффициент полезного действия агрегата, состоящего из нескольких машин, соединенных последовательно (рисунок 54) определяется как произведение

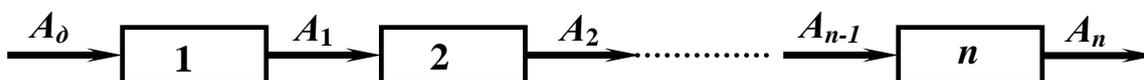


Рисунок 54 – Последовательное соединение механизмов

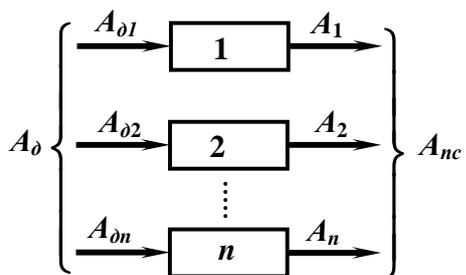
$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_0}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \dots \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_n = \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{A_2}{A_1} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_0} \text{ – общий КПД.}$$

$\eta_{общ} = \eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_n$  – при последовательном соединении механизмов общий КПД будет меньше наименьшего из частных.

### 5.4.2 Определение КПД при параллельном соединении механизмов

Коэффициент полезного действия агрегата, состоящего из нескольких машин, соединенных параллельно (рисунок 55), определяется как:



$$\eta_{общ} = \frac{A_{nc}}{A_0} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{A_{01} + A_{02} + \dots + A_{0n}}.$$

Рисунок 55 – Параллельное  
соединение механизмов

$$\eta_{общ} = \frac{A_{\partial 1} \eta_1 + A_{\partial 2} \eta_2 + \dots + A_{\partial n} \eta_n}{A_{\partial 1} + A_{\partial 2} + \dots + A_{\partial n}}$$

При параллельном соединении механизма общий КПД больше наименьшего и меньше наибольшего из частных.

### 5.5 Определение хода выходного звена

При проведении расчетно-графической работы и курсового проекта по кинематике механизмов следует начинать с определения крайних положений выходного звена, т.е. с определения хода ведомого звена и начала рабочего хода.

Студент получает задание, в котором приводятся схема механизма и исходные данные для расчета. Сначала следует принять масштабный коэффициент длин звеньев и построить план механизма в произвольном положении (рисунок 56, показано основными линиями), затем определить начало рабочего хода. Покажем методику определения на примере дезаксиального кривошипно-ползунного механизма.

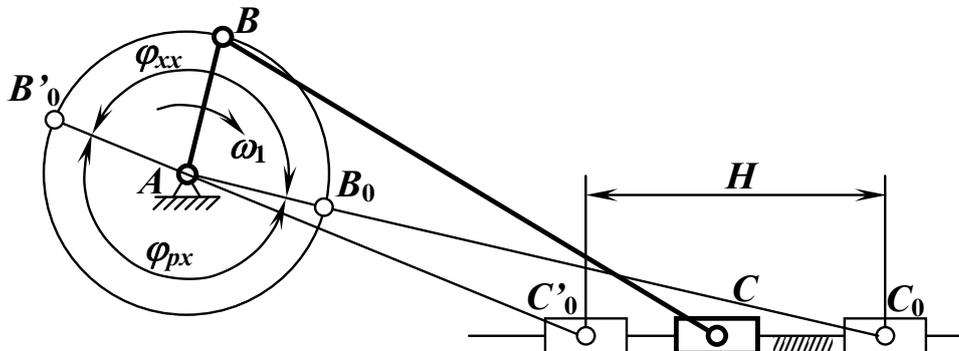


Рисунок 56 – Определение хода выходного звена

Крайнее правое положение определяют следующим образом: складывают длины кривошипа  $AB$  и шатуна  $BC$  и от точки  $A$  на траектории точки  $C$  делают засечку – точка  $C_0$ . Крайнее левое получают, вычитая из длины шатуна длину кривошипа и разностью длин находят точку  $C'_0$ . Так как угловая скорость кривошипа направлена по ходу часовой стрелки, то начало рабочего хода соответствует правому положению ползуна (точке  $B_0$  кривошипа),

так как при правильном проектировании  $\varphi_{px}$  должен больше  $\varphi_{xx}$ .  
Ход выходного звена,  $H$  это расстояние от точки  $C_0$  до  $C'_0$ .

## 5.6 Определение приведенной силы сопротивления

Строится план кривошипно-ползунного механизма в одном из положений рабочего хода. Прикладываются в центрах тяжести звеньев силы тяжести их, а также к выходному звену механизма сила сопротивления  $-F_{3px}$  (рисунок 57,а). К ведущему звену в точке  $B$  перпендикулярно  $AB$  прикладывается приведенная сила сопротивления  $F_c$ , направленная противоположно скорости точки  $B$ . Эту силу следует определить.

Согласно параграфу 4.5

$$P_{np} = \sum P_i,$$

Для определения мгновенной мощности необходимо построить план скоростей (рисунок 57,б).

$$F_c V_B \cos 180^\circ = G_2 V_{S_2} \cos \alpha_2 + G_3 V_C \cos 90^\circ + F_{3px} V_D \cos 180^\circ.$$

Так как  $\cos 180^\circ = -1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\cos \alpha_2 = \frac{ks_2}{ps_2}$ , то

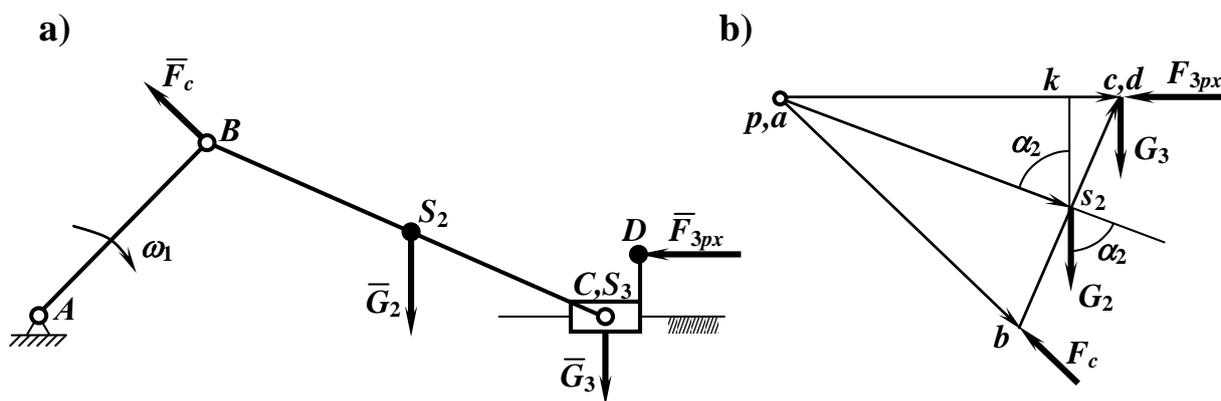


Рисунок 57 – Определение приведенной силы сопротивления при рабочем ходе

$$-F_c pb \cdot \mu_V = G_2 ps_2 \mu_V \frac{ks_2}{ps_2} - F_{3px} pc \cdot \mu_V, \text{ откуда}$$

$$F_c = \frac{F_{3px}pc - G_2ks_2}{pb}. \quad (43)$$

Определяем приведенную силу сопротивления при холостом ходе (рисунок 58).

$$F_c V_B \cos 180^\circ = G_2 V_{S_2} \cos \alpha_2 + G_3 V_C \cos 90^\circ + F_{3px} V_D \cos \cos 180^\circ.$$

Так как  $\cos 180^\circ = -1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ,

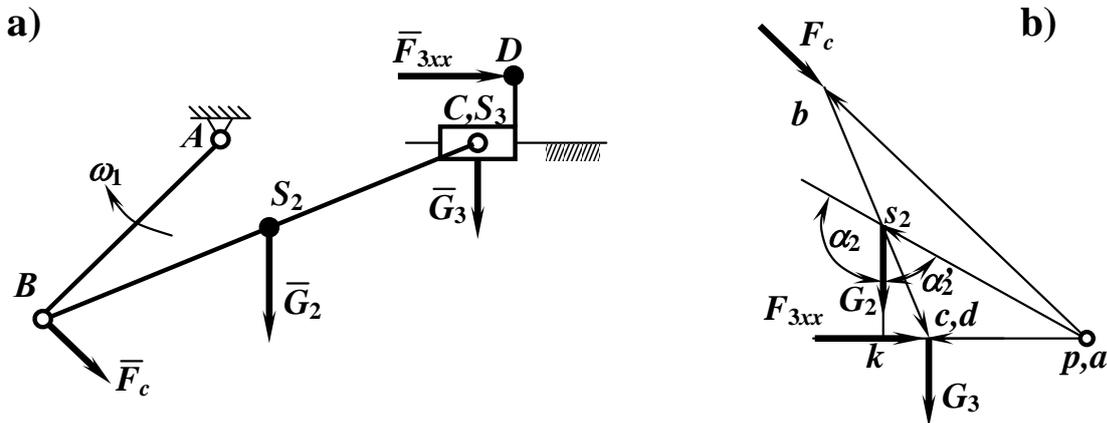


Рисунок 58 – Определение приведенной силы сопротивления при холостом ходе

$$\cos \alpha_2 = \cos(180^\circ - \alpha'_2) = -\cos \alpha'_2 = -\frac{ks_2}{ps_2}, \text{ то}$$

$$-F_c pb \cdot \mu_V = -G_2 ps_2 \mu_V \frac{ks_2}{ps_2} - F_{3xx} pc \cdot \mu_V, \text{ откуда}$$

$$F_c = \frac{F_{3xx}pc + G_2ks_2}{pb}. \quad (44)$$

На основе анализа формул (43) и (44) можно записать

$$F_c = \frac{\pm G_2ks_2 + F_{3px}(F_{3xx})pc}{pb}. \quad (45)$$

Перед силой тяжести звена необходимо ставить знак “плюс”, если центр тяжести на плане скоростей находится выше горизонтали, проходящей через полюс плана – сила тяжести является силой сопротивления (угол между направлениями скорости центра тяжести и силой – тупой); знак “минус”, если

центр тяжести на плане скоростей находится ниже горизонтали, проходящей через полюс плана – сила тяжести является движущей силой (угол между направлениями скорости центра тяжести и силой – острый). Перед силой сопротивления рабочего или холостого хода всегда ставится знак “плюс”.

## 5.7 Основные формы уравнения движения

Существуют две формы уравнения движения машинного агрегата:

1. Уравнение движения в форме кинетической энергии

$$A_d - A_c = \Delta T = J_{np} \frac{\omega^2}{2} - J_{np} \frac{\omega_0^2}{2}, \quad (46)$$

где  $A_d$  – работа приведенной движущей силы;

$A_c$  – работа приведенной силы сопротивления;

$\omega$  – угловая скорость звена приведения в произвольном положении;

$\omega_0$  – угловая скорость звена приведения в начальном положении.

2. Уравнение движения в форме дифференциального уравнения

$$\Delta M = M_d - M_c, \quad (47)$$

где  $M_d$  – приведенный момент движущих сил;

$M_c$  – приведенный момент сил сопротивления;

$\Delta M$  – избыточный момент, он совершает элементарную работу

$$dA = \Delta M \cdot d\varphi = dT;$$

где  $T$  – кинетическая энергия механизма.

$$\Delta M = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\left(J_{np} \frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} = J_{np} \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{np}}{d\varphi}.$$

Преобразуем первое слагаемое уравнения

$$\frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\omega \cdot d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d\omega}{dt}, \text{ тогда}$$

$$\Delta M = J_{np} \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{np}}{d\varphi}. \quad (48)$$

Рассмотрим два частных случая

$$1. \omega = \text{const}, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \Delta M = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{np}}{d\varphi};$$

2. В начале движения,  $\omega = 0$ , но движение будет невозможным, если не будет ускорения  $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ ,  $\Delta M = J_{np} \frac{d\omega}{d\varphi} = J_{np} \varepsilon$ .

### 5.8 Определение угловой скорости звена привода по уравнению в форме кинетической энергии

Построим график  $M_c = f(\varphi)$ ,  $M_c = F_c \cdot l_{AB}$  для каждого из 12 положений механизма. Рассматриваем совокупность рабочей машины и двигателя. Пусть  $M_{\delta e} = \text{const}$  и известен (рисунок 59).

Кинетическая энергия в момент разгона  $T_p$  неизвестна.

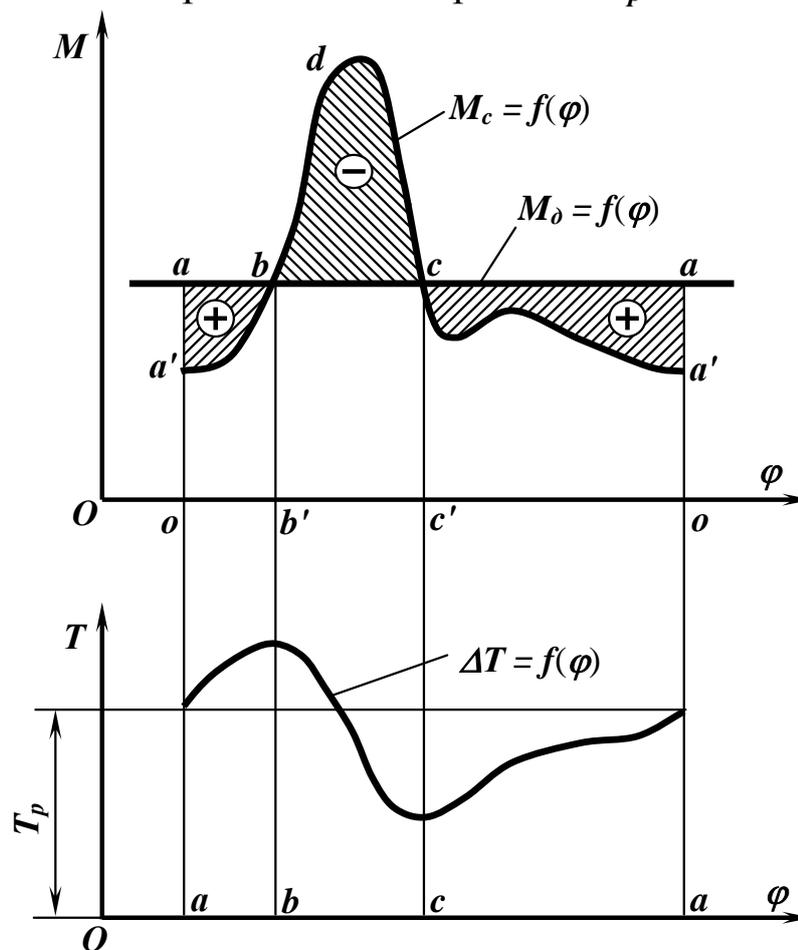


Рисунок 59 – Приведенные моменты и кинетическая энергия

## механизма

Разбиваем диаграмму  $M_c = f(\varphi)$  на участки  $ab$ ,  $bc$  и  $ca$ .  
Определим приращение кинетической энергии на этих участках.

На участке  $ab$ .

$$\begin{aligned} \Delta T_{(ab)} &= A_{\delta(ab)} - A_{c(ab)} = \int_a^b M_{\delta} d\varphi - \int_a^b M_c d\varphi = \\ &= S_{oabb'} \mu_M \mu_{\varphi} - S_{oa'bb'} \mu_M \mu_{\varphi} = S_{a'ab} \mu_M \mu_{\varphi}, \text{Нм.} \end{aligned}$$

Кинетическая энергия будет увеличиваться на площадь  $S_{a'ab}$  так как  $A_{\delta} > A_c$ .

На участке  $bc$ .

$$\Delta T_{(bc)} = S_{b'bcc'} \mu_M \mu_{\varphi} - S_{b'bdcc'} \mu_M \mu_{\varphi} = S_{bdc} \mu_M \mu_{\varphi}.$$

Кинетическая энергия будет уменьшаться на площадь  $S_{bdc}$ , так как  $A_{\delta} < A_c$ .

На участке  $ca$ .

$$\Delta T_{(ca)} = S_{c'caa'} \mu_M \mu_{\varphi} - S_{c'cao} \mu_M \mu_{\varphi} = S_{caa'} \mu_M \mu_{\varphi}.$$

Кинетическая энергия будет увеличиваться на площадь  $S_{caa'}$ , так как  $A_{\delta} > A_c$ .

Выбираем новые оси координат и построим приращение кинетической энергии на этих участках.

Как определяется кинетическая энергия?

В общем случае  $T = \frac{J_{np} \omega^2}{2}$ , откуда  $\omega = \sqrt{\frac{2T}{J_{np}}}$  и она не может

быть постоянной, так изменяются и кинетическая энергия и приведенный момент инерции механизма. Построим три графика (рисунок 60) приняв соответствующие масштабные коэффициенты:

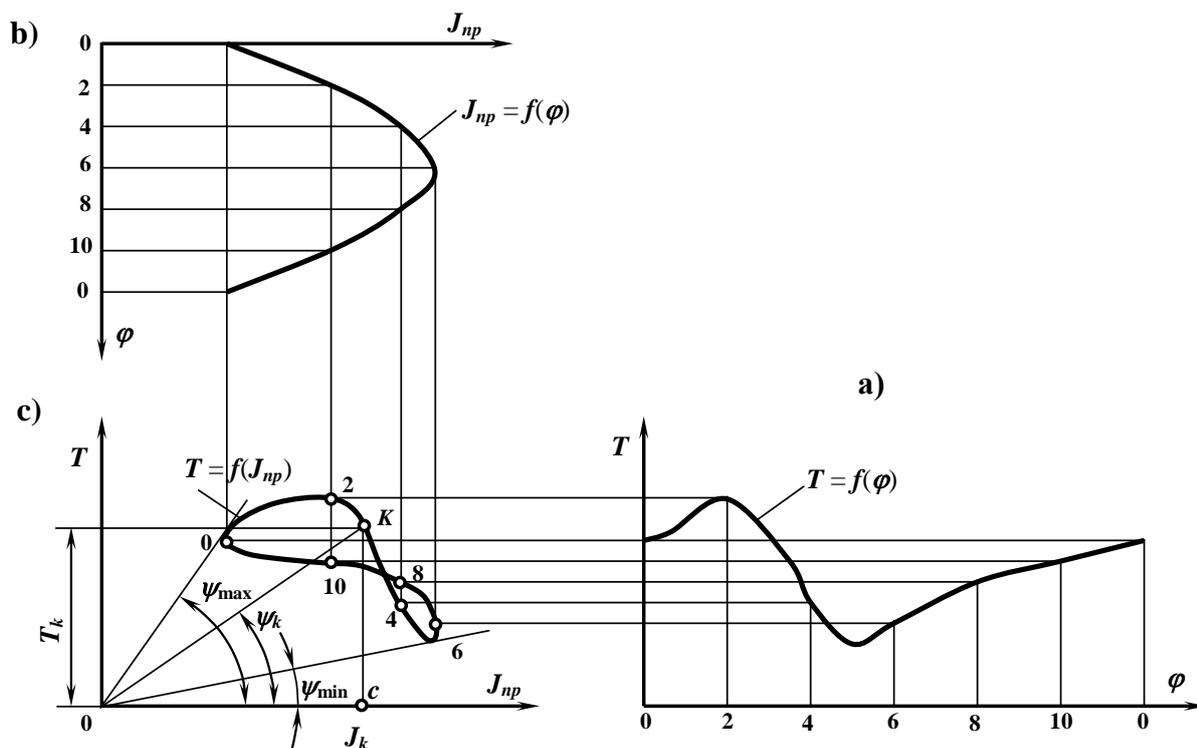


Рисунок 60 – Построение диаграммы  $T = f(J_{np})$

а) зависимость кинетической энергии от угла поворота кривошипа, б) зависимость приведенного момента инерции от угла поворота кривошипа и с) зависимость кинетической энергии от приведенного момента инерции.

Определим угловую скорость для положения  $k$ .

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2T_k}{J_k}}, \text{ где } T_k = kc \cdot \mu_T, \quad J_k = oc \cdot \mu_J, \text{ откуда}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2T_k}{J_k}} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \frac{kc}{oc}} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_k} \text{ угловая скорость будет}$$

изменяться. Максимальное значение соответствует  $\psi_{max}$ ,

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{max}}, \text{ а минимальное } \omega_{min} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{min}}.$$

## 5.9 Средняя скорость и коэффициент неравномерности

Построим диаграмму угловой скорости звена приведения (рисунок 61).

