Лекция № 4

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Компоненты и классификация моделей массового обслуживания

Системы массового обслуживания — это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

1. посты технического обслуживания автомобилей;
2. посты ремонта автомобилей;
3. персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
4. станции технического обслуживания автомобилей;
5. аудиторские фирмы;
6. отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
7. телефонные станции и т. д.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

- входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- дисциплина очереди;
- механизм обслуживания.

Входной поток требований. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди - это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- первым пришел — первый обслуживаешься;
- пришел последним — обслуживаешься первым;
- случайный отбор заявок;
- отбор заявок по критерию приоритетности;
- ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечений некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.). Прежде всего следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс. По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы марковские и немарковские. В марковских системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими. Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему. В случае немарковских процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают два основных вида СМО:

- системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;
- системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с ограниченным ожиданием может ограничиваться:

- длина очереди;
- время пребывания в очереди.

В системах с неограниченным ожиданием заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.

Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:

- одноканальные системы;
- многоканальные системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

4.2. Определение характеристик систем массового обслуживания

4.2.1. Одноканальная модель с пуассоновским входным потоком с экспоненциальным распределением длительности обслуживания

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \tag{4.1}$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(x) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \tag{4.2}$$

где μ - интенсивность обслуживания

Потоки заявок и обслуживании простейшие.

Пусть система работает с ***отказами***. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рис. 4.1), у которого имеются два состояния:

S_0 - канал свободен (ожидание);

S_1 - канал занят (идет обслуживание заявки).

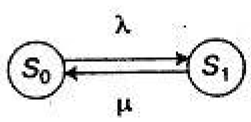

Рис. 4.1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний: $P_0(t)$ - вероятность состояния «канал свободен»; $P_1(t)$ - вероятность состояния «канал занят». По размеченному графу состояний (рис. 4.1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Система линейных дифференциальных уравнений (4.3) имеет решение с учетом нормировочного условия $P_0(t) + P_1(t) = 1$. Решение данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \tag{4.4}$$

$P_1(t) = 1 - P_0(t) = 1 .$ (4.5)

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q.

Действительно, P_0 - вероятность того, что в момент t канал свободен и заявка, пришедшая к моменту t, будет обслужена, а следовательно, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно $P_0(t)$, т. е.

$$q = P_0(t), \tag{4.6}$$

По истечении большого интервала времени (при $t \to \infty$) достигается стационарный (установившийся) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \qquad (4.7)$$

Зная относительную пропускную способность, легко найти абсолютную. Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (4.8)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$P_{отк} = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (4.9)$$

Данная величина $P_{отк}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример 4.1. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ= 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- относительной пропускной способности q;
- абсолютной пропускной способности A;
- вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение 1.

Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0{,}555}{1 + 0{,}555} = 0{,}356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356.$$

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644.$$

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{0{,}8} = 0{,}555$$ (автомобилей в час).

Оказывается, что $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\dfrac{0{,}555}{0{,}356} \approx 1{,}5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

Рассмотрим ***теперь одноканальную СМО с ожиданием.***

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание - простейший поток с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок). Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживании является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N-требований (заявок), т. е. клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рис. 4.2.

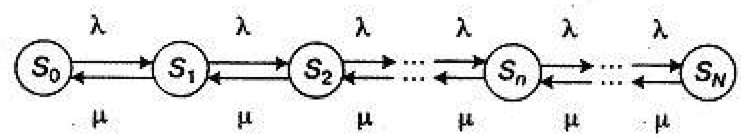

Рис. 4.2. Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием (схема гибели и размножения)

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 - «канал свободен»;

S_1 - «канал занят» (очереди нет);

S_2 - «канал занят» (одна заявка стоит в очереди);

…………………………………………………….

