Лекция № 5

Классификация систем массового обслуживания

СМО, как и любые другие явления и объекты, необходимо классифицировать. И такая классификация проводится по нескольким критериям.

I. По числу обслуживающих каналов:
1. *Одноканальные СМО* — СМО с одним каналом обслуживания.
2. *Многоканальные СМО* — СМО с несколькими каналами обслуживания.

II. По времени пребывания требований в очереди до начала обслуживания:
1. *СМО с отказами* — это СМО, в которой заявка, поступающая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует (например, телефонная сеть, в которой заявка на телефонный разговор покидает СМО в том случае, когда канал занят).
2. *СМО с ожиданиями* (очередью) — это СМО, в которой заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

В свою очередь СМО с ожиданием (очередью) подразделяются на:
— *СМО с ограниченной очередью*.
— *СМО с неограниченной очередью*.
— *СМО с ограниченным временем ожидания* — поступившее требование, застав все устройства занятыми, становятся в очередь и ожидает обслуживания в течение ограниченного времени. Не дождавшись обслуживания в установленное время, требование покидает систему.
— *СМО с неограниченным временем ожидания*.

III. По приоритетности обслуживания:
1. *СМО со статистическим приоритетом* — СМО, в которой обслуживание производится в порядке поступления заявок.
2. *СМО с относительным приоритетом* — СМО, в которой заявка высокого приоритета ожидает окончания обслуживания заявки с более низким приоритетом (такие СМО, где более важная заявка получает лишь «лучшее» место в очереди).
3. *СМО с абсолютным приоритетом* — СМО, в которой заявка высокого приоритета при поступлении вытесняет заявку с более низким приоритетом.
4. *СМО со смешанным приоритетом* — СМО, в которой используется абсолютный приоритет, если заявка с низшим приоритетом *обслуживалась* в течении времени, *меньше* критического, и используется относительный приоритет в противном случае[1].

IV. По принципу (дисциплине) обслуживания:
1. *СМО с обслуживанием по принципу «первый пришел – первый обслужен»* (FIFO, FCFS – First Came – First Served, очередь).
2. *СМО* с *обслуживанием по принципу «первый пришел – последний обслужен»* (FILO, стек, «*последним пришел – первым обслужен»*, *LCFS – Last Came – First Served*).

[1] Критерий вытеснения может быть и другим.

3. *Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью обслуживания* (SPT/SJE).
4. *Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью дообслуживания* (SRPT).
5. *Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью обслуживания* (SEPT).
6. *Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью дообслуживания* (SERPT).

V. В зависимости от способа генерации заявок:
1. *Открытые СМО* — СМО, поток заявок не зависит от СМО.
2. *Замкнутые СМО* — СМО, где обслуживается ограниченный круг клиентов, а число заявок может существенно зависеть от состояния СМО (например, бригада слесарей-наладчиков, обслуживающих станки на заводе).

(схема 1)

Случайные процессы. Граф состояний. Марковские процессы

Процесс называется *процессом с дискретными состояниями,* если его возможные состояния S_1, S_2, S_3… можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком).

Процесс называется *процессом с непрерывным временем,* если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания заявки).

Пример 1.

Рассмотрим систему S, представляющую собой компьютер. В каждый момент времени компьютер может находиться в одном из состояний:

$\mathbf{S_1}$ — компьютер исправен, решает задачу;

$\mathbf{S_2}$ — компьютер исправен, не решает задачу;

$\mathbf{S_3}$ — компьютер неисправен, факт неисправности не установлен;

$\mathbf{S_4}$ — факт неисправности установлен, ведется поиск неисправности;

$\mathbf{S_5}$ — ремонтируется.

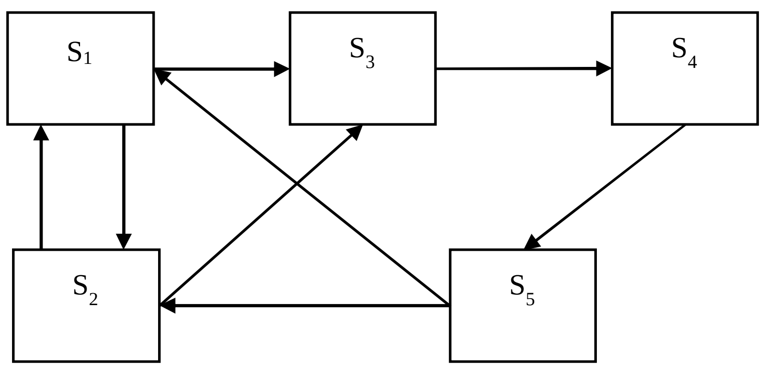

Рис. 3. Граф состояний работы компьютера

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы — марковский.