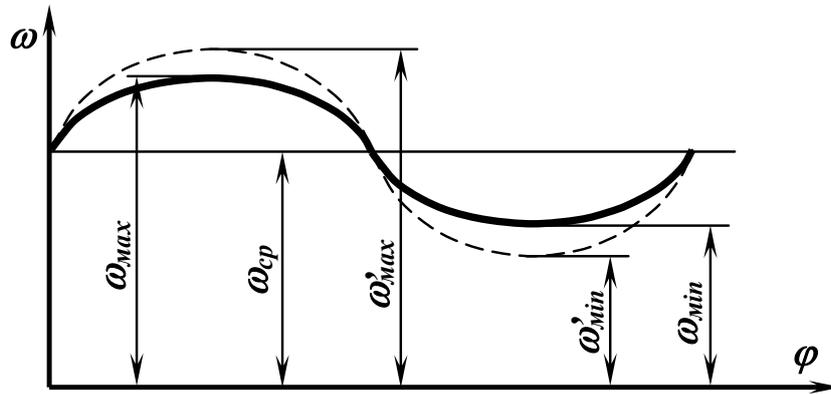


Рисунок 61 – Средняя угловая скорость звена

$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$ , но средняя скорость не учитывает неравномерность работы машины (пример – пунктир). Вводится понятие коэффициента неравномерности –  $\delta$ .

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}$$

Для разных машин он различен. Для сельскохозяйственных машин [9]  $\delta = 0,2...0,04$ , для двигателей внутреннего сгорания  $\delta = 0,0125...0,0001$ . Найдем числители обоих выражений и сложим их, а затем вычтем второй из первого и определим максимальную и минимальную угловые скорости.

$$+ \begin{cases} \omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{cp} \\ \omega_{max} - \omega_{min} = \delta\omega_{cp} \end{cases} \quad - \begin{cases} \omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{cp} \\ \omega_{max} - \omega_{min} = \delta\omega_{cp} \end{cases}$$

$$\omega_{max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{min} = \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Найдем коэффициент неравномерности

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} \cdot \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{cp}^2}$$

### 5.10 Определение коэффициента неравномерности по диаграмме $T = f(J_{np})$

$$\omega_i = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \text{tg} \psi_i}, \quad \omega_{max}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \text{tg} \psi_{max}, \quad \omega_{min}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \text{tg} \psi_{min}$$

$$\delta = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{cp}^2} = \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \frac{\operatorname{tg}\psi_{\max} - \operatorname{tg}\psi_{\min}}{\omega_{cp}^2}.$$

Строим диаграмму  $T = f(J_{np})$  – рисунок 62.

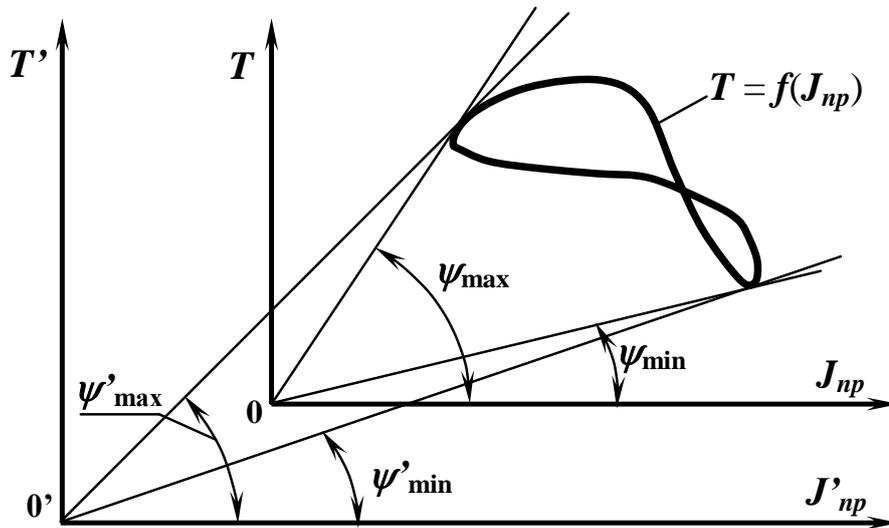


Рисунок 62 – Диаграмма  $T = f(J_{np})$

Зная среднюю угловую скорость  $\omega_{cp}$ , масштабные коэффициенты  $\mu_T$  и  $\mu_J$  определяем углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$ . По построенной диаграмме определяем коэффициент неравномерности  $\delta$ .

Пусть задан  $\delta' = \delta_{don}$  и он меньше полученного  $\delta' < \delta$ .

Известно

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{cp}^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 = \omega_{cp}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right).$$

Величиной  $\frac{\delta^2}{4}$  пренебрегаем ввиду малости, тогда

$$\omega_{\max}^2 = \omega_{cp}^2 (1 + \delta). \text{ Аналогично } \omega_{\min}^2 = \omega_{cp}^2 (1 - \delta).$$

Известно также

$$\omega_{\max}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg}\psi_{\max}, \text{ приравняем и отсюда найдем, что}$$

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 + \delta) \text{ и } \operatorname{tg}\psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 - \delta),$$

при  $\delta' < \delta$

$$\operatorname{tg} \psi'_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 + \delta') \text{ и } \operatorname{tg} \psi'_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 - \delta')$$

получается, что  $\psi'_{\max} < \psi_{\max}$ , а  $\psi'_{\min} > \psi_{\min}$ .

Проводим касательные к диаграмме  $T = f(J_{np})$  под новыми углами и получаем новые оси координат  $T'$  и  $J'_{np}$ .

Для обеспечения меньшего коэффициента неравномерности  $\delta$  необходимо увеличить приведенный момент инерции либо за счет увеличения масс звеньев (пусть не всегда рационален), либо за счет постановки дополнительной массы, называемой маховиком.

### 5.11 Задача постановки маховика

При больших коэффициентах неравномерности

- возникают дополнительные силы инерции,
- возникают дополнительные динамические нагрузки,
- увеличиваются реакции в кинематических парах, увеличиваются силы трения и износ, уменьшается КПД и долговечность механизма,
- возникают упругие колебания звеньев, на создание которых требуется определенная работа,
- так как процессы циклические, то упругие колебания могут вызвать резонанс,
- ухудшается технологический процесс.

Задачей постановки маховика является накопление кинетической энергии при увеличении угловой скорости ведущего звена, когда  $A_d > A_c$  и отдача ее механизму при уменьшении угловой скорости ведущего звена, когда  $A_d < A_c$ .

### 5.12 Определение момента инерции маховика методом Виттенбауэра

$\Delta T$  – приращение кинетической энергии за счет разности работ движущих сил и сил сопротивления за период установившегося движения (рисунок 63,а)

$$T_i = T_p + \Delta T_i, \quad J_i = J_m + J_{ci},$$

$T_p$  – кинетическая энергия разгона,

$J_m$  – момент инерции маховика,

$J_{ci}$  – собственный приведенный момент инерции звеньев механизма.

Здесь  $J_m$  – не известен,  $T_p$  – не известна, но  $J_c = f(\varphi)$  можно построить, построив планы скоростей во всех положениях механизма и определив кинетическую энергию всех звеньев механизма для каждого из 12 положений.

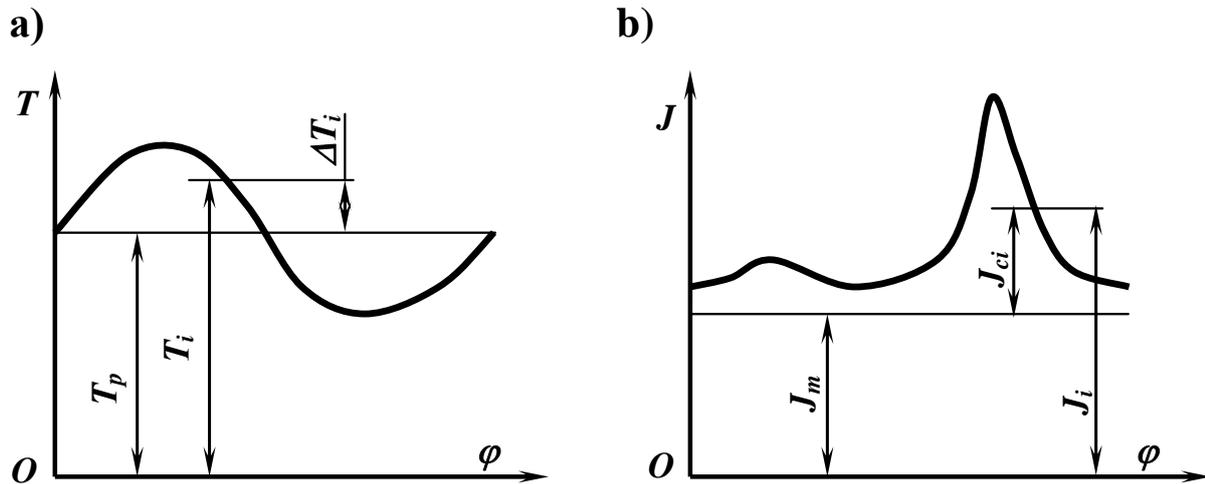


Рисунок 63 – Диаграммы движения: а – кинетическая энергия; б – приведенный момент инерции

Можно построить также диаграмму  $\Delta T = f(\varphi)$ , построив диаграмму моментов сил сопротивления и движущих сил. Разность этих работ и даст значения  $\Delta T$  для каждого положения (рисунок 64).

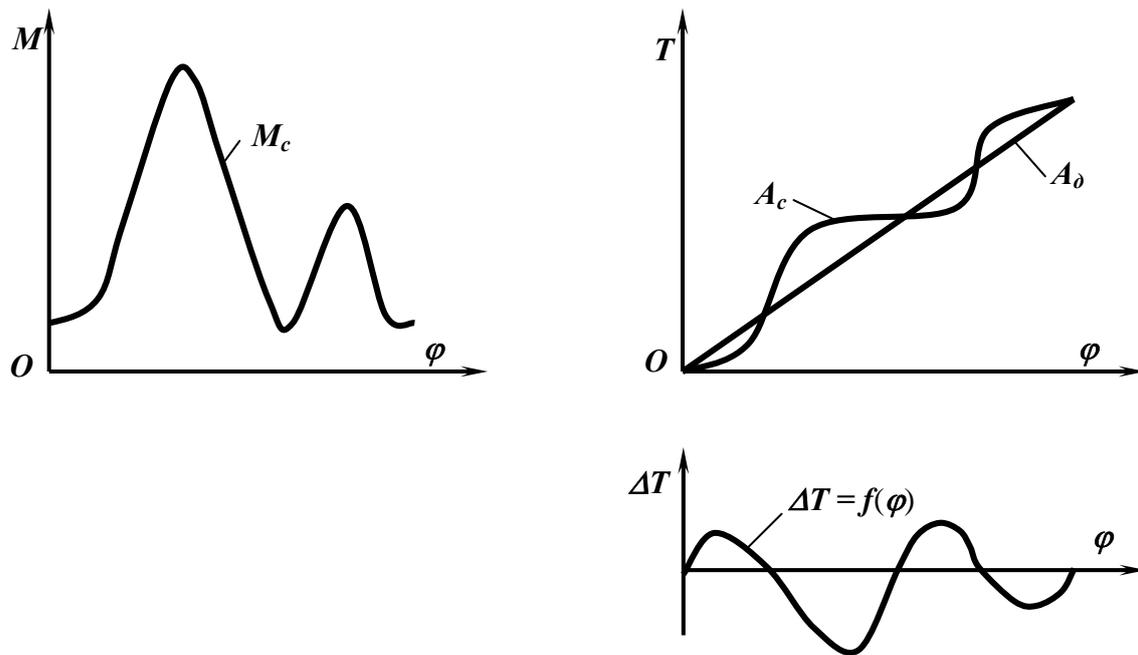


Рисунок 64 – Определение приращения кинетической энергии

Из графика моментов графическим интегрированием получаем диаграмму работы сил сопротивления  $A_c = f(\varphi)$ . Если  $M_d = \text{const}$ , то зависимость  $A_d = M_d \varphi$  – изображается прямой линией. Соединяем начало и конец кривой  $A_c = f(\varphi)$  прямой линией и получаем диаграмму  $A_d = f(\varphi)$ .

Простым вычитанием значений  $A_d$  и  $A_c$  строим диаграмму приращения кинетической энергии  $\Delta T = f(\varphi)$ . Строим также диаграмму приведенного момента инерции звеньев механизма  $J_c = f(\varphi)$ . Методом избавления от угла поворота  $\varphi$  строим диаграмму  $T = f(J)$ . Эта диаграмма носит название диаграммы Ф. Виттенбауэра (рисунок 65).

Определим момент инерции маховика по диаграмме Виттенбауэра. Задано:  $\omega_{cp} = \omega_1$ , коэффициент неравномерности  $\delta$  и построена диаграмма  $T = f(J)$  (рисунок 66). Требуется определить момент инерции маховика.

Определяем углы наклона касательной к диаграмме

$$\text{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 + \delta), \quad \text{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 - \delta).$$

Проводим касательные к диаграмме под углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$ . Точка пересечения касательных даст начало системы координат  $TOJ$ .

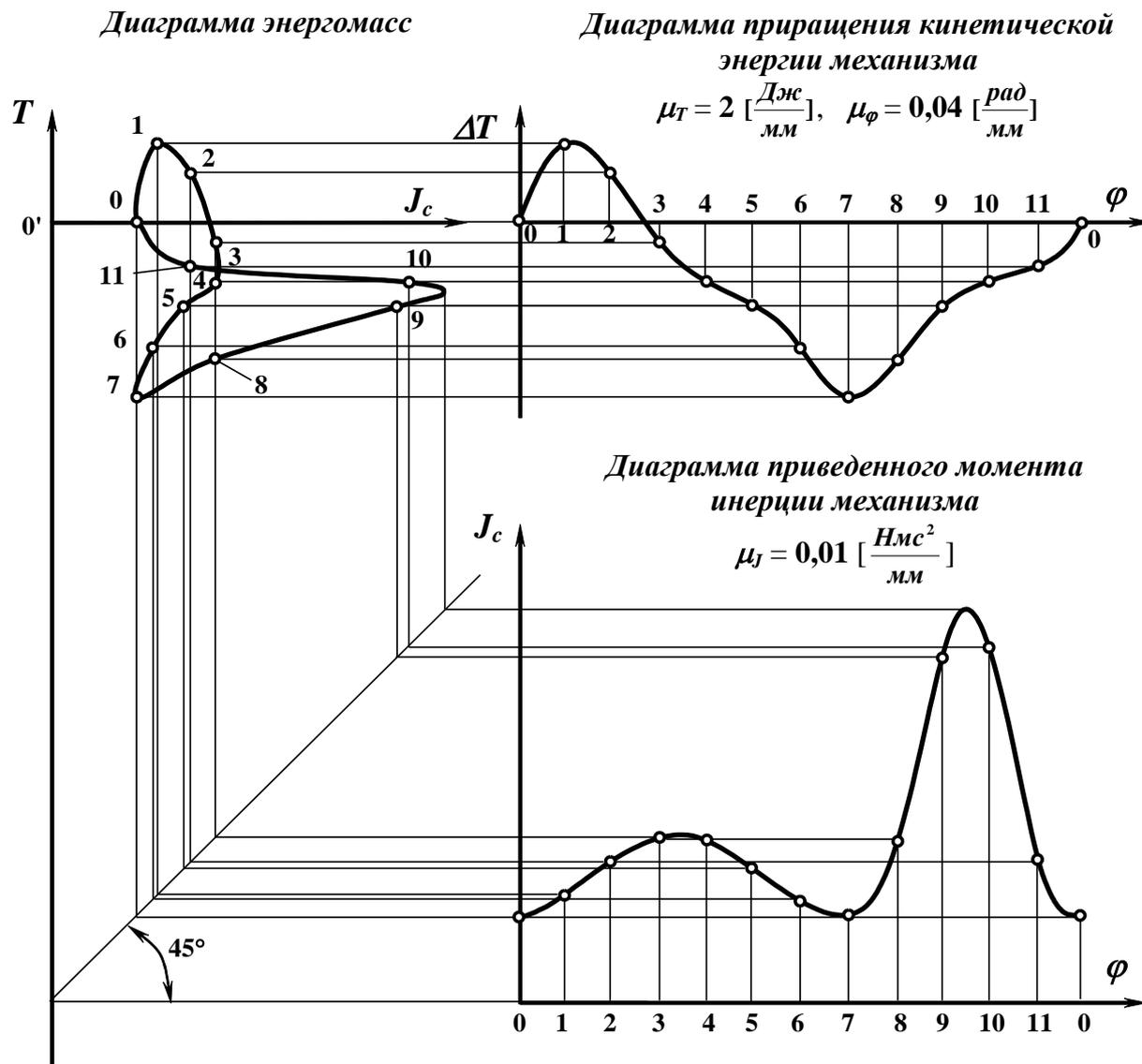


Рисунок 65 – Построение диаграммы Виттенбауэра

Известно  $\delta = \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \frac{\text{tg}\psi_{\max} - \text{tg}\psi_{\min}}{\omega_{\text{ср}}^2}$ . Подставим в это

выражение  $\text{tg}\psi_{\max} - \text{tg}\psi_{\min} = \frac{FH}{OC}$ , так как  $\text{tg}\psi_{\max} = \frac{FC}{OC}$  и

$\text{tg}\psi_{\min} = \frac{FC}{OC}$ , а также выразим  $J_m = OC \cdot \mu_J$ , получим

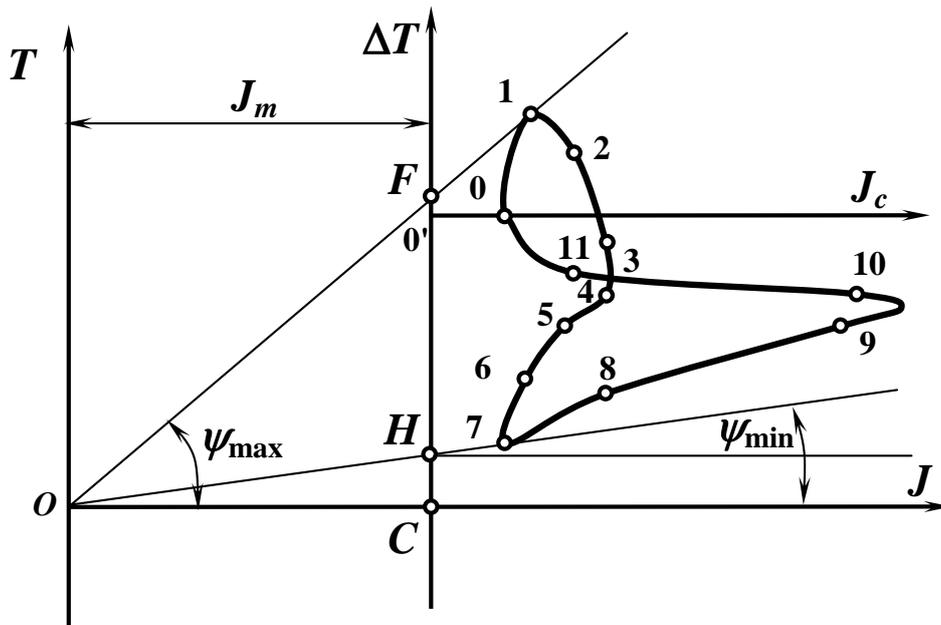


Рисунок 66 – Определение момента инерции маховика

$$\delta = \frac{FH \cdot \mu_T}{J_m \omega_{cp}^2}, \text{ отсюда } J_m = \frac{FH \cdot \mu_T}{\delta \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (49)$$

### 5.13 Определение угловой скорости ведущего звена после постановки маховика

Согласно уравнению движения

$$A_d - A_c = \Delta T = T - T_0,$$

где  $T_0$  – значение кинетической энергии в нулевом положении;

$\Delta T_{(\max)} = T_{(\max)} - T_0$  – приращение кинетической энергии в том положении, где угловая скорость максимальна;

$$\Delta T_i = T_i - T_0 \text{ – в любом положении.}$$

Вычтем из первого выражения второе

$$\Delta T_{(\max)} - \Delta T_i = T_{(\max)} - T_i.$$

$$T_{(\max)} = \frac{J_{n(\max)} \omega_{\max}^2}{2} = \frac{[J_m + J_{c(\max)}] \omega_{\max}^2}{2},$$

$$T_i = \frac{J_{ni} \omega_i^2}{2} = \frac{[J_m + J_{ci}] \omega_i^2}{2},$$

$$\Delta T_{(\max)} - \Delta T_i = \frac{[J_m + J_{c(\max)}] \omega_{\max}^2}{2} - \frac{[J_m + J_{ci}] \omega_i^2}{2}, \text{ откуда}$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{[J_m + J_{c(\max)}]\omega_{\max}^2 - 2(\Delta T_{(\max)} - \Delta T)}{J_m + J_{ci}}},$$

здесь  $J_m$  – момент инерции маховика;

$J_{c(\max)}$  – приведенный момент инерции звеньев механизма в положении, где угловая скорость звена максимальна;

$J_{ci}$  – приведенный момент инерции в произвольном (определяемом) положении;

$\Delta T_{(\max)}$  – приращение кинетической энергии звеньев механизма в положении, где угловая скорость максимальна;

$\Delta T_i$  – приращение кинетической энергии в произвольном (определяемом) положении.

