

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Зав. каф. высшей математики
и математической физики ТПУ
проф. д-р физ.-мат. наук

_____ А.Ю. Трифонов

“ _____ ” _____ 2007 г.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Методические указания и варианты контрольных работ
для студентов второго курса ФТФ и ЕНМФ всех специальностей

Томск 2007

УДК 581

Элементы комплексного анализа: методические указания и варианты контрольных работ для студентов второго курса ФТФ и ЕНМФ всех специальностей. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 28 с.

Составители:

канд. физ.-мат. наук

Н.В. Долгушева

И.Б. Самсонов

Рецензент

доц., канд. физ.-мат. наук

Л.И. Терехина

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ТПУ 30 ноября 2006 г., протокол № 88.

Зав. кафедрой ВММФ
проф. д-р физ.-мат. наук

_____ А.Ю. Трифонов

Одобрено учебно-методической комиссией ВММФ.

Председатель учебно-методической
комиссии доц., к-т физ.-мат. наук

_____ Л.И. Лазарева

Список теоретических вопросов

1. Определение комплексных чисел. Алгебраические операции с комплексными числами, их свойства. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа.
2. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Переведение чисел из одной формы записи с другую. Модуль и аргумент комплексного числа.
3. Последовательность комплексных чисел, предел последовательности. Понятие функции комплексного переменного. Предел функции, непрерывность.
4. Основные элементарные функции комплексного переменного: степенная функция, корень n -й степени, показательная функция, логарифмическая функция, показательностепенная функция, тригонометрические функции, гиперболические функции, обратные тригонометрические функции.
5. Кривые и области на комплексной плоскости. Способы задания кривых и областей.
6. Производная функции комплексного переменного, свойства производной. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.
7. Понятие аналитической функции. Правильные и особые точки функции. Восстановление аналитической функции по известной вещественной или мнимой части.
8. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного.
9. Интегрирование функции комплексного переменного. Свойства интеграла. Интеграл $\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z^n}$.
10. Теорема Коши. Независимость интеграла от пути интегрирования.
11. Интегрирование аналитических функций, первообразная. Общая теорема Коши.
12. Интеграл Коши для односвязных и не односвязных областей.
13. Интеграл типа Коши. Связь между производной и интегралом от аналитической функции.
14. Принцип максимума модуля. Теорема Лиувилля.
15. Ряды комплексных чисел. Абсолютная и условная сходимость. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости.
16. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
17. Свойства сходящихся степенных рядов. Ряд Тейлора.
18. Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Разложение функции в ряд Лорана.
19. Понятие правильных и особых точек функции комплексного переменного. Изолированные особые точки. Классификация изолированных особых точек. Бесконечно удаленная особая точка.
20. Вычет функции комплексного переменного. Значение вычета в изолированной особой точке. Основная теорема вычетов.
21. Вычисление вычета в устранимой особой точке, в простом и кратном полюсе, в существенно особой точке.
22. Вычет в бесконечно удаленной точке (случай устранимой особой точки, нуль порядка m , полюс порядка m). Сумма вычетов во всех особых точках.
23. Приложение теории вычетов. Интегралы от тригонометрических функций. Несобственные интегралы от дробно-рациональных функций.
24. Приложение теории вычетов. Интегралы от осциллирующих функций. Интегралы Бромвича-Вагнера.

Контрольная работа № 1

Вариант 1.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 13 - i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{i^6 + i^8 + i^{16} + i^{18}}{2i - 4} + i^{12}.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{2+i\pi/2} + e^{2-i\pi/2}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \frac{(1+i)^9}{(3-\sqrt{3}i)^6}.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Вариант 2.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{i^3 + i^5 + i^9 + i^{19}}{(1+i)^2} - 2i.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{-3+i\pi/3} - e^{-3-i\pi/3}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \cdot (2i)^7.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 - 2 + 2\sqrt{3}i = 0.$$