Пример 2.

Примером марковского процесса может служить система S — счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент t_0 счетчик показывает $\mathbf{S_0}$. Вероятность того, что в момент $t>t_0$ счетчик покажет то или иное число километров (точнее, соответствующее число рублей) $\mathbf{S_1}$, зависит от $\boldsymbol{S_0}$, но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента t_0.

Многие процессы можно *приближенно* считать марковскими.

Пример 3.

Например, процесс игры в шахматы; система S — группа шахматных фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент t_0. Вероятность того, что в момент $t>t_0$ материальный перевес будет на стороне одного из противников, зависят в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента t_0.

Потоки событий

Под *потоком событий* понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов компьютера, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется *интенсивностью* λ — частотой появления событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda (t)= \lambda$.

Поток событий называется *потоком без последствия*, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий называется *простейшим* (или *стационарным пуассоновским)*, если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия. *Регулярный* поток *не является простейшим*, так как обладает последствием: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

Утверждение. При наложении (суперпозиции) достаточно большого числа $\boldsymbol{n}$ независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i (i=1, 2,…, n) получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ равный сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (1)$$

Пусть случайная величина X выражает число событий (точек), попадающих на произвольный промежуток времени τ (рассматривается простейший поток событий). Тогда, вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий определяется по закону Пуассона и равна

$$P(X = m) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (2)$$

где $\lambda\tau = a$ — является математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X.

В частности, вероятность того, что за время x не произойдет ни одного события *(m=0)*, равна

$$P(X = 0) = e^{-\lambda\tau}. \quad (3)$$

Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем по данным ***примера 1***.

Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в состояние S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i,j=1, 2, 3, 4, 5).

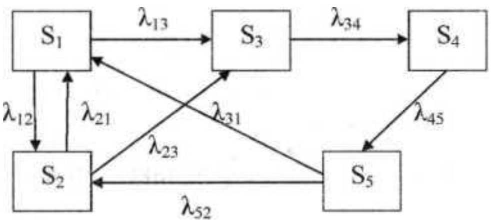

Рис. 4. Граф состояний работы компьютера с интенсивностями переходов из состояния в состояние

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента времени t сумма всех вероятностей $p_i(t)$ равна единице:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i(t) = 1. \quad (4)$$

Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в предельном стационарном режиме, т.е. при $t \to \infty$, которые называются предельными (финальными) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Для определения предельных вероятностей необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1 \\ p_j = \lambda_{1j} p_1 + \cdots + \lambda_{mj} p_m, \end{cases} \quad (5)$$

где j=1, 2, …, m.

Преобразовать к другому виду пользуясь следующим *правилом:*

слева в уравнениях стоит предельная вероятность i-го состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного i-го состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состоянии, из которых эти потоки исходят. Для данного примера система уравнений будет иметь

$$
\begin{cases}
p_1 + p_2 + +p_3 + p_4 + p_5 = 1 \\
p_1(\lambda_{12} + \lambda_{13}) = p_2\lambda_{21} + p_5\lambda_{51} \\
p_2(\lambda_{21} + \lambda_{23}) = p_1\lambda_{12} + p_5\lambda_{52} \\
p_3\lambda_{34} = p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23} \\
p_4\lambda_{45} = p_3\lambda_{34} \\
p_5(\lambda_{52} + \lambda_{51}) = p_4\lambda_{45}
\end{cases}, \qquad (5)
$$

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*.

Процессы гибели и размножений

В теории массового обслуживания широко распространен специальный класс случайных процессов — так называемые *процессы гибели и размножения*. Название это связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения представлен на рисунке 5.