Получив значения угловой скорости во всех положениях механизма можно построить диаграмму  $\omega = f(\varphi)$  (рисунок 67).

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{\min} = \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

$$\mu_\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\Delta y_{\max}}, \quad y_i = \frac{\omega_i - \omega_{cp}}{\mu_\omega}.$$

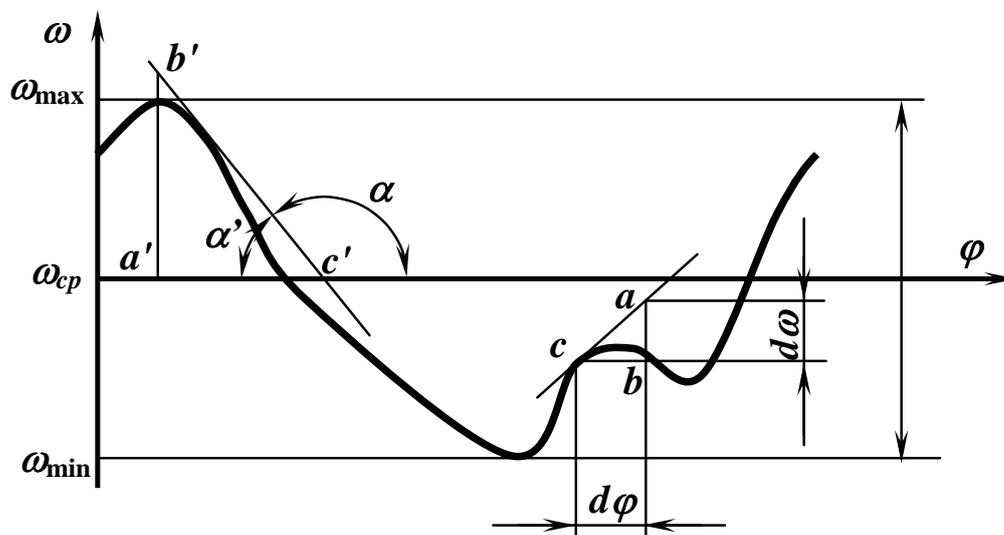


Рисунок 67 – Диаграмма угловой скорости звена приведения

### 5.14 Определение углового ускорения ведущего звена

Зависимость угловой скорости ведущего звена построена в функции угла поворота. Умножим числитель и знаменатель на  $d\varphi$ , отношение  $d\omega/dt$  есть угловая скорость –  $\omega$ .

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

В произвольной точке  $c$  проводим касательную к кривой  $\omega = f(\varphi)$ , находим бесконечно малые отрезки  $d\varphi$  и  $d\omega$ .

$$\varepsilon = \omega \frac{\mu_{\omega ab}}{\mu_{\varphi ac}} = \omega \frac{\mu_{\omega}}{\mu_{\varphi}} \operatorname{tg} \alpha, \text{ в общем виде } \varepsilon = \pm \omega \frac{\mu_{\omega}}{\mu_{\varphi}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Если угол  $\alpha$  – тупой как, например, в точке  $c'$ ,  
то  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha') = -\operatorname{tg} \alpha' = \pm \frac{a'b'}{a'c'}$  и угловое ускорение отрицательное, угловая скорость уменьшается.

## Глава 6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

### 6.1 Классификация зубчатых передач

Зубчатая передача – это механизм, который с помощью зубчатого зацепления передает или преобразует движение с изменением угловых скоростей и моментов. При уменьшении угловой скорости механизм, состоящий из пары зубчатых колес, называют редуктором, причем меньшее колесо принято называть *шестерней*, а большее – *колесом*. Термин зубчатое колесо относится как к шестерне, так и к колесу. Параметрам шестерни приписывают индекс 1, а параметрам колеса – 2. При увеличении скорости, механизм называют мультипликатором. Зубчатые передачи – самый распространенный вид механических передач, так как они могут надежно передавать мощности от долей до десятков тысяч кВт при окружных скоростях до 150 м/с. Зубчатые передачи применяются во всех отраслях машино- и приборостроения.

#### *Достоинства и недостатки зубчатых передач*

##### *Достоинства:*

- высокая надежность работы в широком диапазоне нагрузок и скорости;
- малые габариты;
- большая долговечность;

- высокий коэффициент полезного действия;
- сравнительно малые нагрузки на валы и подшипники;
- постоянство передаточного числа;
- простота в изготовлении и эксплуатации.

*Недостатки:*

- высокие требования к точности изготовления и монтажа;
- шум при больших скоростях.

Существуют несколько параметров классификации зубчатых передач и зубчатых колес:

- По расположению геометрических осей зубчатых колес – если оси колес являются параллельными, то передачи и колеса называются цилиндрическими (рисунок 68,а,б,с,д); если оси колес пересекаются – коническими (рисунок 68,е,ф,г); а если скрещиваются – винтовыми (рисунок 68,и,й).

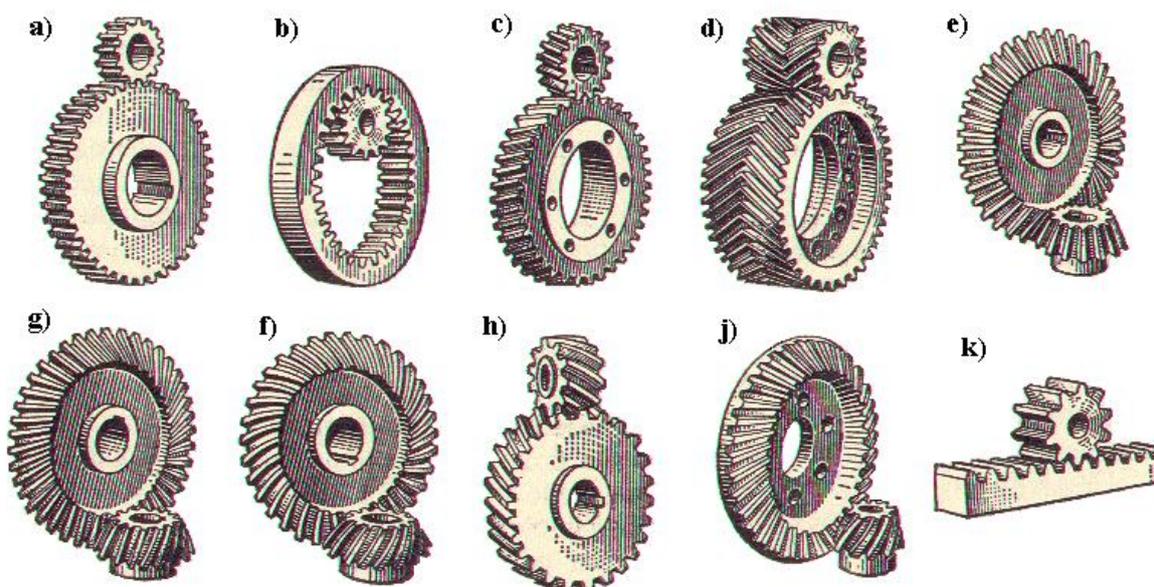


Рисунок 68 – Виды зубчатых передач

Частным случаем цилиндрической передачи является реечная (рисунок 68,к), диаметр одного из колес которой приближается к бесконечности.

- По расположению образующей зуба относительно оси колеса они делятся на: прямозубые – зуб расположен наклонно к оси вала (рисунок 68,а,б,е,к); косозубые – зуб расположен параллельно оси вала (рисунок 68,с,г); шевронные – два косозубых колеса насажены

на одной ступице (рисунок 68,d) и для конических колес с круговым или спиральным зубом (рисунок 68,f).

- По профилю зуба. Профиль – это его поперечное сечение, то, что очерчивает зуб. В зависимости от кривой, его очерчивающей различают: эвольвентные (самое широкое распространение; круговинтовые (зацепление М.Л. Новикова – 1959 г. для очень больших мощностей); циклоидальные и гипоциклоидальные.

- По числу зацеплений передачи делятся на одно-, двух-, трех-, и многоступенчатые.

- По относительному расположению зубьев на ободе колеса или по способу зацепления применяют передачи с внешним и с внутренним зацеплением (последние часто используются в планетарных и дифференциальных механизмах).

## 6.2 Основы теории зацепления

### 6.2.1 Основной закон зацепления

Основное условие зацепления – постоянство соприкосновения профилей зубьев. Это можно выполнить [10]. Возьмем два зубчатых колеса, ведущее – шестерня и ведомое – колесо в зацеплении с неподвижными центрами вращения  $O_1O_2$ . Выбросим все зубья кроме двух (по одному на каждое колесо). Переходим к профильным рычагам (рисунок 69).

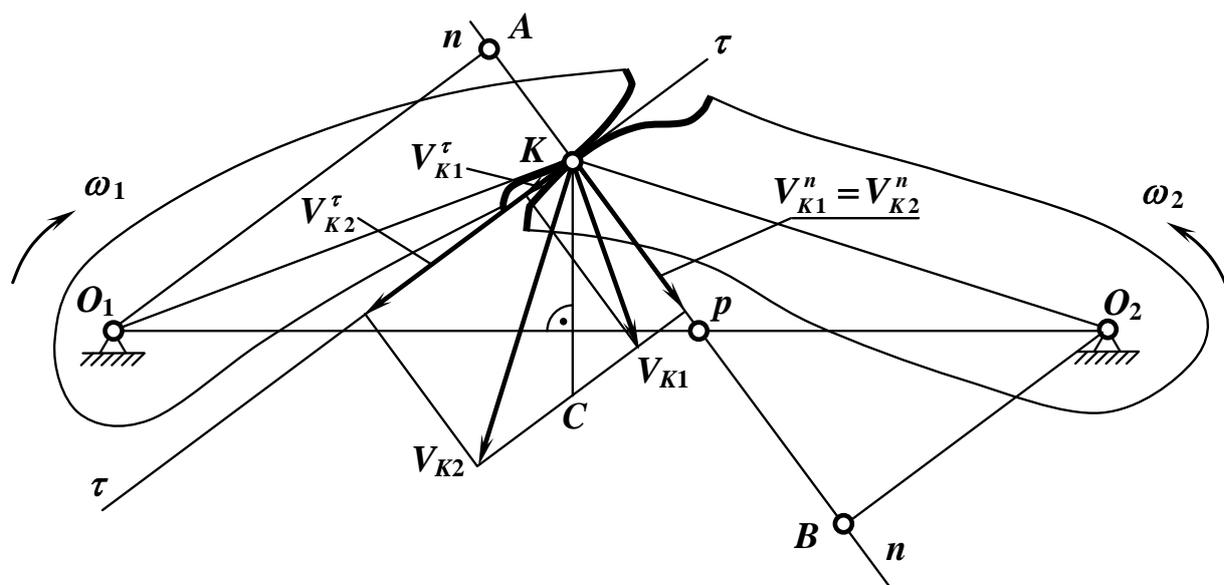


Рисунок 69 – Профильные рычаги

$K$  – точка контакта. Проводим общую касательную  $\tau\tau$  к профилям зубьев в точке их контакта и общую нормаль  $n-n$ . Точку пересечения нормали с линией центров обозначим  $p$ . Определяем скорости точки контакта. Проводим радиусы  $O_1K$  и  $O_2K$  и векторы скоростей  $V_{K1}$  и  $V_{K2}$ , величины их выбираем так, чтобы проекции скоростей на нормаль  $n-n$  совпадали.

$$V_{K1} = \omega_1 \cdot O_1K, \quad V_{K2} = \omega_2 \cdot O_2K.$$

Раскладываем скорость точки  $K$  на составляющие – на направления касательной и нормали.

Предположим, что  $V_{K1}^n < V_{K2}^n$ , тогда зуб колеса будет удаляться от зуба шестерни – будет разрыв – нарушается основное условие зацепления. Пусть  $V_{K1}^\tau > V_{K2}^\tau$ , тогда зуб шестерни будет врезаться в зуб колеса – это недопустимо. Следовательно,  $V_{K1}^\tau = V_{K2}^\tau$ .

Касательные составляющие не одинаковы. Разница их приводит к скольжению зубьев в точке их контакта. Эта разница и будет скоростью скольжения

$$V_{ск} = V_{K2}^\tau - V_{K1}^\tau, \text{ но может быть и } V_{K1}^\tau > V_{K2}^\tau.$$

Через точку контакта  $K$  проводим вспомогательную прямую, перпендикулярную линии центров до проекции скоростей на нормаль, получаем точку  $C$ .

Треугольник  $O_1KP$  подобен треугольнику  $\Delta KV_{K1}C$ , так как все стороны взаимно перпендикулярны. Составим отношение сторон

$$\frac{O_1K}{O_1P} = \frac{V_{K1}}{KC}, \text{ откуда } KC = \frac{V_{K1}O_1P}{O_1K}.$$

Треугольник  $O_2KP$  подобен треугольнику  $KV_{K2}C$ , так как все стороны взаимно перпендикулярны. Составим отношение сторон

$$\frac{O_2K}{O_2P} = \frac{V_{K2}}{KC}, \text{ откуда } KC = \frac{V_{K2}O_2P}{O_2K}.$$

Приравняем  $KC$  и подставим вместо скоростей

$$\frac{\omega_1 \cdot O_1K \cdot O_1P}{O_1K} = \frac{\omega_2 \cdot O_2K \cdot O_2P}{O_2K}; \quad \omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P \quad \text{или}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}, \text{ здесь } P \text{ – полюс зацепления.}$$

Сделаем еще одно построение. Из центров вращения колес опускаем на нормаль перпендикуляры  $O_1K$  и  $O_2K$ . Эти отрезки являются радиусами для нормальных составляющих скоростей

$V_{K1}^n = V_{K2}^n$ ,  $V_{K1}^n = \omega_1 \cdot O_1A$ ,  $V_{K2}^n = \omega_2 \cdot O_2B$  приравняем их и отсюда

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{O_2B}{O_1A}. \quad (50)$$

Передаточное отношение должно быть постоянным.

**Основной закон зацепления.** При постоянном передаточном отношении общая нормаль к двум профилям зубьев в точке их соприкосновения делит линию центров в постоянной точке  $P$  (полюсе зацепления) на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.

- С точки зрения максимального КПД необходимо, чтобы сопряженные колеса имели меньшую скорость скольжения;
- С точки зрения прочности необходимо, чтобы радиусы кривизны были максимально большими;
- С точки зрения технологичности изготовления и контроля необходимо иметь режущий инструмент прямо-линейного профиля.

Наиболее полно всем требованиям удовлетворяют зубья эвольвентного профиля. Такие зубья позволяют производить улучшение (коррекцию) зацепления. Они больше всего используются в силовых передачах, так как не являются слишком чувствительными к изменению межосевого расстояния.

### 6.2.2 Эвольвента окружности и ее свойства

Если катить какую-либо прямую по окружности без скольжения, то любая точка этой прямой опишет кривую линию, называемую *эвольвентой*.

Вычерчивается окружность, делится ее на несколько равных частей, например, на 8 (рисунок 70), и к каждой из точек проводятся радиусы и касательные.

Окружность, около которой построена эвольвента, называется основной –  $d_b$ . Отрезок дуги основной окружности между двумя соседними точками выпрямляется, и из каждой точки на

касательной к окружности откладываются отрезки, соответственно номеру точки, получаются точки  $1', 2' \dots 7'$ . Эти точки соединяются плавной кривой, получается эвольвента окружности.

Можно начать построение эвольвенты с точки 1, получится другая эвольвента с меньшим радиусом.

Основным параметром эвольвенты является диаметр (радиус) ее основной окружности. При  $d_b = \max$ , эвольвента будет прямой  $R = \infty$ .

### Свойства

1. Нормаль к эвольвенте в любой ее точке является касательной к основной окружности.

2. Радиусом кривизны эвольвенты в любой ее точке является отрезок нормали между этой точкой (в которой определяется ее кривизна) и основанием перпендикуляра, опущенного из центра основной окружности на нормаль (точкой касания).

3. Две эвольвенты одной и той же основной окружности эквидистантны (равноотстоящие), расстояние между ними равно спрямленной дуге окружности между началами эвольвент.

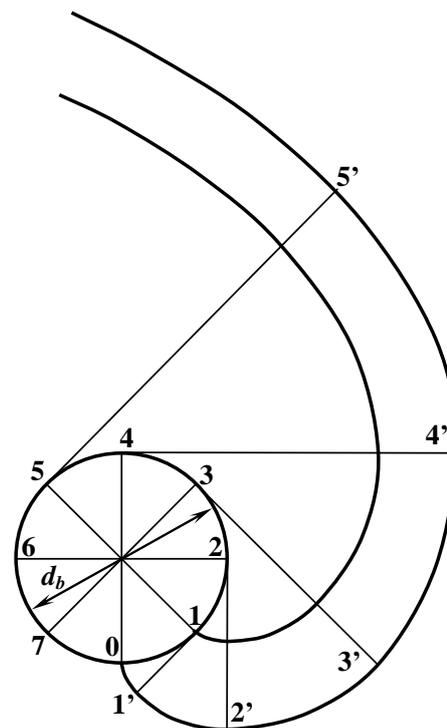
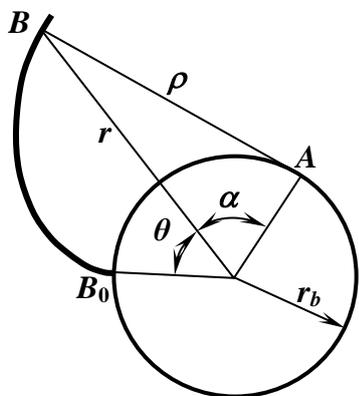


Рисунок 70 – Эвольвента окружности

### 6.2.3 Уравнение эвольвенты в полярных координатах



По свойству эвольвенты  $\cup B_0A = \overline{AB}$ .

$$r_b(\theta + \alpha) = r_b \operatorname{tg} \alpha,$$

отсюда уравнение эвольвенты в полярных координатах

$$\begin{cases} \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha, \\ r = \frac{r_b}{\cos \alpha}. \end{cases} \quad (51)$$

### 6.2.4 Эвольвентное зацепление и его свойства.

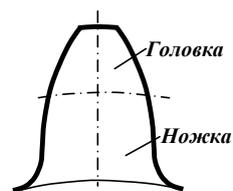
## Основные определения

Согласно основному закону зацепления линия центров делится на части, обратно пропорциональные угловым скоростям

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Через точку  $P$  проводятся окружности. Скорости точки  $P$  равны для каждой окружности. Окружности перекатываются друг по другу без скольжения. Эти окружности называются начальными. Обозначаются  $d_{\omega_1}$  и  $d_{\omega_2}$ . Через точку  $P$  проводятся касательные к начальным окружностям и под углом  $20^\circ$  – нормаль  $N-N$ . Из центров вращения колес на нормаль опускаются перпендикуляры, получаются точки  $A$  и  $B$ . Угол между общей касательной и общей нормалью к профилям зубьев называется углом зацепления  $\alpha = 20^\circ$ . Проводятся окружности радиусами  $O_1A$  и  $O_2B$ . Эти окружности называются эвольвентными или основными ( $d_{b1}$  и  $d_{b2}$ ). Прямая, касательная к основным окружностям и есть нормаль к профилям зубьев  $N-N$ . Если перекачивать нормаль  $N-N$  по основной окружности шестерни, получится эвольвента зуба шестерни, по основной окружности колеса – эвольвента зуба колеса. Для того, чтобы вычертить зубья, необходимо знать диаметры выступов и впадин зубьев (рисунок 71).

Берется отрезок произвольной длины и откладывается от полюса по направлению к осям колес. Радиусами  $O_1A$  плюс этот отрезок и  $O_2B$  плюс этот отрезок проводятся дуги окружностей. Это диаметры выступов (головок) зубьев шестерни и колеса, обозначаемые  $d_{a1}$  и  $d_{a2}$ . Принятый ранее отрезок делится на 4 части и  $1/4$  часть его добавляется к радиусам окружностей выступов. Затем радиусами  $O_1O_2 - (r_{a1} + 1/4 \text{ отрезка})$  и  $O_1O_2 - (r_{a2} + 1/4 \text{ отрезка})$  проводятся дуги окружностей. Это окружности впадин зубьев шестерни и колеса, обозначаемые  $d_{f1}$  и  $d_{f2}$ .