Вариант 3.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{i^{16} + i^{18} + i^{20} + i^{26}}{3i(4 + 8i)(20 + 35i)}.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 4e^{-i\pi/3} + 4e^{i\pi/3}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{2\sqrt{2} + 2i}{2\sqrt{2} - 2i} \right)^5.$$

5. Решить уравнение

$$z^4 - 5i = 0.$$

Вариант 4.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \left(\frac{4 + i}{4 - i} + \frac{4 - i}{4 + i} \right) i^9.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 2e^{-i\pi/2} - 2e^{i\pi/2}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)^6}{(1 + \sqrt{3}i)^3}.$$

5. Решить уравнение

$$z^4 + 36 = 0.$$

Вариант 5.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = -3 - 5i$, $z_2 = -3 + 7i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16}}{1 + 4i} - 1 + 2i.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 4e^{i\pi/4} + 4e^{-i\pi/4}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{3\sqrt{3} + 3i}{1 + i} \right)^6.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 + 27i = 0.$$

Вариант 6.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = -2 + 8i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = 4i - 1 - \frac{3i + 5i^2}{2i^4(1 - i)}.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 3e^{-i\pi/4} - 3e^{i\pi/4}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \frac{(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^4}{(1 + i)^3}$$

5. Решить уравнение

$$z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

Вариант 7.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 4i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(1 + 2i)i^3}{(4 - i)(-i^6 + 2i)} - 1 + i.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 5e^{-i\pi/6} + 5e^{i\pi/6}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = (4 - \sqrt{48}i)^3(\sqrt{3} + i)^2.$$

5. Решить уравнение

$$z^2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0.$$

Вариант 8.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = -3 - 5i$, $z_2 = 3 + 7i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(1 - 2i)^3}{1 - i} + i^3(1 + i).$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 10e^{i\pi/6} + 10e^{-i\pi/6}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \frac{(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^4}{(1 + i)^3}.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 + 125 = 0.$$

Вариант 9.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 - 8i$, $z_2 = 3 - 5i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{3i}{(4-i)(4+i^5)} - (2-3i).$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{4-2i\pi/3} + 4e^{4+2i\pi/3}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} + i} \right)^7.$$

5. Решить уравнение

$$z^4 - 216i = 0.$$

Вариант 10.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 8 - 2i$, $z_2 = 4 + i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(i^{16} + i^{18} + i)(2 + 2i)}{3 - i} + 5i.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{i5\pi/6-7+i2\pi/3}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8} \right)^{12} (\sqrt{3} - i)^3.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 - 2\sqrt{2} + 2i = 0.$$

Вариант 11.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 2 - i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{2i + 4}{3i^7(1 - i)} + 5i(1 - i).$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 8e^{-i5\pi/4} - 8e^{i5\pi/4}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6)}{2i} \right)^3.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 + 1 = 0.$$

Вариант 12.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 5 + i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} i^5 + 2 - i\sqrt{3}.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{2+i\pi/2-i3\pi/4}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^8 (2 - 2i)^3.$$

5. Решить уравнение

$$z^4 + 256 = 0.$$

Вариант 13.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 5 + i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(2 - 2i)}{(1 + i)(1 - i^7\sqrt{3})} - (1 + i^5).$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{4-i\pi/3} - e^{4+i\pi/3}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\cos \frac{9\pi}{16} - i \sin \frac{9\pi}{16} \right)^{-5} i^7.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 + 8 = 0.$$

Вариант 14.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 7 + i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 - i\sqrt{3})}{(2 + 3i)i^7} + 3i.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = e^{3-i\pi/4+i5\pi/4}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \frac{i^7}{(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^5}.$$

5. Решить уравнение

$$z^4 - \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Вариант 15.