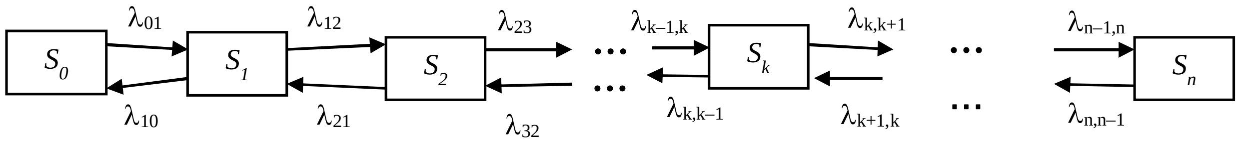

Рис. 5. Граф состояний процесса гибели и размножения

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы S_0, S_1, S_2, … , S_k, …, S_n. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы либо в состояние S_{k-1} либо в состояние S_{k+1}. Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k,k+1}$.

По графу, представленному на рис. 5 , составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний (их существование вытекает из возможности перехода из каждого состояния в каждое другое и конечности числа состояний).

В соответствии с правилом составления таких уравнений получим:

для состояния S_0: $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$, (7)

для состояния S_1: $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_{05} + \lambda_{21}p_2$, (8)

которое с учетом (7) приводится к виду: $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$ (9)

Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1 \\
\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1 \\
\cdots \\
\lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k \\
\cdots \\
\lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n
\end{cases}, \qquad (5)
$$

к которой добавляется нормировочное условие:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1. \qquad (10)$$

Решая систему (11) и (12), можно получить:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \qquad (12)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \qquad (13)$$

Пример.

Три одинаковых узла образуют техническое устройство. Каждый из узлов может оказаться в неисправном состоянии. Отказавший узел сразу приступает к восстановлению.

Состояния системы:

S_0 — три узла в рабочем состоянии;

S_1 — один узел неисправен (состояние восстановления), два в рабочем состоянии;

S_2 — два узла восстанавливаются, два в рабочем состоянии;

S_3 — три узла в неисправленном состоянии.

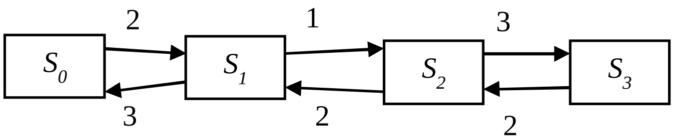

Рис. 6. Граф состояний для системы «техническое устройство»

Граф иллюстрирует, что процесс, который существует в системе, можно назвать процессом размножения и гибели. (Решение: p_0=0,4; p_1≈0,27; p_2≈0,13; p_3=0,2).

Одноканальная СМО с отказами

Один канал. Поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживании имеет интенсивность μ. Все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будут простейшими. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Показателей эффективности одноканальной СМО с отказами:

A — абсолютную пропускную способность СМО;

Q — относительную пропускную способность;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа.

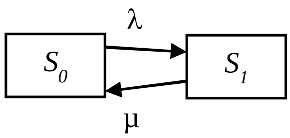

Рис. 7. Одноканальная СМО с отказами

S_0 — канал обслуживания свободен;

S_1 — канал обслуживания занят;

λ — интенсивность потока заявок;

μ — интенсивность потока обслуживания.

В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}, \qquad (14)$$

т.е. система вырождается в *одно уравнение*.

Учитывая, $p_0 + p_1 = 1$, предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (15)$$

$$Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (16)$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = \lambda Q. \qquad (17)$$

Пример.

В парикмахерской работает один мастер. Время обслуживания распределено по показательному закону со средним 10 мин. Клиент, пришедший в парикмахерскую, когда мастер занят, не ожидает обслуживания, а покидает парикмахерскую. Поток клиентов — простейший с интенсивностью 8 клиентов/ч. Найти показатели эффективности работы данной парикмахерской.

(относительная пропускная способность Q=0,38; вероятность отказа в обслуживании составит $P_{\text{ОТК}}$=0,62; абсолютная пропускная способность СМО A=8 0,38=3,04, то есть в среднем в час будут обслужены 3 клиента.)

Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим классическую *задачу Эрланга*.

Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

A — абсолютную пропускную способность СМО;

Q — относительную пропускную способность;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа;

$\bar{k}_{зан}$ — среднее число занятых каналов.

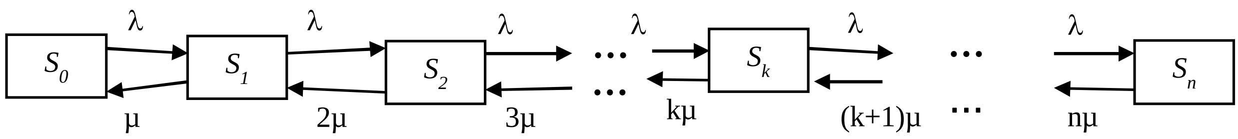

Рис. 8. Многоканальная СМО с отказами

S_0 — все каналы свободны, $k = 0$;

S_1 — занят только один канал, $k = 1$;

S_2 — заняты только два канала, $k = 2$;

………

S_k — заняты k каналов;

………

S_n — заняты все n каналов.