S_n - «канал занят» (n -1 заявок стоит в очереди);

S_N - «канал занят» (N - 1 заявок стоит в очереди). Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\psi \cdot P_0 + P_1 = 0, \quad n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(1-\psi) \cdot P_n + P_{n+1} + \psi \cdot P_{n-1} = 0, \quad 0 < n < N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -P_N + \psi \cdot P_{N-1} = 0, \quad n = N \end{cases}$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$; n – номер состояния. , (4.10)

Решение приведенной выше системы уравнений (4.10) для нашей модели СМО имеет вид

(4.11)

(4.12)

Тогда

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right)\cdot\psi^n, & \psi \neq 1, \quad n = 0,1,2,\dots,N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0\cdot\psi^n, & \psi \neq 1, \quad n = 0,1,2,\dots,N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases}$$

Следует отметить, что выполнение условия стационарности $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ для данной СМО не обязательно, поскольку число допускаемых в обслуживающую систему заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди (которая не может превышать *N* - 1), а не соотношением между интенсивностями входного потока, т. е. не отношением $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (*N* - 1):

– вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк} = P_N = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right)\cdot\psi^n, & \psi \neq 1, \\ \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \qquad (4.13)$$

– относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{отк} = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right)\cdot\psi^n, & \psi \neq 1, \\ 1-\dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \qquad (4.14)$$

– абсолютная пропускная способность:

$$A = q\cdot\lambda \qquad \text{ё} \qquad (4.15)$$

– среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n\cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\psi\cdot\left[1-(N+1)\cdot\psi^N + N\cdot\psi^{N+1}\right]}{(1-\psi)\cdot\left(1-\psi^{N+1}\right)}, & \psi \neq 1 \\ N/2, & \psi = 1 \end{cases} \qquad (4.16)$$

– среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1 - P_N)} \quad (4.17)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \quad (4.18)$$

– среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q \quad (4.19)$$

Рассмотрим пример ***одноканальной СМО с ожиданием***.

Пример 4.2. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3 [(N - 1) = 3]. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность λ= 0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 час.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение

1. Параметр потока обслуживании автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952$$

2. Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей λ и μ, т. е.

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893.$$

3. Вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}} = \frac{1-0{,}893}{1-0{,}893^5} \approx 0{,}248;$$

$$P_1 = \psi \cdot P_0 = 0{,}893 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}221;$$

$$P_2 = \psi^2 \cdot P_0 = 0{,}893^2 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}198;$$

$$P_2 = \psi^3 \cdot P_0 = 0{,}893^3 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}177;$$

$$P_4 = \psi^4 \cdot P_0 = 0{,}893^4 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}158.$$

4. Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{отк} = P_4 = \psi^4 \cdot P_0 \approx 0{,}158.$$

5. Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842.$$

6. Абсолютная пропускная способность поста диагностики

$$A = q \cdot \lambda = 0{,}842 \cdot 0{,}85 = 0{,}716$$ (автомобиля в час)

7. Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т.е. в системе массового обслуживания):

$$L_s = \frac{\psi \cdot \left[1-(N+1)\cdot\psi^N + N\cdot\psi^{N+1}\right]}{(1-\psi)\cdot(1-\psi^{N+1})} = \frac{0{,}893\cdot\left[1-(4+1)\cdot 0{,}893^4 + 4\cdot 0{,}893^5\right]}{(1-0{,}893)\cdot(1-0{,}893^5)} = 1{,}77$$

8. Среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1{,}77}{0{,}85(1-0{,}158)} \approx 2{,}473$$ часа

9. Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 2{,}473 - \frac{1}{0{,}952} = 1{,}423$$ часа.

10. Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1-P_N)W_q = 0{,}85\cdot(1-0{,}158)\cdot 1{,}423 = 1{,}02.$$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, так как пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 15,8% случаев ($P_{отк} = 0{,}158$).