Окружность, которая делит зуб на головку и ножку, называется делительной, она обозначается без буквенного индекса  $d_1$  и  $d_2$ . Было рассмотрено стандартное зацепление. Для него делительные и начальные окружности совпадают.

Теперь строятся эвольвенты и они ограничиваются окружностями выступов и впадин.

### ***Свойства***

1. Общая нормаль к профилям зубьев в точке их касания всегда проходит через полюс зацепления  $P$ . Угол образованный общей нормалью  $N-N$  к профилям зубьев и общей касательной к начальным окружностям называется *углом зацепления*.

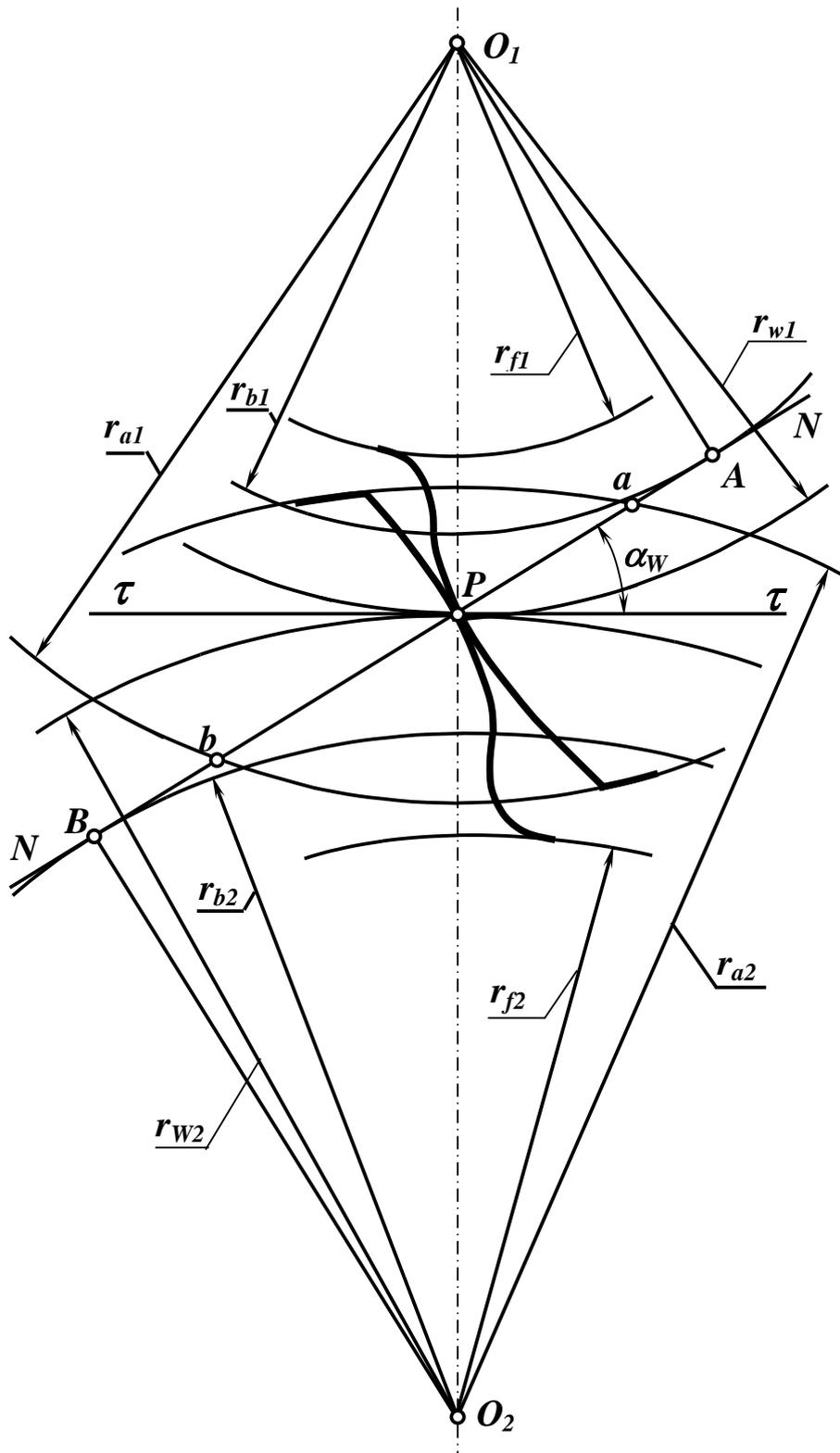


Рисунок 71 – Эвольвентное зацепление

Геометрическое место точек касания профилей зубьев на неподвижной плоскости называется *линией зацепления*. В эвольвентном зацеплении линией зацепления называется нормаль

$N-N$  касательная к основным окружностям.  $AB$  – теоретический участок линии зацепления.

2. При изменении межосевого расстояния передаточное отношение зацепления не изменяется. Начертим зацепление двух колес. Проведем дуги начальных окружностей  $r_{\omega 1}$  и  $r_{\omega 2}$ , общую касательную к начальным окружностям и под углом зацепления к ней проведем линию зацепления (рисунок 72). Из центров вращения колес опустим на линию зацепления перпендикуляры  $O_1A$  и  $O_2B$ , этими радиусами опишем дуги основных окружностей  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ .

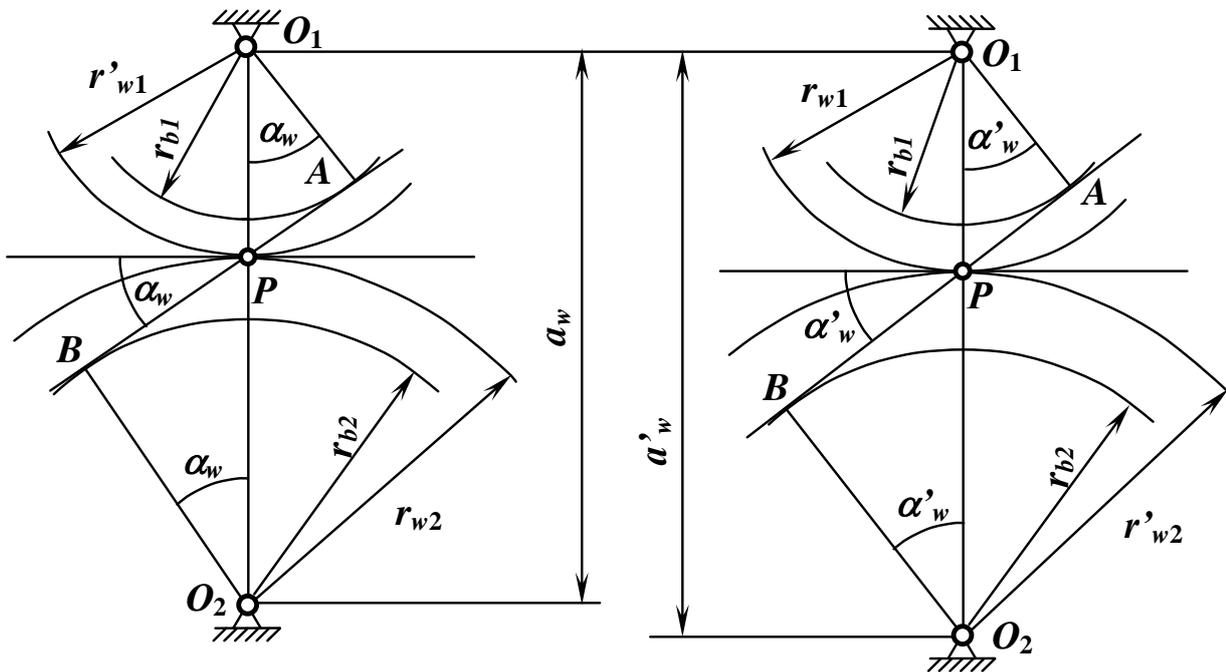


Рисунок 72 – Свойства эвольвентного зацепления

Если раздвинуть эти колеса, изменится (увеличится) межосевое расстояние. Радиусы основных окружностей колес не изменятся. Изменяются (увеличатся) радиусы начальных окружностей и увеличится угол зацепления.

Передаточное отношение для нормального зацепления

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}, \text{ но так как } r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} \text{ и } r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w}, \text{ то}$$

$$u_{12} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

Передаточное отношение для раздвинутого зацепления

$$u'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r'_{w2}}{r'_{w1}}, \text{ но так как } r'_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha'_w} \text{ и } r'_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha'_w}, \text{ то}$$

$$u'_{12} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}. \text{ Таким образом } u'_{12} = u_{12}.$$

3. При изменении межосевого расстояния при неизменных радиусах основных окружностей произведение межосевого расстояния на косинус соответствующего угла зацепления есть величина постоянная.

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = \frac{d_{b1} + d_{b2}}{2 \cos \alpha_w}, \quad a'_w = \frac{d'_{w1} + d'_{w2}}{2} = \frac{d_{b1} + d_{b2}}{2 \cos \alpha'_w}.$$

Числители из каждого уравнения

$$d_{b1} + d_{b2} = a_w 2 \cos \alpha_w, \quad d_{b1} + d_{b2} = a'_w 2 \cos \alpha'_w \text{ или}$$

$$a_w \cos \alpha_w = a'_w \cos \alpha'_w, \text{ что и требовалось доказать.}$$

### 6.3 Геометрические размеры зацепления

Рассматриваем стандартные прямозубые цилиндрические колеса.

Окружной шаг  $p$  – это расстояние между одноименными точками соседних профилей зубьев, измеренное по дуге окружности.

$p$  – шаг по делительной окружности;

$p_w$  – шаг по начальной окружности;

$p_a$  – шаг по окружности выступов;

$p_f$  – шаг по окружности впадин.

Длина делительной окружности

$$\pi \cdot d = p \cdot z,$$

где  $z$  – число зубьев колеса.

Отсюда  $d = \frac{p}{\pi} z$ , здесь  $\frac{p}{\pi}$  – дробное число, обозначим  $m$ , тогда

$d = m \cdot z$ , где  $m$  – целое число, это модуль зацепления.

По ГОСТ 9563-80  $m = 0,05 \dots 100$  мм.

Модуль – это величина, которая определяет все размеры зацепления. Для пары сопряженных колес эта величина одинакова  $p = \pi m$ .

Гостируется только модуль по делительной окружности  $d = m \cdot z$ . Делительной называется окружность, диаметр которой равен произведению числа зубьев на заданную стандартную величину модуля.

$d_b = d \cos \alpha$  – диаметр основной окружности;

$d_a = d + 2h_a$  – диаметр окружности выступов зубьев.

Делительная окружность делит зуб на головку и ножку (рисунок 73). Высота головки зуба  $h_a = h_a^* m$ , здесь  $h_a^* = 1,0$  – коэффициент высоты головки зуба.

$$d_a = m \cdot z + 2h_a^* m = m(z + 2h_a^*).$$

Диаметр окружностей ножек  $d_f = d - 2h_f$ ,  $h_f = m(h_a^* + c^*)$ ,  
Здесь  $c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора.

$$d_f = m(z - 2h_a^* - 2c^*).$$

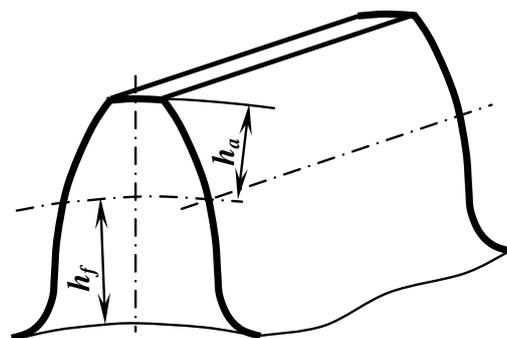


Рисунок 73 – Зуб колеса

#### 6.4 Методы нарезания зубчатых колес

**Метод копирования.** Режущий инструмент при этом методе изготавливается по форме впадин между двумя зубьями (рисунок 74).

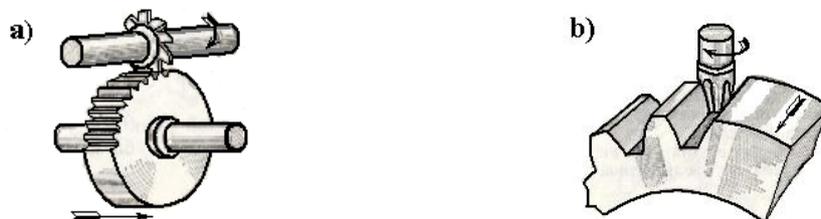


Рисунок 74 – Метод копирования:  
а – дисковой фрезой; б – пальцевой фрезой

*Недостатки:* малая производительность; невысокая точность зубьев нарезаемого колеса; для нарезания зубчатых колес одного и того же модуля, но с различным числом зубьев, требуются отдельные фрезы.

*Достоинство:* Можно изготовить колеса на любом фрезерном станке, т.е. применяются для ремонта механизмов.

**Метод обкатки.** При этом методе режущему инструменту и заготовке придаются такие же движения, как если бы они находились в зацеплении (рисунок 75).

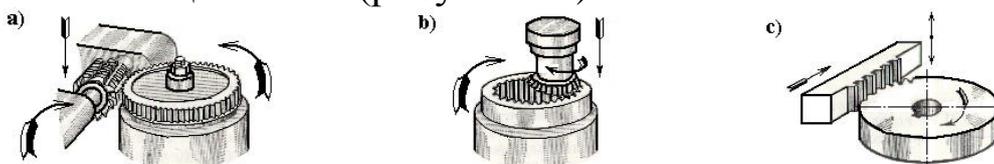


Рисунок 75 – Метод обкатки: а – червячной фрезой, б – долбяком; с – инструментальной рейкой

*Достоинства:* высокая производительность; невысокая стоимость режущего инструмента; одним режущим инструментом можно нарезать любое число зубьев одного модуля; высокая точность профиля зубьев нарезаемого колеса; долбяком можно нарезать зубчатые колеса с внутренними зубьями.

*Недостаток:* Для нарезания колес требуются специальные зубофрезерные или зубодолбежные станки.

При нарезании стандартных колес инструментальной рейкой средняя прямая рейки перекачивается без скольжения по начальной окружности нарезаемого колеса, которая делится шагом рейки на целое число шагов, поэтому начальная окружность станочного зацепления называется *делительной*.

## 6.5 Исходный производящий реечный контур. Системы зацепления

Проводим тонкую горизонтальную линию, она называется средней прямой рейки (рисунок 76). Берем отрезок произвольной длины ( $h$ ) и откладываем вверх и вниз от средней прямой и проводим две тонкие линии, которые носят название граничных прямых. Взятый отрезок делим на 4 части и  $\frac{1}{4}$  часть откладываем



Если смещение рейки производится от оси нарезаемого колеса, то сдвиг рейки называется положительным и нарезаемое колесо – также положительным.

Если смещение рейки производится к оси нарезаемого колеса, то сдвиг рейки называется отрицательным и нарезаемое колесо – также отрицательным.

$x \cdot m$  – смещение рейки,

$x$  – коэффициент смещения.

$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 > 0$  – передача положительная;

$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 < 0$  – передача отрицательная;

$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$  – передача нулевая:

1)  $x_1 = -x_2$  – равносмещенная; 2)  $x_1 = x_2 = 0$  – стандартная.

## 6.6 Определение толщины зуба

### а) По делительной окружности

$S$  – толщина зуба инструментальной рейки по делительной прямой.

$e$  – ширина впадины этой рейки по делительной прямой. Толщина зуба  $S$  нарезаемого колеса по делительной окружности будет равна (рисунок 75)

$$S = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2\Delta l = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2x \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ или}$$

$$S = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha \right).$$

### б) По любой окружности (рисунок 77)

$$\angle AOB = \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha,$$

$$\angle AOC = \theta_i = \operatorname{tg} \alpha_i - \alpha_i = \operatorname{inv} \alpha_i,$$

$$\gamma = \beta - (\operatorname{inv} \alpha_i - \operatorname{inv} \alpha),$$

$$\beta = \frac{S \cdot 2}{2 \cdot d} = \frac{S}{d}, \quad \gamma = \frac{S_i \cdot 2}{2 \cdot d_i} = \frac{S_i}{d_i}.$$

$$S_i = d_i \left[ \frac{S}{d} - (\operatorname{inv} \alpha_i - \operatorname{inv} \alpha) \right], \quad \cos \alpha_i = \frac{d_b}{d_i} \rightarrow \alpha_i \rightarrow \operatorname{inv} \alpha_i.$$

Аналогично

$$S_a = d_a \left[ \frac{S}{d} - (\text{inv} \alpha_a - \text{inv} \alpha) \right], \quad \cos \alpha_a = \frac{d_b}{d_a} \rightarrow \alpha_a \rightarrow \text{inv} \alpha_a.$$

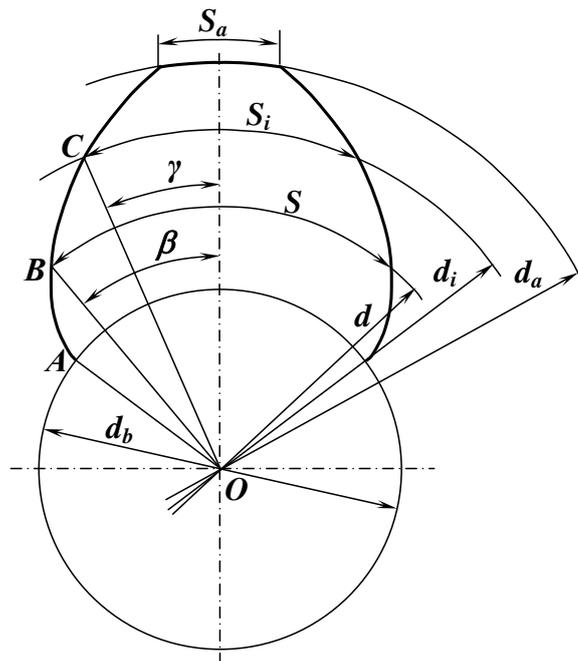


Рисунок 77 – Определение толщины зуба

## 6.7 Геометрический расчет зацепления

Шаг по начальной и делительной окружностям и радиус основной окружности

$$\pi \cdot d_w = p_w z, \quad \pi \cdot d = p \cdot z, \quad r_b = r \cos \alpha, \quad r_b = r_w \cos \alpha_w.$$

Радиус начальной окружности

$$r_w = r \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{m \cdot z}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad \frac{r_w}{r} = \frac{p_w}{p},$$

$$p_w = p \frac{r_w}{r} = p \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad m_w = m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \quad \text{– межосевое расстояние стандартной передачи,}$$

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m_w \cdot (z_1 + z_2)}{2} = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad \text{– межосевое}$$

расстояние нестандартной передачи.

$$a_W - a = y \cdot m = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} - \frac{m}{2}(z_1 + z_2) =$$

$$= \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} - 1 \right),$$

где  $y \cdot m$  – воспринимаемое смещение;

$y$  – коэффициент воспринимаемого смещения

$$x_\Sigma = y + \Delta y,$$

$\Delta y \cdot m$  – уравнивающее смещение (обратный сдвиг);

$\Delta y$  – коэффициент уравнивающего смещения (обратного сдвига),  $\Delta y \geq 0$  всегда.

Толщина зуба шестерни по начальной окружности

$$S_{W1} = d_{W1} \left[ \frac{S_1}{d_1} - (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right] =$$

$$= m \cdot z_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{m(\pi/2 + 2x_1 \text{tg} \alpha)}{m \cdot z_1} - (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right] =$$

$$= m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_1 \text{tg} \alpha - z_1 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right].$$

Толщина зуба колеса по начальной окружности

$$S_{W2} = m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_2 \text{tg} \alpha - z_2 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right].$$

Ширина впадины между зубьями колеса по начальной окружности  $e_{W2} = p_W - s_{W2}$ ,

$$e_{W2} = \pi \cdot m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} - m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_2 \text{tg} \alpha - z_2 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right] =$$

$$= m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} - 2x_2 \text{tg} \alpha + z_2 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right];$$

Толщина зуба шестерни по начальной окружности равна ширине впадины колеса по этой же окружности  $s_{w1} = e_{w2}$ ,

$$S_{W1} = m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_1 \text{tg} \alpha - z_1 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right] =$$

$$= m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \left[ \frac{\pi}{2} - 2x_2 \text{tg} \alpha - z_2 (\text{inv} \alpha_W - \text{inv} \alpha) \right],$$

откуда после группировки

$2(x_1 + x_2)tg\alpha = (z_1 + z_2)(inv\alpha_w - inv\alpha)$  получается инволюта угла  $\alpha_w$

$$inv\alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2)tg\alpha}{z_1 + z_2} + inv\alpha \quad (52)$$

и по таблице инволют определяется угол зацепления  $\alpha_w$ .