Предельные вероятности задаются формулами Эрланга:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (18)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ интенсивность нагрузки канала,

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{19}$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{20}$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{21}$$

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right), \tag{22}$$

$$\bar{k}_{\text{зан}} = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \tag{23}$$

Пример.

Рассматривается работа автозаправочной станции (АЗС) с *тремя* заправочными колонками. Если заняты все три колонки, то машина не встает в очередь, а покидает АЗС. Среднее время заправки автомобиля 3 мин. Интенсивность потока автомобилей — 0,25 ед/мин. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы АЗС.

(В предельном стационарном режиме 47,6% времени АЗС *не работает* из-за отсутствия заявок (простаивает); 35,7% времени занято только одна колонка; 13,4% времени занято две колонки; 3,3% времени занято три колонки. Вероятность отказа в обслуживании $P_{\text{отк}} = p_3 = 0{,}033$. Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания): $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$. Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q = 0{,}25 \bullet 0{,}967 = 0{,}242$. Среднее число занятых каналов: $\bar{k}_{\text{зан}} = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}242}{1/3} = 0{,}725$. В *трехканальной* СМО среднее число занятых каналов *меньше одного*. Эффективно ли это?)

Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает *простейший* поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная *показательному* закону распределения.

Поток обслуживания является простейшим *пуассоновским* потоком событий.

Показатели эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди:

A — абсолютную пропускную способность СМО;

Q — относительную пропускную способность;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа;

$L_{\text{сист}}$ — среднее *число* находящихся в системе *заявок*;

$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{\text{оч}}$ — средняя длина очереди;

$T_{\text{оч}}$ — среднее время ожидания в очереди.

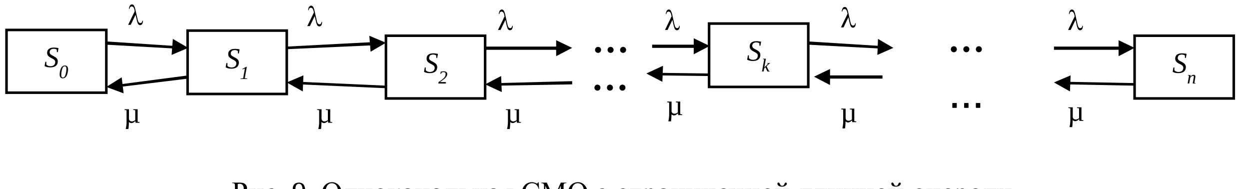

Рис. 9. Одноканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 — канал обслуживания свободен;

S_1 — канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 — канал обслуживания занят, в очереди стоит **1** заявка;

………

S_m — канал обслуживания занят, в очереди все m заявок, любая следующая заявка получает отказ.

Вероятности состояний определяются уравнениями:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1}. \tag{24}$$

Отсюда получаем, что если $\rho \neq 1$, то

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \tag{25}$$

Тогда остальные предельные вероятности находятся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \dots, p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0. \tag{26}$$

Если же $\rho = 1$, то

$$p_0 = \frac{1}{m+2}. \tag{27}$$

Остальные показатели системы:

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0, \tag{28}$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} p_0, \tag{29}$$

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_0), \tag{30}$$

$$L_{\text{сист}} = \sum_{n=0}^{m+1} n p_n, \tag{31}$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}, \tag{32}$$

$$L_{\text{оч}} = \begin{cases} \rho^2 \frac{1-\rho^m(m-mp+1)}{(1-\rho)^2} p_0, \text{если } \rho \neq 1 \\ \frac{m(m+1)}{2(m+2)}, \text{если } \rho = 1 \end{cases}, \tag{33}$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}. \tag{34}$$

Пример.

Автозаправочная станция (АЗС) представляет собой СМО с одним каналом обслуживания (одной колонкой).

Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более пяти машин одновременно ($m = 5$). Если в очереди уже *находятся пять машины*, очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 2$ (машина в минуту). Интенсивность потока обслуживания составляет $\mu = 2$.