1. Даны два комплексных числа $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 5 - i$. Найти

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Записать комплексное число в алгебраической форме

$$z = \frac{(10 - 4i)(3 - 8i)}{(2 - 2i)^2} + i^5 - 10i^7.$$

3. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$z = 10e^{i11\pi/6} - 10e^{-i11\pi/6}.$$

4. Представить комплексное число в показательной и тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

$$z = \left(\frac{\cos \pi/8 - i \sin \pi/8}{2i} \right)^4.$$

5. Решить уравнение

$$z^3 - \sqrt{3} - i = 0.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 1.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\operatorname{ch}\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right).$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Re} z = 1$ при отображении $f(z) = z^2$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = x^4 - 8x^3y + 8xy^3 - 6x^2y^2 + y^4.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2 + i$ при отображении

$$f(z) = \frac{z}{z + i}.$$

6. Решить уравнение $\cos(z + i) = 1$.

Вариант 2.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right).$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$ при отображении $f(z) = 1/z$.

3. Построить область, заданную соотношениями

$$|z - i| < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + x.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = i$ при отображении

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

6. Решить уравнение $\sin z = 3$.

Вариант 3.

1. Представить комплексное число $\sin 2i$ в алгебраической форме

2. Найти образ линии $\operatorname{Re} z = 1$ при отображении

$$f(z) = \frac{z}{z+1}.$$

3. Построить область, заданную соотношениями

$$1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = i$ при отображении

$$f(z) = z^2 + 2z.$$

6. Решить уравнение $\operatorname{sh}(iz) = -i$.

Вариант 4.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\operatorname{sh}\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right).$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Re} z = 1$ при отображении

$$f(z) = \frac{1}{z+1+i}.$$

3. Построить область, заданную соотношением

$$3|z| - \operatorname{Re} z < 2.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = 2xy + y.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2 + i$ при отображении

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

6. Решить уравнение $\cos z = 2$.

Вариант 5.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^i.$$

2. Найти образ линии $|z + i| = 1$ при отображении

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

3. Построить область, заданную соотношением

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} < 1.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - x.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = \pi i/2$ при отображении $f(z) = \operatorname{ch} z$.

6. Решить уравнение

$$e^{2z} + 2e^z - 3 = 0.$$

Вариант 6.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$(-i)^{5i}.$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Re} z = \pi/4$ при отображении $f(z) = \cos z$.

3. Построить область, заданную соотношениями

$$|z - 1| < 1, \quad \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad \arg(z - 1) > \frac{\pi}{4}.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = y^3 - 3x^2y.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2\pi$ при отображении

$$f(z) = \sin z.$$

6. Решить уравнение

$$4 \cos z + 5 = 0.$$

Вариант 7.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\sin(2 + i).$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Im} z = \pi/4$ при отображении $f(z) = \cos z$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$\operatorname{Re} \frac{i}{z} > 2.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = 2xy + 3x.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2i$ при отображении

$$f(z) = \ln(z + 2).$$

6. Решить уравнение

$$\sin(z + 1) = 2i.$$

Вариант 8.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$2^{1-i}.$$

2. Найти образ линии $\operatorname{Re}(z - i) = 2$ при отображении $f(z) = (z - 1)^2$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$|z - 3| - |z + 3| > 4.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2 + i$ при отображении

$$f(z) = \frac{z}{z + i}.$$

6. Решить уравнение

$$\sin z = \pi i.$$

Вариант 9.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\ln(\sqrt{3} - i).$$

2. Найти образ линии $x = y$ при отображении $f(z) = z^2$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$|z| > 2 + \operatorname{Im} z.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = e^x \cos y.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 1 + i$ при отображении

$$f(z) = 2z^2 - 8z + 1.$$

6. Решить уравнение

$$\sin z + \cos z = 2.$$

Вариант 10.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$(-2)^{\sqrt{-1}}.$$

2. Найти образ линии $z = (1 + i)t, -\infty < t < \infty$, при отображении $f(z) = z^3$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$\operatorname{Im} z^2 < 1.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = 3x^3 - 9xy^2 - y + 2.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = 4\pi i$ при отображении

$$f(z) = \frac{1}{e^z}.$$

6. Решить уравнение

$$\cos z = \operatorname{ch} z.$$

Вариант 11.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right).$$

2. Найти образ линии $\arg z = \pi/4$ при отображении $f(z) = 1/z$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 3x.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = \pi i$ при отображении

$$f(z) = \operatorname{ch} z.$$

6. Решить уравнение $\operatorname{ch} z = i$.