### 6.8 Определение геометрических размеров зубчатых колес, нарезанных со смещением исходного контура

Вычерчивается станочное зацепление. Оставляется один зуб рейки и определяется высота ножки зуба колеса с положительным смещением инструментальной рейки (рисунок 78).

$r$  – радиус делительной окружности;

$r_f$  – радиус окружности впадин;

$h$  – высота зуба;

$h_f$  – высота ножки зуба.

$$h_f = h_a^* \cdot m + c^* \cdot m - x \cdot m = m(h_a^* + c^* - x)$$

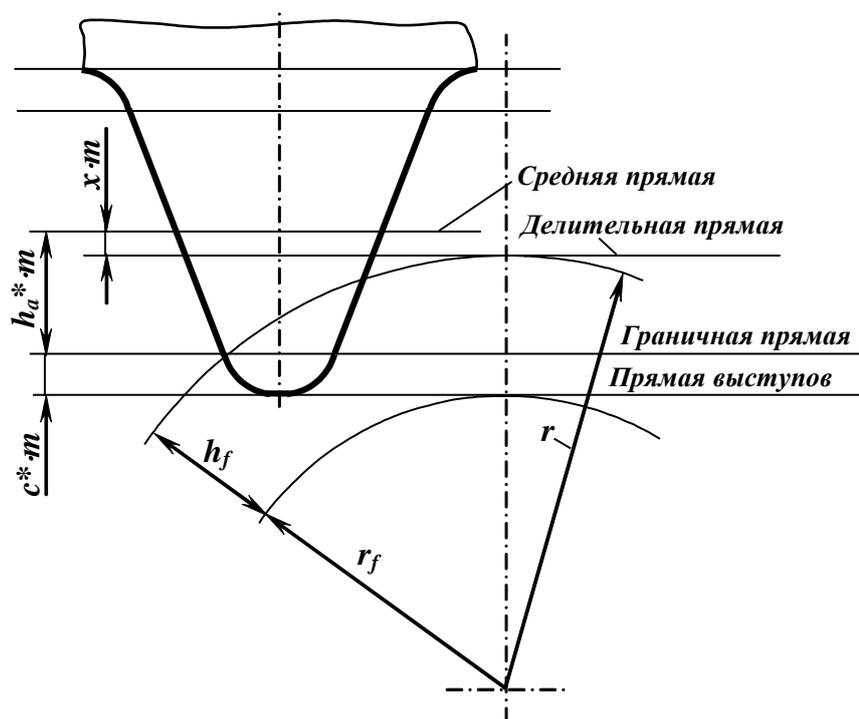


Рисунок 78 – Определение высоты ножки зуба

Вычерчиваются два колеса в зацеплении, оба изготовлены при положительном смещении инструмента. Оставляется по одному зубу и из чертежа определяется высота ножек зубьев (рисунок 79).

Высота ножек шестерни и колеса

$$h_{f1} = m(h_a^* + c^* - x_1), \quad h_{f2} = m(h_a^* + c^* - x_2);$$

Высота зуба шестерни равна высоте зуба колеса

$$h_1 = h_2 = h_{f1} + y \cdot m + h_{f2} - c^* m,$$

здесь  $y \cdot m$  – расстояние между делительными окружностями.

Определяется высота головок зубьев шестерни и колеса

$$h_{a1} = h_1 - h_{f1} = y \cdot m + h_{f2} - c^* m = m(h_a^* + y - x_2), \text{ аналогично}$$

$$h_{a2} = h_2 - h_{f2} = m(h_a^* + y - x_1).$$

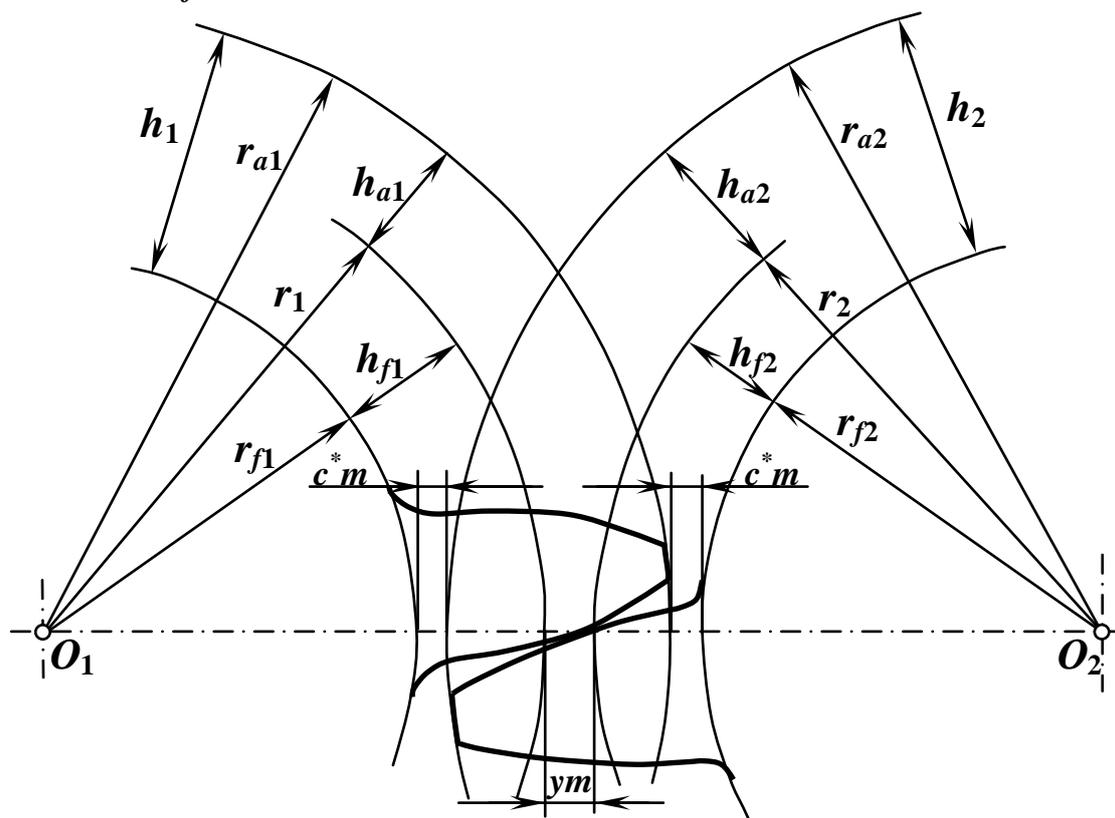


Рисунок 79 – Определение высоты зубьев

Радиусы окружностей выступов колес

$$r_{a1} = r_1 + h_{a1} = \frac{m \cdot z_1}{2} + m(h_a^* + y - x_2) = m\left(\frac{z_1}{2} + h_a^* + y - x_2\right),$$

$$r_{a2} = r_2 + h_{a2} = m\left(\frac{z_2}{2} + h_a^* + y - x_1\right).$$

Радиусы окружностей впадин

$$r_{f1} = r_1 - h_{f1} = \frac{m \cdot z_1}{2} - m(h_a^* + c^* - x_1) = m\left(\frac{z_1}{2} - h_a^* - c^* + x_1\right),$$

$$r_{f2} = r_2 - h_{f2} = m\left(\frac{z_2}{2} - h_a^* - c^* + x_2\right).$$

## 6.9 Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия

$N-N$  – линия зацепления,  $AB$  – теоретический участок,  $ab$  – активный участок линии зацепления (рисунок 80).

Путь, пройденный точкой за время зацепления, измеренный по дуге начальной окружности, называется *дугой зацепления*

$$\cup a_1b_1 = \cup a_2b_2.$$

Так как центральные углы, стягивающие дуги  $mn$  и  $a_1b_1$ , равны (угловой шаг одинаков), то отношение дуг равно отношению их радиусов

$$\frac{\cup a_1b_1}{\cup mn} = \frac{r_{w1}}{r_{b1}} = \frac{r_{b1}}{r_{b1} \cos \alpha_w} = \frac{1}{\cos \alpha_w}, \text{ откуда}$$

$$\cup a_1b_1 = \frac{\cup mn}{\cos \alpha_w}.$$

По третьему свойству эвольвенты  $\cup mn = \overline{ab}$ , откуда

$$\cup a_1b_1 = \frac{ab}{\cos \alpha_w}.$$

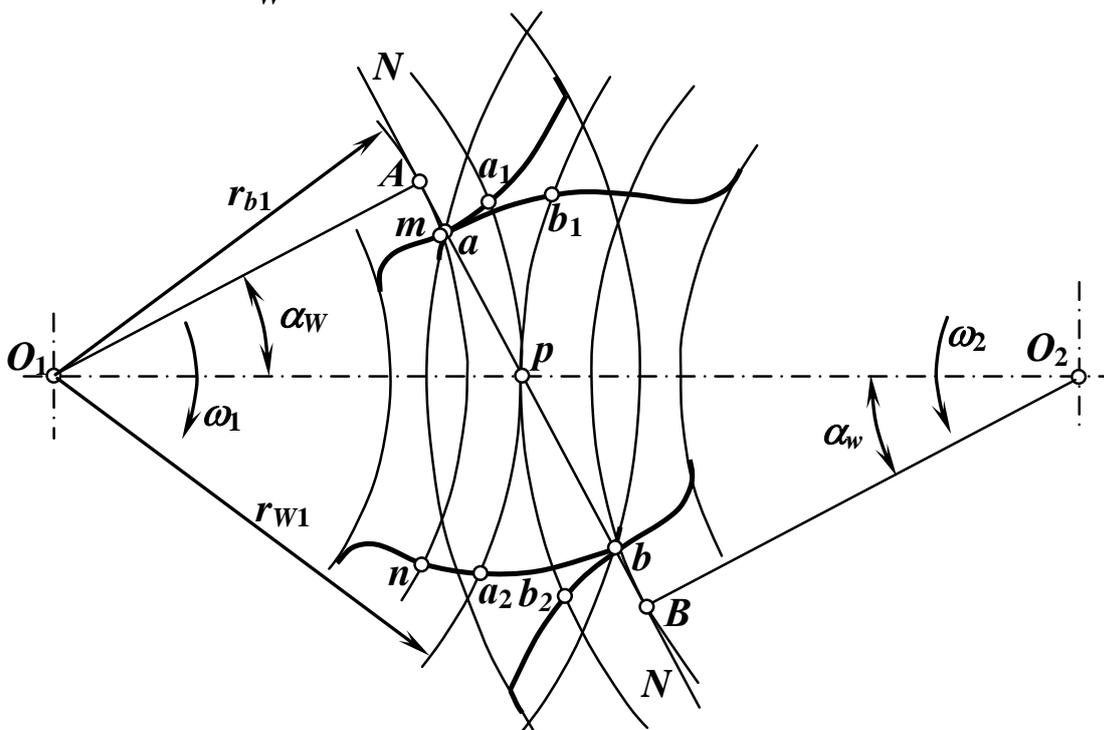


Рисунок 80 – Дуга зацепления

Отношение дуги зацепления к шагу по начальной окружности, называется коэффициентом перекрытия –  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \frac{\cup a_1 b_1}{p_w} = \frac{ab}{\cos \alpha_w} \frac{\cos \alpha_w}{\pi \cdot m \cos \alpha} = \frac{ab}{\pi \cdot m \cos \alpha},$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{ab}{\pi \cdot m \cos \alpha}}. \quad (53)$$

При графическом определении коэффициент перекрытия должен быть больше или равен  $\varepsilon \geq 1,1$ .

### 6.9.1 Аналитическое определение коэффициента перекрытия

Рабочий участок линии зацепления (рисунок 80).

$$ab = ap + pb = (aB - pB) + (Ab - Ap),$$

$$aB = \sqrt{(O_2 a)^2 - (O_2 B)^2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2},$$

$$pB = pO_2 \sin \alpha_w = r_{w2} \sin \alpha_w,$$

$$Ab = \sqrt{(O_1 b)^2 - (O_1 A)^2} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2},$$

$$Ap = pO_1 \sin \alpha_w = r_{w1} \sin \alpha_w.$$

Подставив значения отрезков в формулу коэффициента перекрытия получается, что

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - (r_{w2} + r_{w1}) \sin \alpha_w}{\pi \cdot m \cos \alpha}. \quad (54)$$

### 6.10 Подрезание зубьев эвольвентного профиля

Для увеличения коэффициента перекрытия  $\varepsilon$  необходимо увеличить активный участок линии зацепления  $ab$ , который определяется пересечением линии зацепления  $NN$  окружностями выступов колес. Если увеличить диаметр  $d_{a1}$  до тех пор, пока точка  $b$  не выйдет за пределы теоретического участка, за точку  $B$  (рисунок 81), то произойдет следующее:

1. Если колесо  $z_1$  является долбяком, а колесо  $z_2$  – нарезаемым, и окружность головок зубьев пересекает линию зацепления за пределами теоретического участка  $AB$ , например, в точке  $B'$ , то в

этом случае эвольвенты зубьев не касаются, а пересекаются. Нормаль к эвольвенте не проходит через полюс зацепления  $p$ , т.е. нарушается основной закон зацепления и зубчатое колесо окажется подрезанным.

2. Если звено  $z_1$  является обычным колесом, то произойдет заклинивание передачи вследствие того, что нормаль  $N'-N'$  не проходит через полюс зацепления, т.е. нарушается основной закон зацепления.

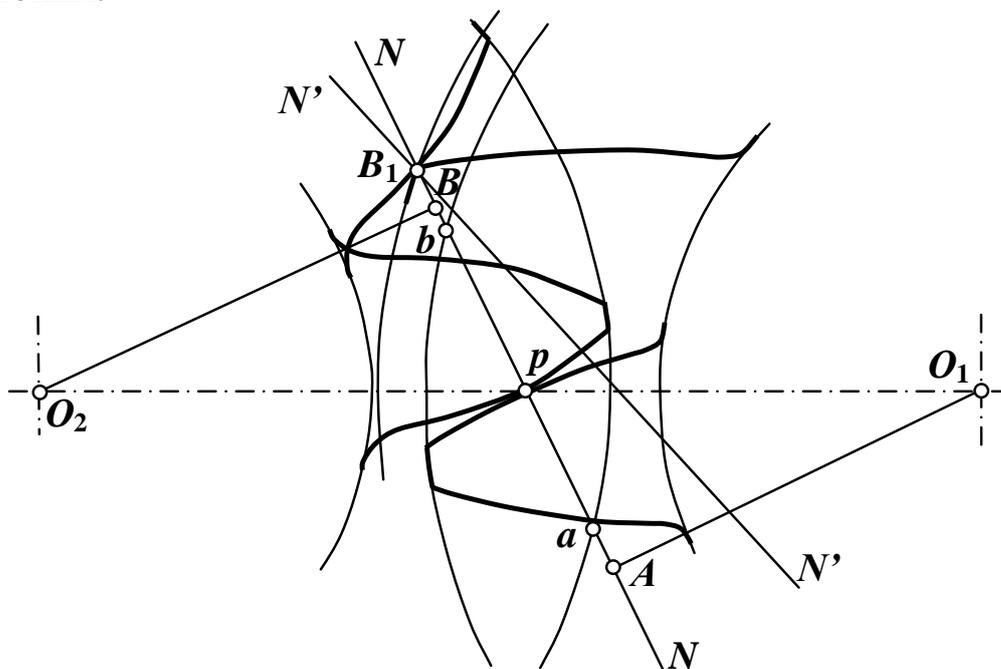


Рисунок 81 – Подрезание зубьев

### 6.11 Определение минимального числа зубьев

#### а) При нарезании долбяком

Рассматриваются стандартные прямозубые колеса. Пусть  $z_1 > z_2$ ,  $z_1$  – долбяк. Предельное положение колес при отсутствии подрезания будет тогда, когда точка  $b$  не выходит за пределы точки  $B$ , т.е. активный участок линии зацепления находится в пределах теоретического. Максимальный радиус окружности выступов долбяка по теореме косинусов

$$O_1B^2 = O_1O_2^2 + O_2B^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2B \cos \alpha.$$

Определяются отрезки

$$O_1B = r_{a1} = r_1 + h_a = m \frac{z_1}{2} + m \cdot h_a^* = \frac{m}{2} (z_1 + 2h_a^*),$$

$$O_1O_2 = a = r_1 + r_2 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2), \quad O_2B = r_{b2} = r_2 \cos \alpha = \frac{m}{2}z_2 \cos \alpha,$$

тогда

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 (z_1 + 2h_a^*)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 (z_1 + z_2)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 z_2^2 \cos^2 \alpha -$$

$$- 2\left(\frac{m}{2}\right)^2 (z_1 + z_2)z_2 \cos^2 \alpha,$$

$$z_1^2 + 4z_1h_a^* + (h_a^*)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 + z_2^2 \cos^2 \alpha -$$

$$- 2z_1z_2 \cos^2 \alpha - 2z_2^2 \cos^2 \alpha,$$

группируются  $2z_1z_2(1 - \cos^2 \alpha) = 2z_1z_2 \sin^2 \alpha$

и  $z_2^2 + z_2^2 \cos^2 \alpha - 2z_2^2 \cos^2 \alpha = z_2^2 \sin^2 \alpha$ , откуда получается

$4z_1h_a^* + 4(h_a^*)^2 = z_2^2 \sin^2 \alpha + 2z_1z_2 \sin^2 \alpha$  и определяется число зубьев долбяка

$$z_1 = \frac{z_2^2 \sin^2 \alpha - 4(h_a^*)^2}{4(h_a^*) - 2z_2 \sin^2 \alpha}. \quad (55)$$

$$\text{При } \alpha = 20^\circ, h_a^* = 1,0 \quad z_1 = \frac{z_2^2 - 34}{34 - 2z_2}. \quad (56)$$

Чтобы нарезать колеса с числом зубьев  $z_2$ , необходимо иметь долбяк с числом зубьев  $z_1$

$z_2$	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>
$z_1$	<b>&lt; 17</b>	<b>&lt; 27</b>	<b>&lt; 48</b>	<b>&lt; 112</b>	<b>любое</b>

### ***б) При нарезании инструментальной рейкой***

Число зубьев инструментальной рейки  $z_1 = \infty$ , чтобы это выполнить, нужно, чтобы в формуле

$$z_1 = \frac{z_2^2 \sin^2 \alpha - 4(h_a^*)^2}{4(h_a^*) - 2z_2 \sin^2 \alpha} \quad \text{знаменатель дроби был равен нулю:}$$

$$4(h_a^*) - 2z_2 \sin^2 \alpha = 0, \quad \text{откуда } z_2 = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}, \quad \text{а при } \alpha = 20^\circ \text{ и } h_a^* = 1,0$$

получается, что  $z_2 = z_{\min} = 17$ .

## 6.12 Определение минимального коэффициента смещения

Пусть требуется с помощью инструментальной рейки изготовить колесо с числом зубьев меньше 17, при этом без подрезания ножек зубьев.

Известно, что эвольвентная часть профиля зуба нарезается частью прямой зуба рейки между граничными прямыми (рисунок 82).

Следовательно, при нарезании колеса с минимальным числом зубьев без подрезания ( $z_2 = z_{\min} = 17$ ) основная окружность нарезаемого колеса будет пересекать граничную прямую в точке  $B_2$ . В точке  $B_1$  будет касание основной окружности нарезаемого колеса с числом зубьев больше 17. Так как число зубьев меньше  $z < z_{2\min}$ , то и радиус основной окружности меньше, поэтому она коснется линии зацепления в какой-то точке  $B_3$ . Следовательно, смещение рейки должно быть положительным и равным  $x \cdot m$ .