Определите характеристики СМО и сделайте вывод об эффективности ее работы.

Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная *показательному* закону распределения. Поток обслуживания является простейшим *пуассоновским* потоком событий.

Когда все n каналов заняты, заявка становится в очередь и ожидает обслуживания. Количество мест в очереди m. Показатели эффективности одноканальной СМО с *ограниченной длиной очереди*:

A — абсолютную пропускную способность СМО;
Q — относительную пропускную способность;
$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа;
$P_{\text{оч}}$ — вероятность образования очереди;
$\bar{k}_{зан}$ — среднее число занятых каналов;
$L_{\text{сист}}$ — среднее число находящихся в системе заявок;
$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
$L_{\text{оч}}$ — средняя длина очереди;
$T_{\text{оч}}$ — среднее время ожидания в очереди.

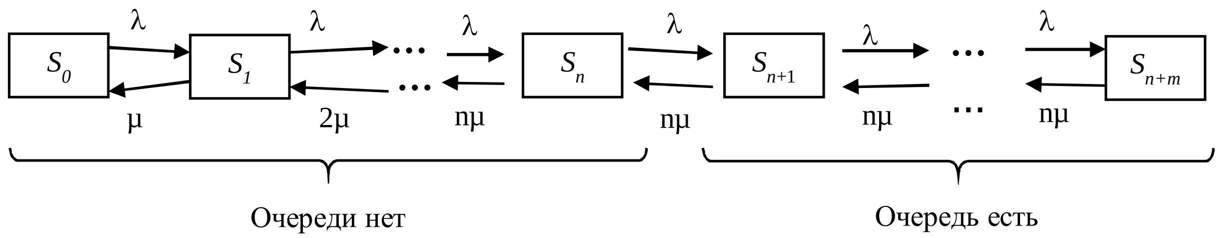

Рис. 10. Многоканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 — все каналы свободны, $n = 0$;
S_1 — занят только один канал, $n = 1$;
………
S_n — заняты все n каналов.

S_{n+1} — заняты все n каналов и одна заявка в очереди;
………
S_{n+m} — заняты все n каналов и все m мест в очереди.

Предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-\left(\rho/n\right)^m}{1-\rho/n}\right)^{-1}. \tag{35}$$

Тогда остальные предельные вероятности находятся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0,\, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\, \ldots,\, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0,\, p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0,\, \ldots,\, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \tag{36}$$

Остальные показатели системы:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \tag{37}$$

Вероятность образования очереди:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{i=0}^{m-1} p_{n+i} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1-\left(\rho/n\right)^m}{1-\rho/n}. \tag{38}$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}}. \qquad (39)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q. \qquad (40)$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k}_{\text{зан}} = \frac{A}{\mu}. \qquad (41)$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1-\left(\rho/_n\right)^m\left(m+1-\frac{m}{n}\rho\right)}{\left(1-\rho/_n\right)^2} p_0, \qquad (42)$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}. \qquad (43)$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}_{\text{зан}}. \qquad (44)$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}. \qquad (45)$$

Пример 12.

На некоторую базу в среднем через 30 мин прибывают автомашины с продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 часа. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определить показатели работы СМО.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим одноканальную СМО с неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная *показательному* закону распределения. Поток обслуживания является простейшим *пуассоновским* потоком событий.

Когда канал занят, заявка становится в очередь и ожидает обслуживания. Показатели эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди:

A — абсолютную пропускную способность СМО;

Q — относительную пропускную способность;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа;

$L_{\text{сист}}$ — среднее число находящихся в системе заявок;

$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{\text{оч}}$ — средняя длина очереди;

$T_{\text{оч}}$ — среднее время ожидания в очереди.

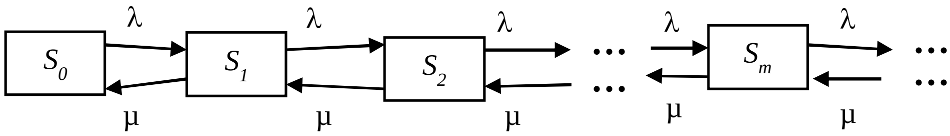

Рис. 11. Одноканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 — канал обслуживания свободен;
S_1 — канал обслуживания занят, но очереди нет;
S_2 — канал обслуживания занят, в очереди стоит **1** заявка;
………
S_m — канал обслуживания занят, в очереди все m заявок.