Вариант 12.

1. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\operatorname{th}\left(\ln 3 + i\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Найти образ линии $\arg z = a$ при отображении $f(z) = z^2$.

3. Построить область, заданную соотношением

$$\operatorname{Re}(iz)^2 > 0.$$

4. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = (e^x + e^{-x}) \sin y.$$

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения в точке $z_0 = i$ при отображении

$$f(z) = \frac{3z}{z+1}.$$

6. Решить уравнение

$$\sin z = i \operatorname{sh} z.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1.

1. Вычислить

$$\int_L \operatorname{Im} z^3 dz,$$

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 + 2i$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{dz}{z^3(z-2)^2},$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1$, б) $|z - 2i| = 1$, в) $|z| = 3$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \sin \frac{z+i}{z-i}, \quad z_0 = i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 1 - 3i$.

Вариант 2.

1. Вычислить

$$\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$$

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = i$ и $z_2 = 2 - 2i$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{e^z}{z^2(z^2 + 1)} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z - i| = 1/2$, в) $|z| = 3/2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \sin \frac{z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = -2 + i$.

Вариант 3.

1. Вычислить

$$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz,$$

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{\operatorname{ch} z^2}{(i - z)z^2} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z| = 3/2$, в) $|z - i| = 1/2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = z \sin \frac{z}{z - 2i}, \quad z_0 = 2i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{4z - 8}{z^2 + 2z - 3}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = -1 - 2i$.

Вариант 4.

1. Вычислить

$$\int_L (z - |z|) dz,$$

где L – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{e^z - 1}{z^3(z - 1)} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z - 1| = 1/2$, в) $|z| = 2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \cos \frac{3z}{z - i}, \quad z_0 = i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 2 + 2i$.

Вариант 5.

1. Вычислить

$$\int_L z^2 \operatorname{Im} z \, dz,$$

где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 - 2i$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{z + 3}{z(z - 1)^2(z + 1)} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z - 1| = 1/2$, в) $|z| = 3$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = e^{2z}, \quad z_0 = \pi i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = -1 - 3i$.

Вариант 6.

1. Вычислить

$$\oint_L |z| dz,$$

где L – контур $|z - i| = 1$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{2z - 1 + i}{(z - 1)(z - i)} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z - 1| = 1/2$, в) $|z| = 2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = e^{\frac{z-3}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 1 + 2i$.

Вариант 7.

1. Вычислить

$$\int_L \frac{dz}{z^2},$$

где L – полуокружность $|z| = 1$, $\text{Im } z \geq 0$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z-i| = 1$, б) $|z-1| = 1$, в) $x^2+y^2-2x-2y = 0$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \text{ch}(3z - 12), \quad z_0 = i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 1 + 3i$.

Вариант 8.

1. Вычислить

$$\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где L – полуокружность $|z| = 1$, $\text{Im } z \geq 0$, а $\sqrt{1} = 1$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{dz}{(z^2+1)^2},$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z-i| = 1$, б) $|z+i| = 1$, в) $|z-1| = 2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \text{sh}(2z + 3), \quad z_0 = 2 - i.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 2 + i$.

Вариант 9.

1. Вычислить

$$\oint_L (z^2 + 20z + 9) dz,$$

где L – окружность $|z| = R$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{e^z - 1}{(z - i)^2 z} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $|z - i| = 1/2$, в) $|z - i| = 2$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \sin^2(z/4), \quad z_0 = 0.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 1 - 2i$.

Вариант 10.

1. Вычислить

$$\oint_L z \bar{z} dz,$$

где L – окружность $|z| = 1$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{\sin z}{(z - i)^5} dz,$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z| = 1/2$, б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$$f(z) = \sin 3z \cos z, \quad z_0 = 0.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z - 2}{(z + 1)(z - 3)}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 3 + i$.