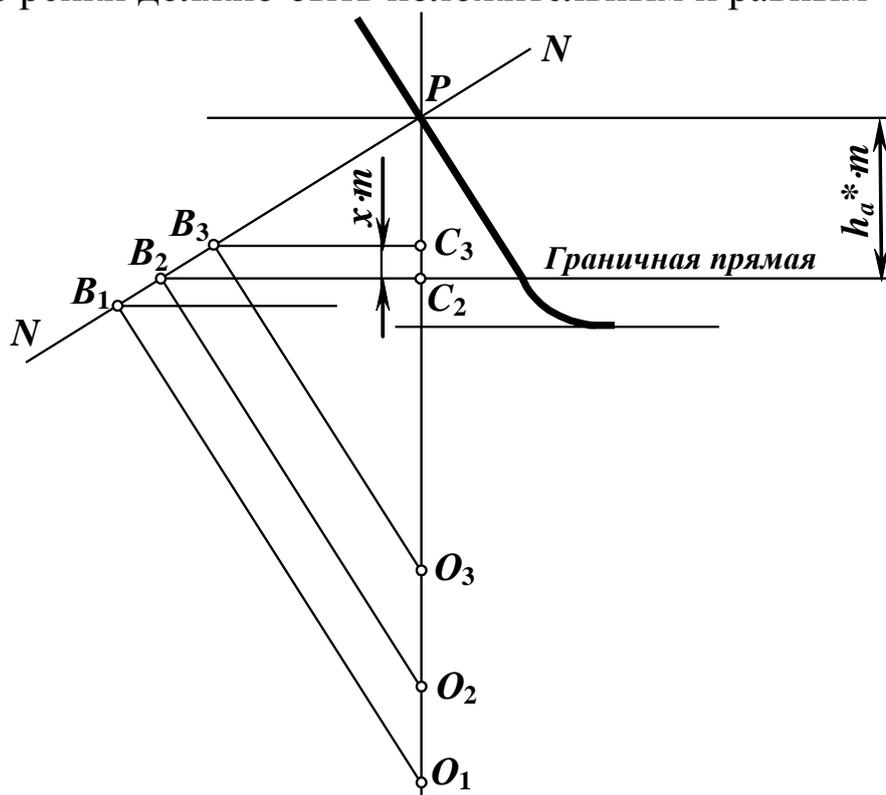


Рисунок 82 – Определение коэффициента смещения

Из подобия треугольников  $PB_2C_2$ ,  $PB_3C_3$ ,  $O_2B_2C_2$  и  $O_3B_3C_3$  составляется соотношение

$$\frac{PC_2}{PC_3} = \frac{B_2O_2}{B_3O_3}, \quad PC_2 = h_a^* m, \quad PC_3 = h_a^* m - x \cdot m,$$

$$B_2O_2 = r_{b(\min)} = \frac{m \cdot z_{2\min}}{2} \cos \alpha, \quad B_3O_3 = r_b = \frac{m \cdot z}{2} \cos \alpha,$$

$$\frac{h_a^* m}{m(h_a^* - x)} = \frac{m \cdot z_{2\min} \cos \alpha \cdot 2}{2m \cdot z \cos \alpha} = \frac{m \cdot z_{2\min}}{m \cdot z},$$

$$h_a^* z = z_{2\min}(h_a^* - x), \quad z_{2\min} x = h_a^* z_{2\min} - h_a^* z.$$

Отсюда определяется коэффициент смещения  $x$

$$x = x_{\min} = h_a^* \frac{z_{2\min} - z}{z_{2\min}}, \quad \text{при } h_a^* = 1, \quad x_{\min} = \frac{17 - z}{17}.$$

### 6.13 Скорость скольжения

В параграфе 6.2.1. (Основной закон зацепления) определена скорость скольжения

$$V_{CK} = V_{K2}^{\tau} - V_{K1}^{\tau}.$$

Определяются тангенциальные составляющие (рисунок 82)

$$V_{K1}^{\tau} = V_{K1} \sin \varphi_1 = \omega_1 \cdot O_1K \frac{AK}{O_1K} = \omega_1 \cdot AK,$$

$$V_{K2}^{\tau} = V_{K2} \sin \varphi_2 = \omega_2 \cdot O_2K \frac{BK}{O_2K} = \omega_2 \cdot BK.$$

$$V_{CK} = BK \cdot \omega_2 - AK \cdot \omega_1 = (Bp + pK)\omega_2 - (Ap - pK)\omega_1 = \\ = Bp \cdot \omega_2 + pK \cdot \omega_2 - Ap \cdot \omega_1 + pK \cdot \omega_1.$$

Из определения основного закона зацепления

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2p}{O_1p} = \frac{Bp}{Ap}, \quad \text{откуда } Ap \cdot \omega_1 = Bp \cdot \omega_2, \quad \text{тогда}$$

$$\boxed{V_{CK} = pK(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (57)$$

Скорость скольжения равна произведению суммы угловых скоростей на расстояние от полюса зацепления до точки касания профилей зубьев, и чем дальше от полюса точка касания, тем больше скорость скольжения.

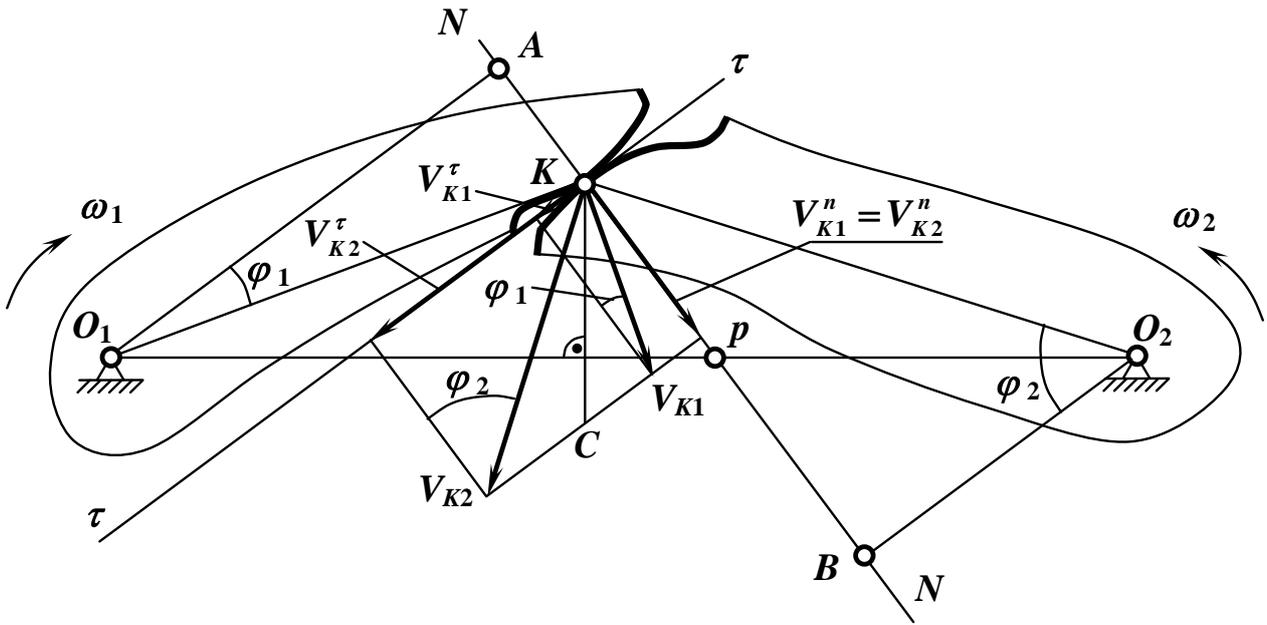


Рисунок 83 – Скорость скольжения

### 6.14 Удельное скольжение

В процессе эксплуатации зубчатых колес зубья испытывают деформацию, связанную с трением. Это трение качения и трение скольжения. Трение качения мало и им пренебрегают. Трение же качения велико и, кроме того, что на его преодоление расходуется дополнительная энергия, оно вызывает износ зубьев. Коэффициент, являющийся параметром трения скольжения, называется удельным скольжением  $\nu$ , это отношение скорости скольжения к тангенциальной составляющей скорости.

$$\nu_1 = \frac{V_{K2}^{\tau} - V_{K1}^{\tau}}{V_{K1}^{\tau}}, \quad \nu_2 = \frac{V_{K2}^{\tau} - V_{K1}^{\tau}}{V_{K2}^{\tau}}. \quad (58)$$

После некоторых преобразований выводится, что

$$\nu_1 = 1 + \frac{z_1}{z_2} - \frac{AB}{x} \cdot \frac{z_1}{z_2}, \quad \nu_2 = 1 + \frac{z_2}{z_1} - \frac{AB}{AB - x} \cdot \frac{z_2}{z_1}, \quad (59)$$

здесь  $z_1$  и  $z_2$  – числа зубьев шестерни и колеса;

$AB$  – длина (в мм) теоретического участка линии зацепления;

$x$  – расстояние (в мм), измеренное от точки  $A$  линии зацепления, в направлении к точке  $B$ .

Теоретический участок линии зацепления разбивается на несколько частей, высчитываются значения удельного скольжения для каждой части и составляется таблица. Ниже приводится таблица известных значений для любых пар зубьев.

Таблица значений удельных скольжений

$x$	<b>0</b>	...	$Ap$	...	$AB$
$v_1$	$-\infty$		<b>0</b>		<b>1</b>
$v_2$	<b>1</b>		<b>0</b>		$-\infty$

Строится диаграмма удельного скольжения (рисунок 84).

### 6.15 Блокирующий контур

Смещение исходного производящего реечного контура производится в следующих случаях:

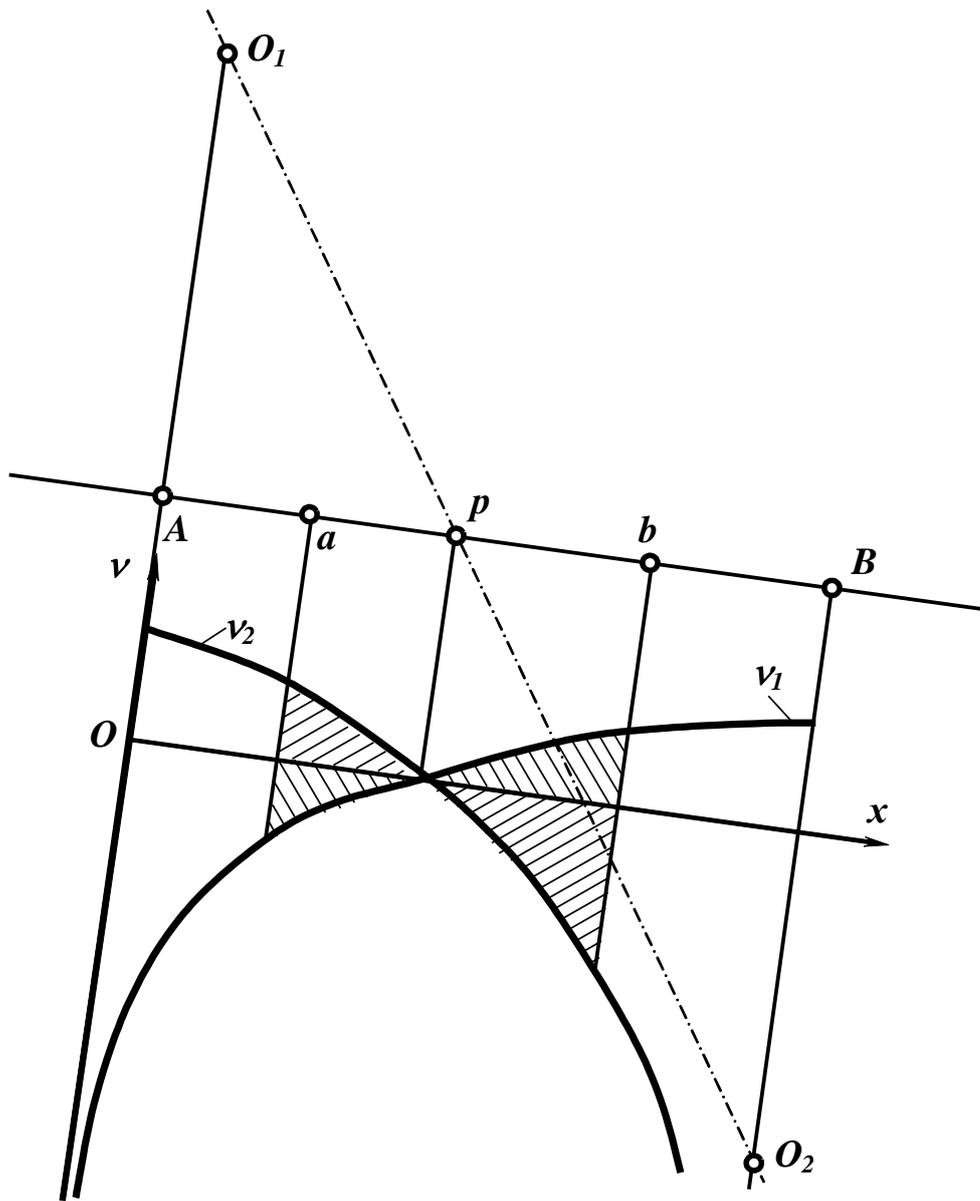


Рисунок 84 – Диаграмма удельного скольжения

1. Для увеличения контактной прочности зубьев. При расчете зубчатого зацепления на контактную прочность используют формулу Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n E_{np}}{b \cdot \rho_{np}}},$$

где  $F_n$  – сила полного нормального давления;  
 $E_{np}$  – приведенный модуль упругости Юнга;

$$E_{np} = \frac{2E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$$

$b$  – длина зуба или ширина колеса;

$\rho_{np}$  – приведенный радиус кривизны колес

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Для увеличения прочности зубьев (уменьшения поверхностного напряжения сжатия) невозможно уменьшить ни силу нормального давления, ни приведенный модуль упругости, ни увеличить длину зуба. Можно увеличить приведенный радиус кривизны, т.е. использовать наиболее удаленные участки эвольвенты – вводить положительное смещение.

2. Для увеличения прочности зубьев на изгиб. При расчете зубчатого зацепления на изгиб используют формулу

$$\sigma_F = \frac{F_n}{b \cdot m \cdot y},$$

где  $y$  – коэффициент формы зуба, который зависит от кривизны профиля.

Чтобы уменьшить напряжения изгиба, необходимо вводить положительное смещение инструментальной рейки.

3. Для устранения подрезания ножек зубьев требуется также вводить положительное смещение инструмента.

4. Для устранения заострения вершин зубьев нужно вводить отрицательное смещение инструментальной рейки.

5. Для предотвращения интерференции зубьев необходимо также вводить отрицательное смещение.

6. Для увеличения коэффициента перекрытия применяется положительное смещение.

7. Для уменьшения удельного скольжения производится положительное смещение для одного колеса и отрицательное – для другого.

8. Для вписывания передачи в заданное межосевое расстояние может производиться как положительное, так и отрицательное смещение инструмента.

При проектировании зубчатых передач в связи с соблюдением всех перечисленных требований и многих других, конструктор может придти к противоречивым выводам. Нет какой-либо универсальной системы выбора коэффициентов смещения инструментальной рейки при нарезании колес, которые были бы пригодны для всех случаев практики. Поэтому выбор

коэффициентов для каждой конкретной зубчатой передачи должен производиться с учетом заданных условий работы и предъявляемых к ней требований.

Для правильного выбора коэффициентов смещения используются блокирующие контуры. Блокирующие контуры разработаны для пары зубчатых колес  $z_1$  и  $z_2$ .

Линии, ограничивающие область допустимых значений коэффициентов смещения от недопустимых, принято называть блокирующим контуром (рисунок 85).

Блокирующим контуром также называют графики, построенные в координатах коэффициентов смещения  $x_1 = f(x_2)$ . Здесь  $x_1$  и  $x_2$  – безразмерные коэффициенты смещения, равные отношению абсолютного смещения к модулю. Блокирующие контуры позволяют представить всю совокупность теоретически возможных вариантов передачи, каждому из которых соответствует одна из точек поля. Использование блокирующих контуров позволяет резко сократить объем вычислительной работы при проектировании. Граничные линии блокирующего контура (рисунок 84):

- 1 – граница интерференции на ножке зуба большего колеса;
- 2 – линия, ограничивающая подрезание эвольвентного профиля меньшего колеса;
- 3 – линия предельного (минимального) коэффициента перекрытия;
- 4 – граница интерференции на ножке зуба меньшего колеса;
- 5 – граница заострения зуба меньшего колеса.

Внутри контура изображены линии, соответствующие определенным значениям качественных показателей зацепления:  $a$  и  $b$  – линии, определяющие равную прочность зубьев на изгиб ( $a$  – при ведущем меньшем колесе,  $b$  – при ведущем большем колесе);  $\varepsilon = 1,2$  – значения коэффициентов смещения, при которых коэффициент перекрытия равен 1,2;  $v_1 = v_2$  – кривая, характеризующая выравнивание удельного скольжения на ножках зубьев обоих колес.

При выборе коэффициентов смещения можно руководствоваться следующими рекомендациями. Если зубчатое зацепление работает в масляной ванне, то для него опасны высокие контактные напряжения. Можно добиться уменьшения напряжений

увеличением угла зацепления  $\alpha_w$ , т.е. увеличением  $x_\Sigma = x_1 + x_2$ . Для нахождения максимально возможного значения  $x_\Sigma$  к кривой  $\varepsilon = 1,2$  в зоне положительных значений следует провести касательную линию  $d$  под углом  $45^\circ$  к осям координат. Координаты точки касания определяют конкретные коэффициенты смещения.

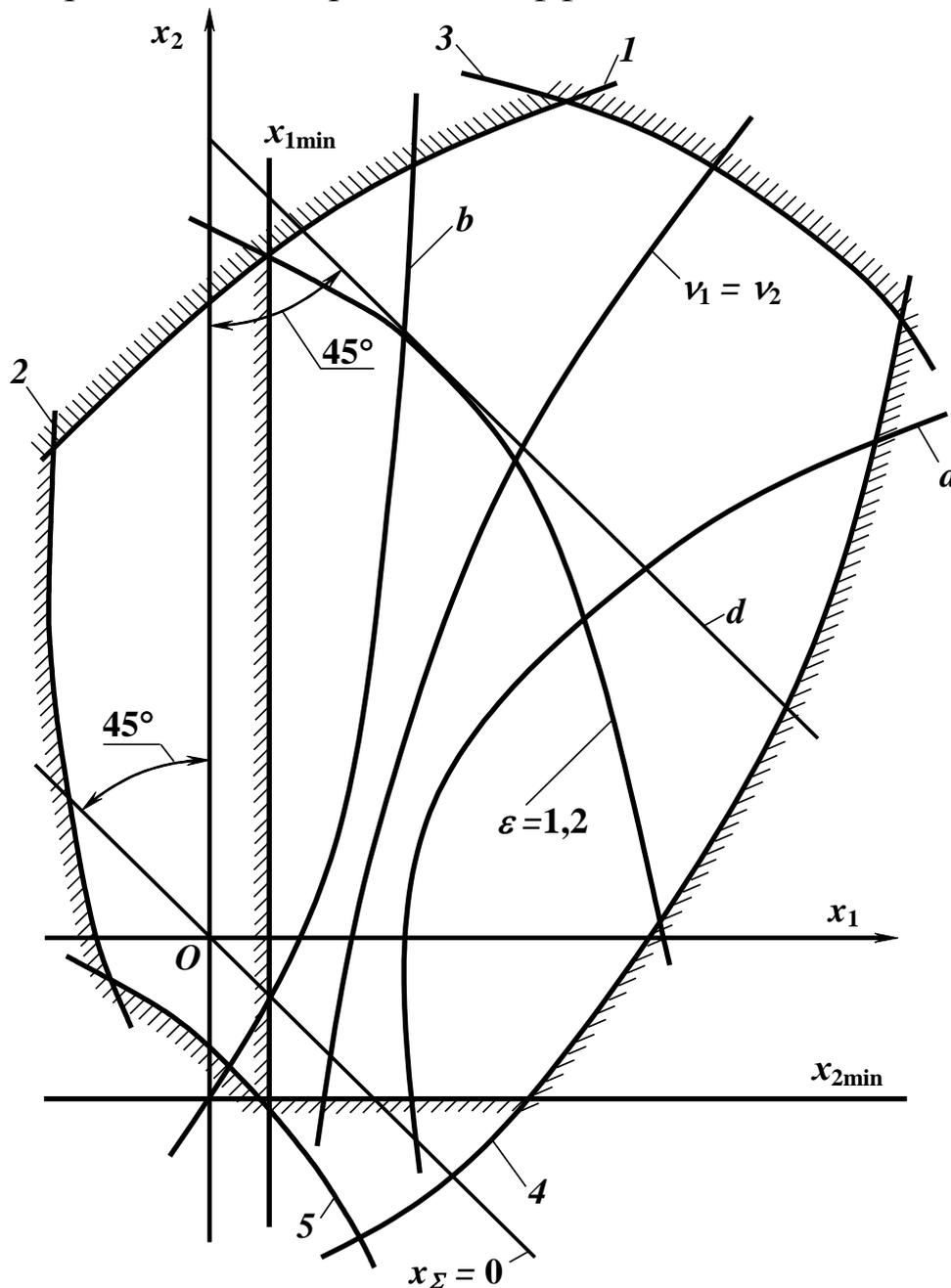


Рисунок 85 – Блокирующий контур

Если проектируется открытое зубчатое зацепление, для которого возможно его загрязнение, опасным становится абразивный износ зубьев. В этом случае следует обеспечить

минимум износа, в частности, уравнивать износ на ножках зубьев шестерни и колеса, т.е. выбрать коэффициенты смещения  $x_1$  и  $x_2$  на линии  $v_1 = v_2$ .