Перейдем теперь к рассмотрению одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания (т. е. $N \to \infty$) Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Стационарный режим функционирования данной СМО существует при $t \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, ...$ и когда $\lambda < \mu$. Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, ...$ имеет вид

$$\begin{cases} -\lambda\cdot P_0 + \mu\cdot P_1 = 0, & n = 0 \\ \lambda\cdot P_{n-1} + \mu\cdot P_{n+1} - (\lambda+\mu)\cdot P_n = 0, & n > 0 \end{cases} \qquad (4.20)$$

Решение данной системы уравнений имеет вид

$$P_n = (1-\psi)\psi^n$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, $n = 0, 1, 2, ...$ (4.21)

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди, следующие:

– среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_S = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P_n = \frac{\psi}{1-\psi} \qquad (4.22)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{[\mu\cdot(1-\psi)]} \qquad 4.23)$$

– среднее число клиентов в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1-\psi)} \qquad (4.24)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\psi}{[\mu\cdot(1-\psi)]} \qquad (4.25)$$

Пример 4.3. Вспомним о ситуации, рассмотренной в примере 4.2, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (поста диагностики);
- среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

Решение

1. Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ψ определены в примере 4.2:

μ=0,952; ψ=0,893.

2. Вычислим предельные вероятности системы по формулам

$$P_0 = 1 - \psi = 1 - 0{,}893 = 0{,}107;$$

$$P_1 = (1 - \psi) \cdot \psi = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893 = 0{,}096;$$

$$P_2 = (1 - \psi) \cdot \psi^2 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^2 = 0{,}085;$$

$$P_3 = (1 - \psi) \cdot \psi^3 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^3 = 0{,}076;$$

$$P_4 = (1 - \psi) \cdot \psi^4 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^4 = 0{,}068;$$

$$P_5 = (1 - \psi) \cdot \psi^5 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^5 = 0{,}061.$$

и т.д.

Следует отметить, что $P_0(t)$ определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7%, так как $P_0(t)$ = 0,107.

3. Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):

$$L_S = \frac{\psi}{1 - \psi} = \frac{0{,}893}{1 - 0{,}893} = 8{,}346$$ ед.

4. Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} = \frac{1}{[0{,}952 \cdot (1 - 0{,}893)]} = 9{,}817$$ час.

5. Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1 - \psi)} = \frac{0{,}893^2}{(1 - 0{,}893)} = 7{,}453.$$

6. Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{\psi}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} = \frac{0{,}893}{0{,}952 \cdot (1 - 0{,}893)} = 8{,}766$$ час.

7. Относительная пропускная способность системы:

q = 1

т. е. каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

8. Абсолютная пропускная способность:

$A = \lambda \cdot q = 0{,}85 \cdot 1 = 0{,}85.$

Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересует количество клиентов, которое посетит пост диагностики при снятии ограничения на длину очереди.

Допустим, в первоначальном варианте количество мест для стоянки прибывающих автомобилей было равно трем (см. пример 4.2). Частота т возникновения ситуаций, когда прибывающий на пост диагностики автомобиль не имеет возможности присоединиться к очереди:

$$m = \lambda \cdot P_N.$$

В нашем примере при $N = 3 + 1 = 4$ и $\psi = 0{,}893$

$$m = \lambda \cdot P_N \cdot \psi^4 = 0{,}85 \cdot 0{,}284 \cdot 0{,}8934 = 0{,}134$$ автомобиля в час

При 12-часовом режиме работы поста диагностики это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять 12 • 0,134 = 1,6 автомобиля.

Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуженных клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12ч. работы) поста диагностики. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

4.2.2. Многоканальная модель с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания

В подавляющем большинстве случаев на практике системы массового обслуживания являются многоканальными, и, следовательно, ***модели с n обслуживающими каналами*** (где $n > 1$) представляют несомненный интерес.

Процесс массового обслуживания, описываемый данной моделью, характеризуется интенсивностью входного потока λ, при этом параллельно может обслуживаться не более n клиентов (заявок). Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равняется $\frac{1}{\mu}$. Входной и выходной потоки являются пуассоновскими. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, причем длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования n параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышении (по сравнению с одноканальной системой) скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно n клиентов.

Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами имеет вид, показанный на рис. 4.3.

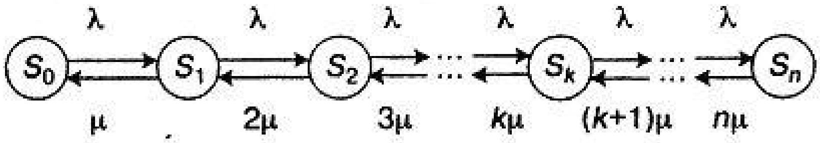

Рис. 4.3. Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

………………………………………………………….

S_k - заняты ровно k каналов, остальные свободны;

………………………………………………………….

S_n - заняты все n каналов, остальные свободны;

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы P_0, ... ,P_k, ... P_n будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k + \mu \cdot (k+1) \cdot P_{k+1}, \qquad 1 \le k \le n-1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n \end{cases} \tag{4.26}$$

Начальные условия решения системы таковы:
$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = \dots = P_1(0) = 0$.
Стационарное решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\dfrac{\psi^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\psi^k}{k!}} = \dfrac{\psi^k}{k!} \cdot P_0, \qquad k = 0,1,2,\dots,n \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\psi^k}{k!}}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n \end{cases} \tag{4.27}$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формулы для вычисления вероятностей P_k называются формулами Эрланга.

Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме:

– вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0 , \tag{4.28}$$

так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все n каналов заняты. Величина $P_{отк}$ характеризует полноту обслуживания входящего потока;

– вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (она же - относительная пропускная способность системы q) дополняет $P_{отк}$ до единицы:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0 \tag{4.29}$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{отк}) \tag{4.30}$$

– среднее число каналов, занятых обслуживанием ($\overline{k}$) следующее:

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \psi \cdot (1 - P_{отк}) \tag{4.31}$$

Величина $\overline{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример 4.4. Пусть *n*-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (*n* = 3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ = 1 задаче в час. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{обсл}$ = 1,8 час. Поток заявок на решение задач и поток обслуживания этих заявок являются простейшими.

Требуется вычислить финальные значения:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ; –

среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение

1. Определим параметр μ

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555$$

потока обслуживании:

2. Приведенная интенсивность потока заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}555} = 1{,}8$$

.

3. Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга (4.27):

$$P_1 = \frac{\psi}{1!} \cdot P_0 = 1{,}8 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} \cdot P_0 = 1{,}62 \cdot P;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = 0{,}97 \cdot P;$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\psi^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} \approx 0{,}18;$$

$$P_1 \approx 1{,}8 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}344;$$

$$P_2 \approx 1{,}62 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}301;$$

$$P_3 \approx 0{,}97 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}18.$$

.

4. Вероятность отказа в обслуживании заявки

$$P_{отк} = P_3 = 0{,}18$$

.

5. Относительная пропускная способность ВЦ

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

.

6. Абсолютная пропускная способность ВЦ

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}82 = 0{,}82$$

.

7. Среднее число занятых каналов – ПЭВМ

$$\bar{k} = \psi \cdot (1 - P_{отк}) = 1{,}8 \cdot (1 - 018) = 1{,}476.$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех - остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев. Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.

Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходили 0,0180. Для этого используем формулу (4.28):

$$P_{отк} = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0$$

Составим следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,266	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{отк}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Рассмотрим ***многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием***. Процесс массового обслуживания при этом характеризуется следующим: входной и выходной потоки являются пуассоновскими с интенсивностями λ и μ соответственно; параллельно обслуживаться могут не более *S* клиентов. Система имеет *S* каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна - $\frac{1}{\mu}$.