Вариант 11.

1. Вычислить

$$\int_L \operatorname{Re} z \, dz,$$

где L – отрезок заданный параметрически $z = (2 + i)t$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{\cos z \, dz}{(z - 2)(z^2 + 9)},$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z - 2| = 1$, б) $|z - 3i| = 1$, в) $|z| = 4$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням
- $z - z_0$
- функцию

$$f(z) = \cos(2z + 1), \quad z_0 = -1.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = (1 - 3i)/2$.

Вариант 12.

1. Вычислить

$$\int_L \frac{\ln z}{z} dz$$

где L – дуга единичной окружности от точки $z = 1$ до точки $z = i$.

2. Вычислить

$$\oint_L \frac{dz}{(z^2 - 1)^2},$$

где L – контур, заданный уравнением а) $|z - 1| = 1$, б) $|z + 1| = 1$, в) $|z - 1| = 4$.

3. Разложить в ряд Лорана по степеням
- $z - z_0$
- функцию

$$f(z) = \operatorname{sh}(3z + 6), \quad z_0 = -1.$$

4. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - 9}$$

по степеням $z - z_0$, если $z_0 = 4 + i$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1} dz.$$

2.
$$\oint_{|z+1|=2} z \exp \frac{2}{z+1} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 3\sqrt{7} \sin t}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

5.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9}.$$

Вариант 2.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z-2i|=1/2} \frac{dz}{z^2(z-2i)^2(z-i)}.$$

2.
$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

5.
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 25}.$$

Вариант 3.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z+\pi)^3} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=2/3} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2+4} dx.$$

5.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\sqrt{2} \sin t}.$$

Вариант 4.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z-i|=2} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=1} \left(iz \cos \frac{1}{z} - e^{\frac{1}{z}} \right) dz.$$

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}.$$

4.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t}.$$

5.
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

Вариант 5.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

5.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36} dx.$$

Вариант 6.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=r} (z-3)e^{2/z} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx.$$

5.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx.$$

Вариант 7.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z} \cos \frac{3}{z} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx.$$

5.
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+16} dx.$$

Вариант 8.

Вычислить интегралы

1.
$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz.$$

2.
$$\oint_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{z} dz.$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}.$$

4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

5.
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+5} dx.$$

Вариант 9.

Вычислить интегралы

1. $\oint_{|z-3|=2} \frac{(z-2)dz}{(z^2-9)(z+5)}$.
2. $\oint_{|z-i|=1/4} (z-i) \exp \frac{1}{z-i} dz$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3} \sin t - 7}$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Вариант 10.

Вычислить интегралы

1. $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{(z-2i)^5} dz$.
2. $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(z-i)}{(z-i)^4} dz$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5}$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 12}$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 20} dx$.

Вариант 11.

Вычислить интегралы

1. $\oint_{|z|=5/2} \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z+2i)(z^2-9)}$.
2. $\oint_{|z+2|=1} (z^2+4z) \cos \frac{3}{z+2} dz$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t}$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+10) dx}{x^2+4}$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x) \sin x dx}{x^4 + 13x^2 + 36}$.

Вариант 12.

Вычислить интегралы

1. $\oint_{x^2/9+y^2/4=1} \frac{\sin z}{(z-\pi i/2)^3} dz$.
2. $\oint_{|z-i|=1/2} (z-i)^3 \cos \frac{1}{z-i} dz$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - \sqrt{21} \sin t}$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Список литературы

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – 672 с.
2. Терехина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика, часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционный метод.* Учебное пособие. – Томск, ТПУ, 2002. – 262 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973.
4. Свешиков А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1974.
5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* – М: Наука, 1989. – 480 с.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Методические указания и варианты контрольных работ
для студентов второго курса ФТФ и ЕНМФ всех специальностей

Составители: Надежда Васильевна Долгушева
Игорь Борисович Самсонов

Подписано к печати
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд. л. 1,63.
Тираж экз. Заказ . Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.