При расчете колес, обеспечивающих максимальную изгибную прочность следует при ведущем колесе с меньшим числом зубьев точку для выбора коэффициентов смещения искать на кривой  $a$ , а при ведущем большем колесе – на кривой  $b$  контура.

Если требования к передаче таковы, что возможно применение равносмещенного зацепления, то значения коэффициентов смещения следует искать на прямой, проведенной под углом  $45^\circ$  к осям координат через начало системы координат.

Для расчета зацепления с максимальным коэффициентом перекрытия коэффициенты смещения следует искать в левом нижнем углу блокирующего контура, так как коэффициент перекрытия при прочих равных условиях растет с уменьшением угла зацепления.

Угол зацепления определяется согласно выбранным коэффициентам смещения по формуле (52)

$$\text{inv}\alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2)\text{tg}\alpha}{z_1 + z_2} + \text{inv}\alpha.$$

Если межосевое расстояние зубчатой передачи требуется округлить, то предварительно выбирают коэффициенты смещения по заданным условиям. Затем рассчитывается межосевое расстояние и округляется до ближайшего меньшего из ряда предпочтительных значений. По принятому межосевому расстоянию  $a_w$  вычисляется угол зацепления  $\alpha_w$  и уточняется значение суммарного коэффициента смещения

$$\cos\alpha_w = \frac{m(z_1 + z_2)\cos\alpha}{2a_w}; \quad x_\Sigma = x_1 + x_2 = \frac{(\text{inv}\alpha_w - \text{inv}\alpha)(z_1 + z_2)}{2\text{tg}\alpha}.$$

Окончательно коэффициенты смещения выбираются на прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные  $x_\Sigma$ .

### **6.16 Определение передаточного отношения зубчатого механизма с неподвижными осями зубчатых колес**

На рисунке 86 приведен последовательный ряд зубчатых колес с неподвижными осями (трехступенчатый редуктор).

На схемах механизмов зубчатые колеса вычерчиваются диаметрами начальных окружностей.

Вращательное движение колесо  $z_1$  получает от двигателя через вал I, далее от колеса  $z_1$  через зубья движение передается колесу  $z_2$ , а от него колесу  $z'_2$ , жестко закрепленном на валу II, от колеса  $z'_2$  через зубья – колесу  $z_3$ , затем через вал III – колесу  $z'_3$ , а от него посредством зубьев получает вращение колесо  $z_4$  и вал IV. Трехступенчатый зубчатый механизм называется потому, что в нем три зубчатые передачи  $z_1 - z_2$ ,  $z'_2 - z_3$ , и  $z'_3 - z_4$ . Редуктором называется потому, что в каждой ступени происходит уменьшение скорости вращения колес, так как диаметр ведущих колес меньше, чем диаметр ведомых.

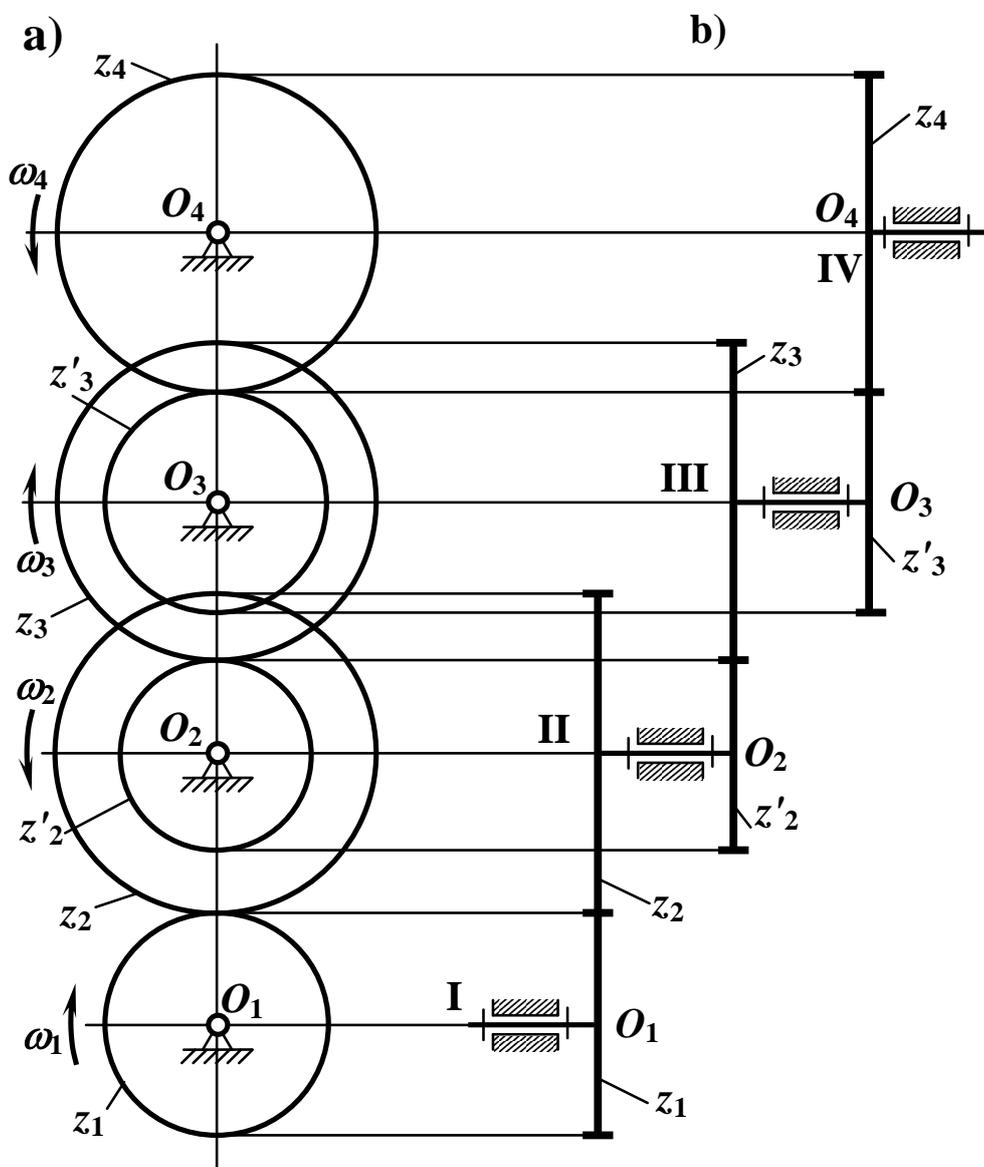


Рисунок 86 – Зубчатый механизм

Передаточное отношение каждой ступени известно.

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 p}{O_1 p} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{2m_w z_2}{2m_w z_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

здесь необходимо учесть

знак. При определении передаточного отношения через угловые скорости, знак не учитывается, так как на рисунке 86,а показаны направления угловых скоростей, а при определении передаточного отношения через числа зубьев (рисунок 86,б) направление вращения колес не показывается (в основном, схемы зубчатых механизмов вычерчиваются именно так), перед отношением ставится знак “минус” при внешнем зацеплении, а знак “плюс” опускается – при внутреннем зацеплении. Поэтому

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ и } u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Для остальных зацеплений

$$u_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}, \quad u_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}.$$

Передаточное отношение всего механизма определяется через угловые скорости, для этого перемножаются передаточные отношения всех трех зацеплений

$$u_{12}u_{23}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = u_{14}.$$

Передаточным отношением всего зубчатого механизма называется отношение угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев. Таким образом, передаточное отношение зубчатого редуктора есть произведение передаточных отношений всех ступеней. В общем виде

$$u_{1n} = u_{12}u_{23} \dots u_{n-1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \dots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \quad (60)$$

Передаточное отношения этого зубчатого механизма через числа зубьев

$$u_{14} = u_{12}u_{23}u_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3},$$

тогда в

общем виде

$$u_{14} = (-1)^k \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} \dots \frac{z_n}{z_{n-1}}, \quad (61)$$

где  $k$  – число внешних зацеплений.

На рисунке 87 приведен зубчатый ряд, состоящий из трех колес.

Для этого зубчатого ряда передаточное отношение через числа зубьев

$$u_{13} = u_{12} \cdot u_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1}.$$

В общем виде

$$u_{1n} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}.$$

Передаточное отношение этого ряда зубчатых колес не зависит от числа зубьев  $z_2$  второго колеса. Такой ряд называется паразитным, а это колесо также называется паразитным.

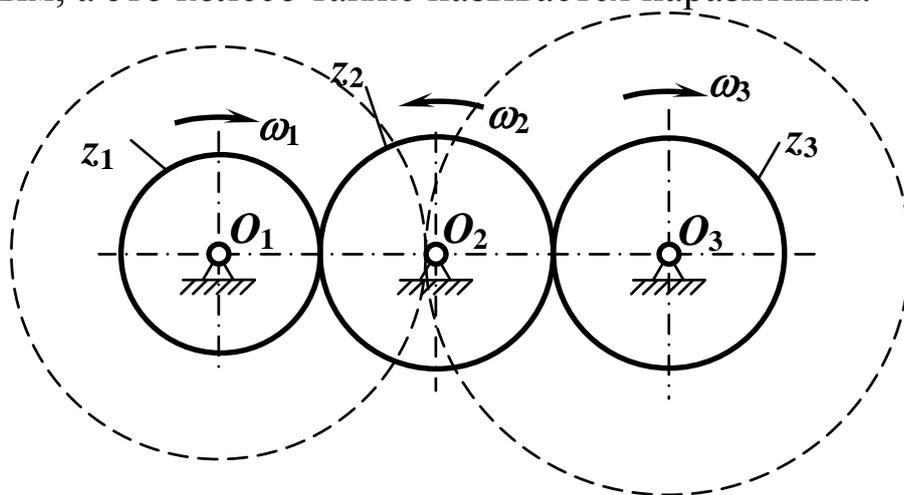


Рисунок 87 – Паразитный зубчатый ряд

Паразитный зубчатый ряд применяется, когда необходимо изменить направление вращения ведомого вала; когда межосевое расстояние  $a_w$  велико, а постановка двух больших колес нецелесообразна (показаны на рисунке пунктиром).

### 6.17 Графическое исследование зубчатых передач

На рисунке 88 приведен зубчатый ряд, состоящий из двух колес – шестерни  $z_1$  и колеса  $z_2$ . Колеса на схеме вычерчиваются

радиусами начальных окружностей, которые, как известно, перекатываются друг по другу без скольжения. Следовательно, скорость точки  $A$  (полюса зацепления) для обоих колес одинакова.

$$V_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

Проводится прямая линия  $y-y$ , параллельная линии центров  $O_1O_2$ . На ней будут находиться все точки зубчатых колес, скорости которых равны нулю. От линии  $y-y$  вправо согласно схеме механизма откладывается в масштабе вектор скорости точки  $A$ . Так как закон изменения скорости выражается прямой вида  $y = ax$ , то зная скорость двух точек (точки  $A$  и точки  $O_1$ ,  $V_{O_1} = 0$ ), можно найти скорость точки  $B$  колеса  $z_1$ , соединяя прямой линией точки  $a$  и  $o_1$  и продолжая до проекции точки  $B$  на прямую  $y-y$ . Линия  $1$  называется картиной скоростей для колеса  $z_1$ . Строится таким же путем картину скоростей колеса  $z_2$ , на которой находится скорость точки  $D$  этого колеса. Она перпендикулярна радиусу  $DO_2$  и направлена в сторону вращения колеса. Для того чтобы найти ее по величине, необходимо радиусом  $DO_2$  перенести ее на линию центров, а затем проецировать на линию  $y-y$  и по картине скоростей  $2$  определить отрезок  $vd$  и умножить его на масштабный коэффициент скоростей.

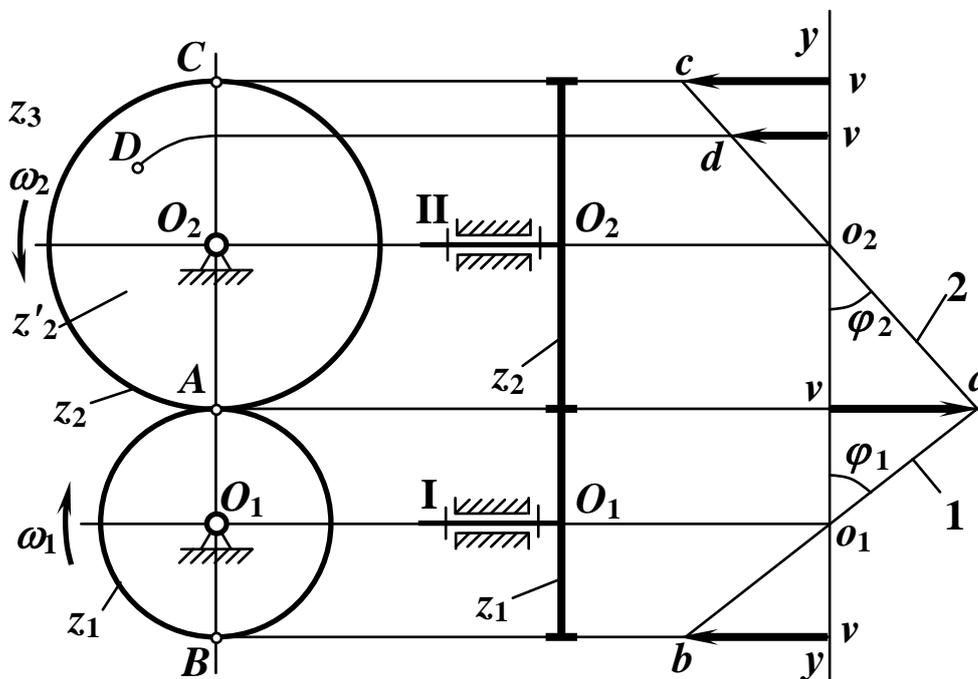


Рисунок 88 – Зубчатый ряд

Определяются угловые скорости колес

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r_1} = \frac{va \cdot \mu_V}{vo_1 \cdot \mu_l} = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{va \cdot \mu_V}{vo_2 \cdot \mu_l} = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (62)$$

Передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}. \quad (63)$$

На свободном поле чертежа проводится прямая линия, перпендикулярная  $y-y$  (рисунок 89). На этой прямой выберем произвольную точку  $S$  и из нее проведем прямую, параллельную  $y-y$  длиной  $h$ , получим точку  $p$ . Из точки  $p$  проведем прямую, параллельную картине скоростей колеса  $z_1$ , засечем на прямой, перпендикулярной  $y-y$ , точку 1, затем прямую, параллельную картине скоростей колеса  $z_2$ , получим точку 2. Угол между прямой  $p1$  и отрезком  $Sp$  есть угол  $\varphi_1$ , так как эти линии параллельны, соответственно, отрезкам  $o_1a$  и  $vo_1$ . Тогда

$$\omega_1 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \cdot \frac{\overline{S1}}{h}, \quad \omega_2 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \cdot \frac{\overline{S2}}{h}. \quad (64)$$

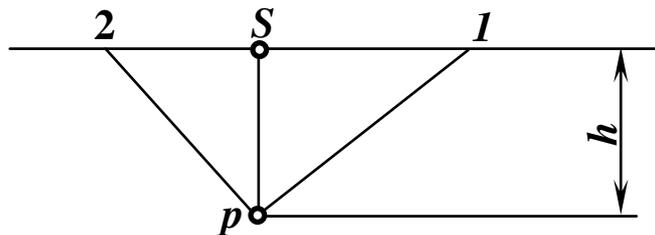


Рисунок 89 – План угловых скоростей

Обозначим  $\frac{\mu_V}{\mu_l h} = \mu_\omega$ , тогда  $\omega_1 = \mu_\omega \cdot \overline{S1}$  и  $\omega_2 = \mu_\omega \cdot \overline{S2}$ ,

отсюда передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{S1}}{\overline{S2}}. \quad (65)$$

Это построение называется планом угловых скоростей. Отрезки, изображающие угловые скорости, откладываются от одной точки  $S$ .

Если точки находятся по одну сторону от  $S$ , то передаточное положение будет положительным, а если по разные – отрицательным.

## Глава 7. ЭПИЦИКЛИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ

Эпициклическими называются такие зубчато-рычажные механизмы, у которых ось какого-нибудь из зубчатых колес является подвижной. На рисунке 90,а,б представлены два эпициклических механизма, в которых  $z_1$  и  $z_4$  – центральные солнечные колеса,  $z_2$  и  $z_3$  – сателлиты,  $H$  – водило.

Эпициклические механизмы с двумя и более степенями подвижностями называются *дифференциальными* (рисунок 90,а)

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

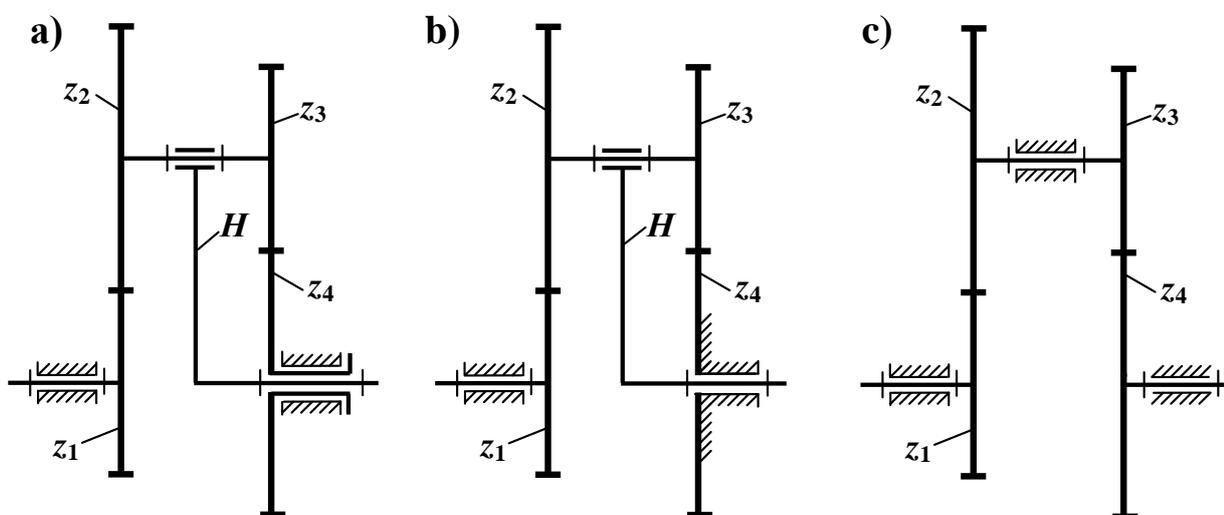


Рисунок 90 – Зубчатые механизмы:

а – дифференциальный; б – планетарный; в – соосный редуктор

Они применяются:

- для передачи вращения одному валу от двух других, вращающихся независимо (грузоподъемные, предохранительные, реверсивные и другие механизмы);
- для разложения движения ведущего вала на два независимых движения ведомых валов (автомобили);
- для алгебраического суммирования движения на ведомом валу (в вычислительных машинах).

Эпициклические механизмы с одной степенью подвижности называются *планетарными* (рисунок 90,б)

$$W = 3n - 2p_V - p_{IV} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Они образуются путем соединения со стойкой одного из центральных колес дифференциального механизма и применяются:

- для получения бóльших передаточных отношений в силовых передачах при малом числе зубчатых колес по сравнению со ступенчатым редуктором (зубчатым рядом);
- для получения очень больших передаточных отношений в не силовых передачах ( $u \leq 200\ 000$ ).

Если в дифференциальной передаче соединить со стойкой водило, то получаем простую *зубчатую передачу* (зубчатый ряд) с неподвижными осями (рисунок 90,с).

**Достоинства** эпициклических механизмов:

- соосность ведущего и ведомого валов;
- меньшие габариты передачи за счет применения нескольких сателлитов (усилия на зуб меньше).

**Недостатки** этих механизмов:

- сложность конструкции, требующей повышенной точности изготовления и сборки деталей (сателлиты входят в зацепление одновременно с двумя колесами и имеют подвижную ось).
- низкий КПД при больших передаточных отношениях: при  $u = 10000$ ,  $\eta < 1\ %$ .