В установившемся режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1)\mu \cdot P_{n+1}, при \quad 1 \le n < S$$
$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + S \cdot \mu) \cdot P_n + S \cdot \mu \cdot P_{n+1} \cdot \quad при \quad n \ge S$$

(4.32)

Решение системы уравнений (4.32) имеет вид

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\psi^n}{n!} \cdot P_0, & при \quad 1 \le n < S \\ P_n = \dfrac{\psi^n}{S! S^{n-s}} \cdot P_0, & при \quad n \ge S \end{cases}$$

(4.33) (4.34)

где

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!\left[1 - \dfrac{\psi}{S}\right]} \right\}^{-1}$$

(4.35)

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие:

$$\left[\frac{\lambda}{\mu \cdot S}\right] < 1.$$

Вероятностные характеристики функционирования в стационарном режиме многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью определяются по следующим формулам:

- вероятность того, что в системе находится *n* клиентов на обслуживании, определяется по формулам (4.33) и (4.34);
- среднее число клиентов в очереди на обслуживание

$$L_q = \left[\frac{S \cdot \psi}{(S-\psi)^2}\right] \cdot P_S; \quad (4.36)$$

- среднее число находящихся в системе клиентов (заявок на Обслуживание и в очереди)

$$L_S = L_q + \psi; \quad (4.37)$$

- средняя продолжительность пребывания клиента (заявки на обслуживание) в очереди

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad (4.38)$$

- средняя продолжительность пребывания клиента в системе

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad (4.39)$$

Рассмотрим примеры многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием.

Пример 4.5. Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность λ = 2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательном у закону и равно $\bar{t}$ = 0,5 сут. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

- вероятности состояний системы;
- среднее число заявок в очереди на обслуживание;
- среднее число находящихся в системе заявок;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

Решение

1. Определим параметр потока обслуживаний

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

2. Приведенная интенсивность потока заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25,$$

при этом $\frac{\lambda}{\mu \cdot S} = \frac{2{,}5}{2 \cdot 3} = 0{,}41$.

Поскольку $\frac{\lambda}{\mu \cdot S}$ <1, то очередь не растет безгранично и в системе наступает предельный стационарный режим работы.

3. Вычислим вероятности состояний системы:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!\left[1 - \frac{\psi}{S}\right]} \right\}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\psi^1}{1!} + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!\left(1 - \frac{\psi}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \psi + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{6\left(1 - \frac{\psi}{3}\right)}} = \frac{1}{1 + 1{,}25 + \frac{1{,}25^2}{2} + \frac{1{,}25^3}{6\left(1 - \frac{1{,}25}{3}\right)}} = 0{,}279$$

$$P_1 = \frac{\psi^1}{1!} \cdot P_0 = 1{,}25 \cdot 0{,}279 = 0{,}349;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^2}{2!} \cdot 0{,}279 = 0{,}218;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^3}{3!} \cdot 0{,}279 = 0{,}091;$$

$$P_4 = \frac{\psi^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^4}{4!} \cdot 0{,}279 = 0{,}028.$$

4. Вероятность отсутствия очереди у мастерской

$$P_{ожд} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0{,}279 + 0{,}349 + 0{,}218 + 0{,}091 = 0{,}937.$$

5. Среднее число заявок в очереди на обслуживание

$$L_q = \left[\frac{S \cdot \psi}{(S - \psi)^2}\right] \cdot P_S = \left[\frac{3 \cdot 1{,}25}{(3 - 1{,}25)^2}\right] \cdot 0{,}091 = 0{,}111.$$

6. Среднее число находящихся в системе заявок

$$L_S = L_q + \psi = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361.$$

7. Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживание

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044$$ суток.

8. Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской (в системе)

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}044 + \frac{1}{2} = 0{,}544$$ суток.

4.2.3. Модель обслуживания машинного парка

Модель обслуживания машинного парка представляет собой модель замкнутой системы массового обслуживания.

До сих пор мы рассматривали только такие системы массового обслуживания, для которых интенсивность λ входящего потока заявок не зависит от состояния системы. В этом случае источник заявок является внешним по отношению к СМО и генерирует неограниченный поток требований. Рассмотрим системы массового обслуживания, для которых λ зависит от состояния системы, при чем источник требований является внутренним и генерирует ограниченный поток заявок.