Любая заявка может быть обслужена, поэтому $P_{обс} = 1$. Относительная пропускная способность $Q = P_{обс} = 1 \Rightarrow P_{отк} = 0$. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.
Предельные вероятности: $p_m = \rho^m(1-\rho)$, m=0, 1, 2, …. (46)
Среднее число заявок в очереди: $L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$. (47)
Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} \cdot \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$. (48)
Среднее время ожидания обслуживания в очереди: $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$. (49)
Среднее время пребывания заявки в системе: $T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}$. (50)

Если $\lambda > \mu$, то очередь будет постоянно увеличиваться. Наибольший интерес представляет СМО при $\lambda < \mu$.

Пример.

В парикмахерской работает один мастер. Интенсивность потока клиентов составляет 4 клиента в час. Интенсивность обслуживания — 5 клиентов в час. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Определить показатели эффективности работы парикмахерской и вероятность того, что ожидают своей очереди не более двух клиентов.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания с *неограниченной очередью*, в которую поступает *простейший* поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ. В среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу времени.

Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная *показательному* закону распределения.

Поток обслуживания является *простейшим пуассоновским* потоком событий.

Когда все ***n*** каналов заняты, заявка становится в очередь и ожидает обслуживания.
Показатели эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди:

A — абсолютную пропускную способность СМО;
Q — относительную пропускную способность;
$P_{отк}$ — вероятность отказа;
$P_{оч}$ — вероятность образования очереди;
$\bar{k}_{зан}$ — среднее число занятых каналов;

$L_{\text{сист}}$ — среднее число находящихся в системе заявок;
$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
$L_{\text{оч}}$ — средняя длина очереди;
$T_{\text{оч}}$ — среднее время ожидания в очереди.

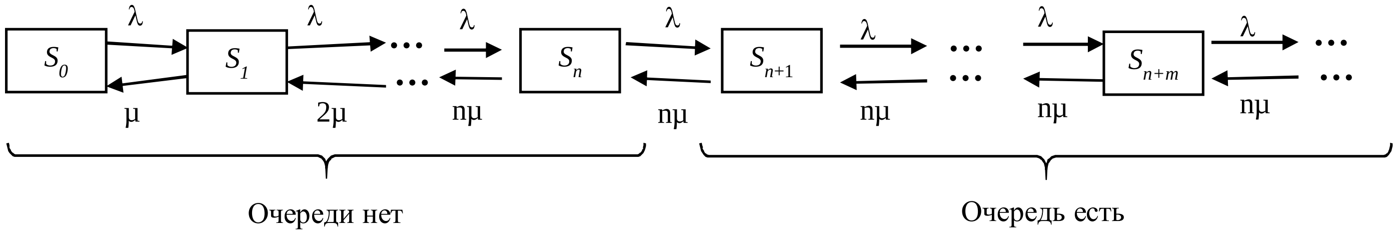

Рис. 12. Многоканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 — все каналы свободны, $k = 0$;
S_1 — занят только один канал, $k = 1$;
………
S_n — заняты все n каналов, очереди нет, $k = n$;
S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка в очереди, $k = n+1$;
………
S_{n+m} — заняты все n каналов, m заявок в очереди, $k = n+m$.

Нет ограничения на длину очереди отсутствует. Любая заявка будет обслужена $\Rightarrow P_{\text{обс}} = 1$. Относительная пропускная способность $Q = P_{\text{обс}} = 1 \Rightarrow P_{\text{отк}} = 0$. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.
Предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1}{n-\rho}\right)^{-1}; \tag{51}$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0,\ p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0,\ \ldots,\ p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \tag{52}$$

Вероятность образования очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \tag{53}$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k}_{\text{зан}} = \frac{A}{\mu}. \tag{54}$$

Средняя длина очереди (среднее число заявок, находящихся в очереди):

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - {}^{\rho}/_{n}\right)^2} p_0. \tag{55}$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}. \tag{56}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho. \tag{57}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}. \quad (58)$$

Если $\rho < n$, то процесс обслуживания устойчив. Если $\rho \geq n$, то СМО работает неустойчиво.

Пример 14.

В магазине работают 3 продавца. Покупатели магазина образуют простейший поток требований с интенсивностью 90 человек в час. Интенсивность обслуживания одного покупателя составляет 60 человек в час. Найдите характеристики обслуживания.