## 7.1 Дифференциальные механизмы. Аналитическое и графическое исследование

Рассмотрим дифференциальный механизм, приведенный на рисунке 91. Здесь имеются:  $z_1$  – центральное солнечное колесо,  $z_2$  – сателлиты,  $z_3$  – эпициклическое колесо и  $H$  – водило. Ось сателлитов подвижная, угловая скорость водила  $\omega_H$ . Сообщаем всему механизму угловую скорость  $-\omega_H$ , тогда все оси механизма будут неподвижными. Составим таблицу угловых скоростей звеньев в абсолютном и относительном движении.

Таблица угловых скоростей звеньев

Звено	$\omega^{abc}$	$\omega^H$
$z_1$	$\omega_1$	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
$z_2$	$\omega_2$	$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$

$z_3$	$\omega_3$	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
$H$	$\omega_H$	$0$

В этой таблице  $\omega^H$  показывает угловую скорость звена относительно остановленного водила.

Степень подвижности дифференциального механизма (число подвижных звеньев  $n = 4$ , число кинематических пар пятого класса  $p_5 = 4$ , число пар четвертого класса  $p_4 = 2$ )

$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$ , следовательно, нужно задать движение двум звеньям. Пусть заданы  $\omega_1$  и  $\omega_3$ .

Передаточное отношение (так как водило остановлено, то передаточное отношение определяем как для зубчатого ряда) определяем по формуле Виллиса

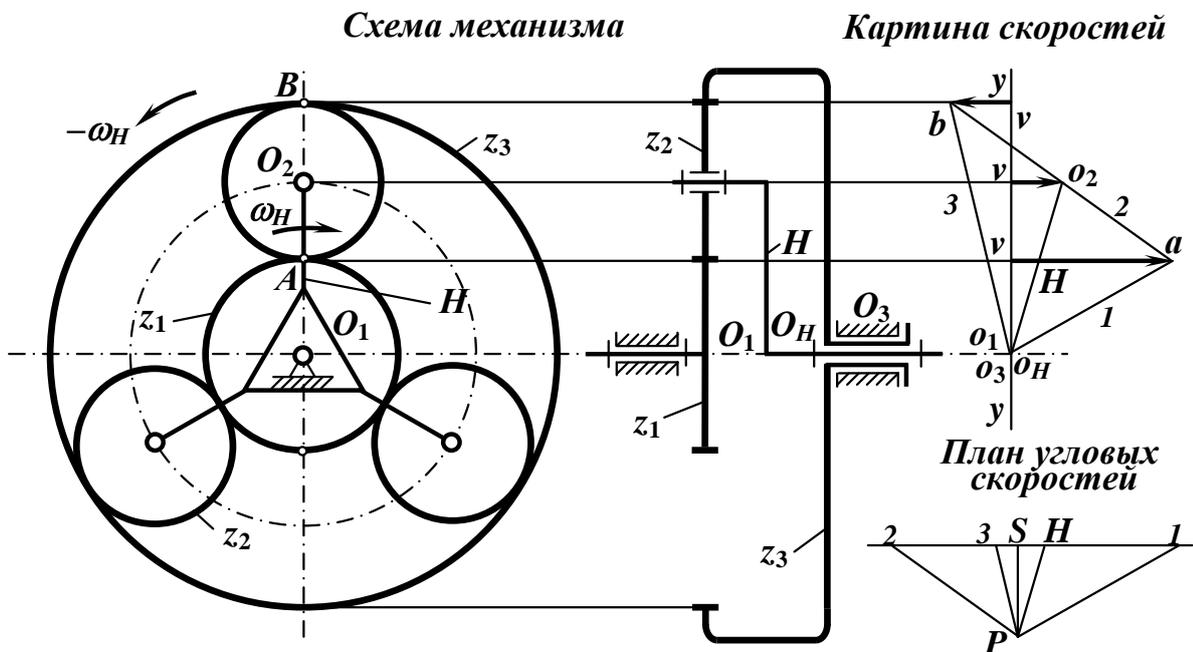


Рисунок 91 – Исследование дифференциального механизма

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}, \text{ знак "минус", так как внешнее}$$

зацепление одно. При заданных  $\omega_1$  и  $\omega_3$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$ , определяем  $\omega_H$ .

$$u_{12}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_2^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} - \text{внешнее зацепление. Из этого}$$

уравнения можно определить  $\omega_2$ , или можно найти из уравнения

$$u_{23}^H = \frac{\omega_2^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{z_3}{z_2} - \text{внутреннее зацепление.}$$

## 7.2 Планетарные механизмы. Графическое и аналитическое исследование

Если в дифференциальном механизме соединить со стойкой (остановить) эпициклическое зубчатое колесо  $z_3$ , то получится планетарный редуктор (рисунок 92) степень подвижности которого

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

где  $n = 3$ , число подвижных звеньев;

$p_5$  – число кинематических пар пятого класса  $p_5 = 3$ ;

$p_4$  – число пар четвертого класса  $p_4 = 2$ .

По формуле Виллиса

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}, \text{ но } \omega_3 = 0, \text{ тогда}$$

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -u_{1H} + 1, \quad \text{или} \quad \boxed{u_{1H} = 1 - u_{13}^H}.$$

(66)

В планетарном механизме передаточное отношение от любого колеса  $i$  ( $z_1$ ) к водилу  $H$  при неподвижном опорном колесе  $j$  ( $z_3$ ) равно единице, минус передаточное отношение от этого же колеса  $i$  к опорному в обратном движении колесу  $-j$ .

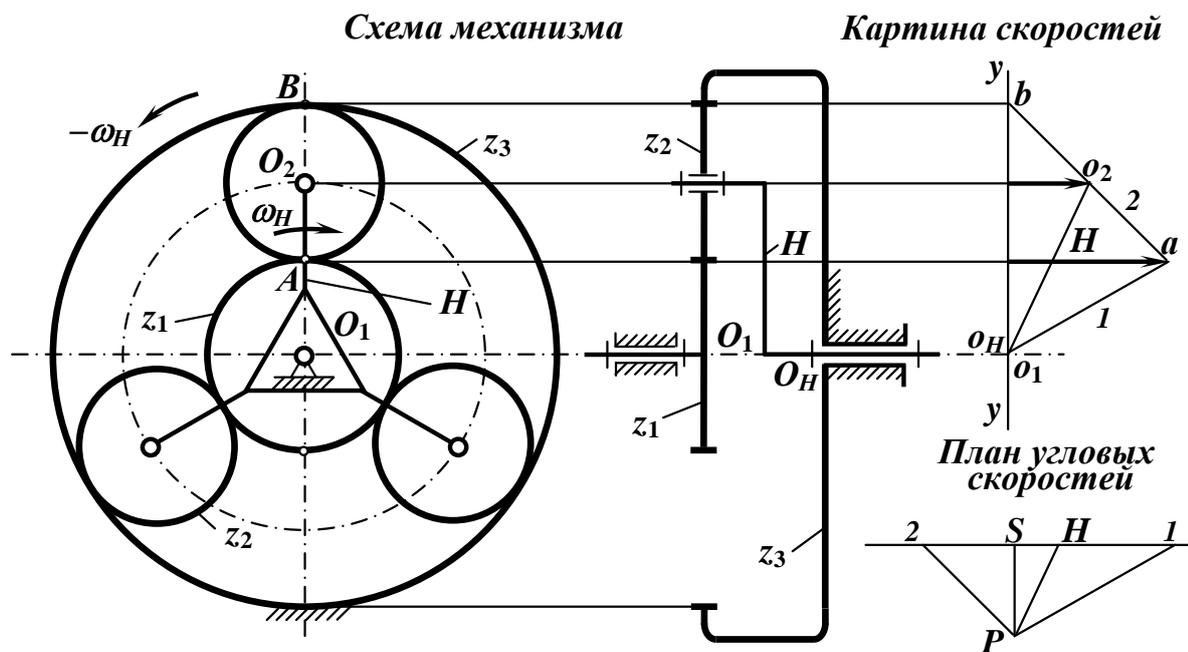


Рисунок 92 – Исследование планетарного механизма

Составляем уравнения передаточного отношения

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \text{ из этого уравнения}$$

при заданной  $\omega_1$  находим  $\omega_H$ .

$$u_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - u_{23}^H = 1 - \frac{z_3}{z_2}, \text{ отсюда определяем } \omega_2.$$

### 7.3 Подбор чисел зубьев планетарного редуктора

На рисунке 93 приведен планетарный механизм.

$r_1, r_2, r_3$  – радиусы начальных (делительных) окружностей,  
 $k$  – число сателлитов.

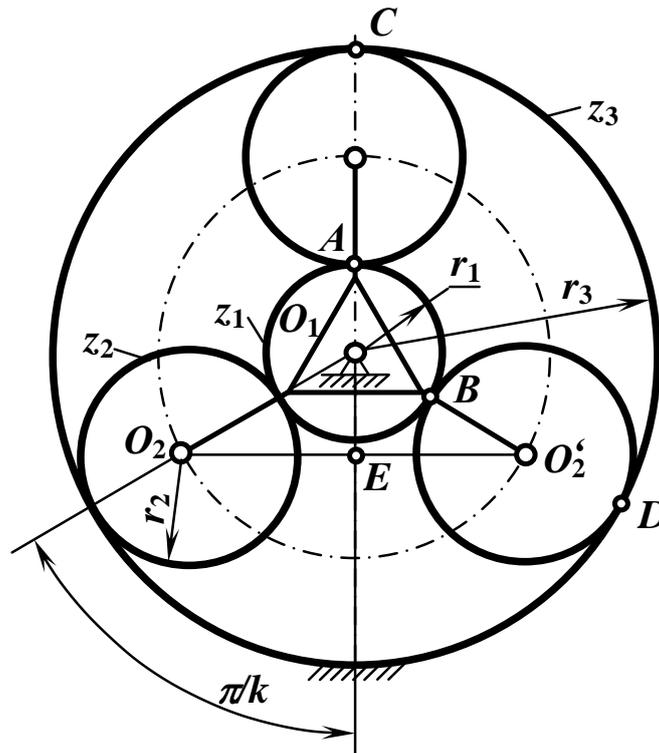


Рисунок 93 – Подбор чисел зубьев планетарного механизма

Для того, чтобы собрать планетарный механизм, необходимо соблюсти несколько условий:

1. Условие соосности

$$r_1 + 2r_2 = r_3, \quad m \frac{z_1}{2} + 2m \frac{z_2}{2} = m \frac{z_3}{2} \quad \text{или} \quad z_1 + 2z_2 = z_3, \quad \text{откуда}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}}.$$

2. Обеспечение заданного передаточного отношения

$$u_{1H} = 1 - u_{13}^H = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \quad u_{1H} z_1 = z_1 + z_3, \quad \text{откуда} \quad \boxed{z_3 = z_1(u_{1H} - 1)}.$$

3. Условие сборки

Длина дуги  $AB$

$$\cup AB = p \frac{z_1}{k} = p \cdot b_1 + c_1,$$

где  $p$  – шаг по делительной окружности, мм;

$b_1$  – целое число шагов;

$c_1$  – дуга по делительной окружности (меньше шага).

Длина дуги  $CD$

$$\cup CD = p \frac{z_3}{k} = p \cdot b_3 + c_3,$$

где  $b_3$  – также целое число шагов;  
 $c_3$  – дуга по делительной окружности.

Из этих формул определим  $z_1$  и  $z_3$

$$z_1 = k(b_1 + \frac{c_1}{p}) \text{ и } z_3 = k(b_3 + \frac{c_3}{p}), \text{ сложим их}$$

$$z_1 + z_3 = k(b_1 + b_3 + \frac{c_1 + c_3}{p}).$$

В левой части уравнения целое число, чтобы в правой части было целое число, необходимо, чтобы  $c_1 + c_3 = p$ . Отсюда, обозначив скобку за целое число  $c$ , получают

$$c = \frac{z_1 + z_3}{k}.$$

Отношение чисел зубьев колес и числа  $c$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : c &= z_1 : \frac{z_3 - z_1}{2} : [z_1(u_{1H} - 1)] : \frac{z_3 + z_1}{k} = \\ &= z_1 : \frac{z_1(u_{1H} - 1) - z_1}{2} : [z_1(u_{1H} - 1)] : \frac{z_1(u_{1H} - 1) + z_1}{k} = \\ &= 1 : \frac{(u_{1H} - 2)}{2} : (u_{1H} - 1) : \frac{u_{1H}}{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, генеральное уравнение для подбора чисел зубьев планетарного механизма

$$z_1 : z_2 : z_3 : c = 1 : \frac{(u_{1H} - 2)}{2} : (u_{1H} - 1) : \frac{u_{1H}}{k}.$$

#### 4. Условие “соседства”

Это условие заключается в том, что зуб одного сателлита не должен касаться зуба другого сателлита. На схеме механизма (рисунок 93) колеса изображаются начальными окружностями, а окружности выступов, которыми колеса могут касаться друг друга, на схемах не показываются, но их следует иметь в виду. Следовательно, межосевое расстояние между сателлитами должно быть больше, чем два радиуса окружностей выступов

$$O_2O_2' > 2r_{a2}.$$

Выразим эти размеры через модуль и числа зубьев, имея в виду, что модули сопряженных колес одинаковы

$$2(r_1 + r_2) \sin \frac{\pi}{k} > 2(r_2 + h_a^*); \left( \frac{m \cdot z_1}{2} + \frac{m \cdot z_2}{2} \right) \sin \frac{\pi}{k} > \frac{m}{2} (z_2 + 2h_a^*),$$

отсюда число сателлитов  $k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2h_a^*}{z_1 + z_2}}$ .

Условие “соседства” всегда соблюдается, если  $k = 2$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дворников Л.Т. Начала теории структуры механизмов: Учеб. пособие./Л.Т. Дворников. СибГГМА. – Новокузнецк, 1994. – 102 с.
2. Саруев Л.А. Теория механизмов и машин: учебно - методическое пособие /Л.А. Саруев. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 34 с.
3. Чебышев П.Л. О параллелограммах. Полн. собр. соч. Т. 4. Теория механизмов. – М., Изд-во АН СССР, 1948. С.16-36.
4. Малышев А.П. Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры.//Известия Томского технологического института, 1923, т. 44, вып 2. – 65 с.
5. Добровольский В.В. Основные принципы рациональной классификации.//Структура и классификация механизмов. – М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1939. С. 5-48.
6. Ассур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. /Л.В. Ассур – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 592 с.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов. /И.И. Артоболевский – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
8. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов/К.В. Фролов и др.; Под ред. К.В Фролова. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.
9. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справ. /Л.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1979. – 334 с.
10. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. /С.Н. Кожевников – М.: Машиностроение, 1996. – 584 с.
11. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Учеб. пособие. /А.С. Кореняко др.; Под ред. А.С. Кореняко. – Киев: Вища шк., 1970. – 330 с.
12. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. /Н.И. Левитский – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 576 с.
13. Горбенко В.Т., Горбенко М.В., Мальцев П.Т. и др. Теория механизмов и машин: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2001. – 132 с.
14. Коловский М.З., Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Слоущ А.В. Теория механизмов и машин: учебное пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. -560 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Цель и задачи "Теории механизмов и машин"</b> .....	3
<b>Глава 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ</b> .....	4
1.1 Основные понятия и определения .....	4
1.2 Степени свободы и условия связей .....	5
1.3 Основы теории кинематических пар по Дворникову Л.Т. ....	6
1.3.1 Геометрические элементы звеньев .....	6
1.3.2 Одноконттактные кинематические пары .....	14
1.3.3 Синтез многоконттактных кинематических пар .....	18
1.3.4 Критерии классификации кинематических пар .....	22
1.4 Условное изображение кинематических пар .....	24
1.5 Кинематические цепи .....	26
1.6 Универсальная структурная формула кинематической цепи (формула В.В. Добровольского) .....	27
1.7 Плоские механизмы или механизмы третьего семейства .....	28
1.8 Принцип образования механизмов по Ассуру Л.В. ....	29
1.9 Структурная классификация плоских механизмов .....	30
1.10 Порядок структурного анализа механизма .....	31
<b>Глава 2. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ</b> .....	33
2.1 Синтез структур кинематических цепей .....	34
<b>Глава 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ</b> .....	37
3.1 Задачи и методы кинематического анализа .....	37
3.2 Определение скоростей и ускорений при шарнирном соеди- нении звеньев .....	37
3.3 Определение скоростей и ускорений при соединении звеньев поступательной парой .....	38
3.4 Графо-аналитический метод исследования механизмов. Планы скоростей и ускорений звена, группы .....	39
3.5 Кинематика четырехшарнирного механизма .....	40
3.5.1 Построение плана положений механизма .....	40
3.5.2 Построение плана скоростей .....	41
3.5.3 Определение относительной угловой скорости в шарнирах ....	44
3.5.4 Построение плана ускорений .....	45
3.6 Кинематика кулисного механизма .....	47
3.6.1 Построение плана скоростей .....	47
3.6.2 Построение плана ускорений .....	50
<b>Глава 4. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ</b> .....	52
4.1 Силы, действующие на звенья механизма .....	52

4.2	Условие статической определимости кинематической цепи ....	54
4.3	Кинетостатика четырехшарнирного механизма .....	55
4.3.1	Кинетостатика структурной группы .....	56
4.3.2	Кинетостатика ведущего звена (определение уравнивающей силы, уравнивающего момента) .....	58
4.4	Кинетостатика кулисного механизма .....	60
4.4.1	Кинетостатика структурной группы .....	60
4.4.2	Кинетостатика ведущего звена .....	64
4.5	Приведенные силы и моменты сил .....	64
4.6	Рычаг Н.Е. Жуковского .....	65
4.7	Определение приведенных и уравнивающих сил методом Жуковского .....	68
<b>Глава 5. ДИНАМИКА МАШИН .....</b>		<b>70</b>
5.1	Режимы движения механизмов .....	70
5.2	Кинетическая энергия механизма .....	71
5.3	Приведенная масса и приведенный момент инерции масс механизма .....	72
5.4	Коэффициент полезного действия механизмов .....	73
5.4.1	Определение КПД при последовательном соединении механизмов .....	74
5.4.2	Определение КПД при параллельном соединении механизмов .....	74
5.5	Определение хода выходного звена .....	75
5.6	Определение приведенной силы сопротивления .....	76
5.7	Основные формы уравнения движения .....	78
5.8	Определение угловой скорости звена приведения по уравнению в форме кинетической энергии .....	79
5.9	Средняя скорость и коэффициент неравномерности .....	81
5.10	Определение коэффициента неравномерности по диаграмме $T = f(J_{np})$ .....	82
5.11	Задача постановки маховика .....	83
5.12	Определение момента инерции маховика методом Виттенбауэра .....	84
5.13	Определение угловой скорости ведущего звена после постановки маховика .....	87
5.14	Определение углового ускорения ведущего звена .....	88
<b>Глава 6. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ .....</b>		<b>89</b>
6.1	Классификация зубчатых передач .....	89
6.2	Основы теории зацепления .....	91
6.2.1	Основной закон зацепления .....	91
6.2.2	Эвольвента окружности и ее свойства .....	93
6.2.3	Уравнение эвольвенты в полярных координатах .....	94

6.2.4	Эвольвентное зацепление и его свойства. Основные определения .....	94
6.3	Геометрические размеры зацепления .....	98
6.4	Методы нарезания зубчатых колес .....	99
6.5	Исходный производящий реечный контур. Системы зацепления .....	100
6.6	Определение толщины зуба .....	102
6.7	Геометрический расчет зацепления .....	103
6.8	Определение геометрических размеров зубчатых колес, нарезанных со смещением исходного контура .....	105
6.9	Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия .....	106
6.9.1	Аналитическое определение коэффициента перекрытия .....	108
6.10	Подрезание зубьев эвольвентного профиля .....	108
6.11	Определение минимального числа зубьев .....	109
6.12	Определение минимального коэффициента смещения .....	110
6.13	Скорость скольжения .....	112
6.14	Удельное скольжение .....	113
6.15	Блокирующий контур .....	115
6.16	Определение передаточного отношения зубчатого механизма с неподвижными осями зубчатых колес .....	118
6.17	Графическое исследование зубчатых передач .....	121
<b>Глава 7. ЭПИЦИКЛИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ .....</b>		<b>124</b>
7.1	Дифференциальные механизмы. Аналитическое и графическое исследование .....	125
7.2	Планетарные механизмы. Аналитическое и графическое исследование .....	127
7.3	Подбор чисел зубьев планетарного редуктора .....	128
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>		<b>137</b>