Например, обслуживается машинный парк, состоящий из N машин, бригадой R механиков ($N > R$), причем каждая машина может обслуживаться только одним механиком. Здесь машины являются источниками требований (заявок на обслуживание), а механики - обслуживающими каналами. Неисправная машина после обслуживания используется по своему прямому назначению и становится потенциальным источником возникновения требований на обслуживание. Очевидно, что интенсивность λ зависит от того, сколько машин в данный момент находится в эксплуатации (N - k) и сколько машин обслуживается или стоит в очереди, ожидая обслуживания (k).

В рассматриваемой модели емкость источника требований следует считать ограниченной. Входящий поток требований исходит из ограниченного числа эксплуатируемых машин (N - k), которые в случайные моменты времени выходят из строя и требуют обслуживания. При этом каждая машина из (N - k) находится в эксплуатации. Генерирует пуассоновский поток требований с интенсивностью Х независимо от других объектов, общий (суммарный) входящий поток имеет интенсивность $(N-k)\cdot\lambda$. Требование, поступившее в систему в момент, когда свободен хотя бы один канал, немедленно идет на обслуживание. Если требование застает все каналы занятыми обслуживанием других требований, то оно не покидает систему, а становится в очередь и ждет, пока один из каналов не станет свободным.

Таким образом, в замкнутой системе массового обслуживания входящий поток требований формируется из выходящего.

Состояние S_k системы характеризуется общим числом требований, находящихся на обслуживании и в очереди, равным k. Для рассматриваемой замкнутой системы, очевидно, k = 0, 1, 2, ... , N. При этом если система находится в состоянии S_k, то число объектов, находящихся в эксплуатации, равно (N - k).

Если λ - интенсивность потока требований в расчете на одну машину, то:

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\cdot\lambda, & 0 \le k \le N \\ 0. & k > N \end{cases};$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\cdot\mu, & 0 \le k \le R, \\ R\cdot\mu, & R \le k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Система алгебраических уравнений, описывающих работу замкнутой СМО в стационарном режиме, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = -\psi\cdot N\cdot P_0 + P_0; \\ 0 = (N-k+1)\cdot\psi\cdot P_{k-1} - \left[(N-k)\cdot\psi + k\right]\cdot P_k + (k+1)\cdot P_{k+1}, 0 < k < R \\ 0 = (N-k+1)\cdot\psi\cdot P_{k-1} - \left[(N-k)\cdot\psi + R\right]\cdot P_k + R\cdot P_{k+1}, \quad R \le k < N \\ 0 = \psi\cdot P_{N-1} - R\cdot P_N. \end{cases} \tag{4.40}$$

Решая данную систему, находим вероятность k-го состояния:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\cdot\psi^k}{k!\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & 1 \le k < R \\ \dfrac{N!\cdot\psi^k}{R!\cdot R^{k-R}\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & R \le k \le N \end{cases} \tag{4.41}$$

Величина P_0 определяется из условия нормирования $\sum_{k=0}^{N} P_k$ полученных результатов по формулам (4.41) для P_k , k = 0, 1, 2, ... , N. Определим следующие вероятностные характеристики системы:

– среднее число требований в очереди на обслуживание:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N} (k - R) \cdot P_k ; \qquad (4.42)$$

– среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)

$$L_S = \sum_{k=1}^{N} k \cdot P_k \qquad (4.43)$$

– среднее число механиков (каналов), «простаивающих» из-за отсутствия работы

$$\overline{R}_н = \sum_{k=0}^{R-1} (R - k) \cdot P_k ; \qquad (4.44)$$

– коэффициент простоя обслуживаемого объекта (машины) в очереди

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} ; \qquad (4.45)$$

– коэффициент использования объектов (машин)

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N} \right) ; \qquad (4.46)$$

– коэффициент простоя обслуживающих каналов (механиков)

$$\alpha_3 = \frac{\overline{R}_н}{R} ; \qquad (4.47)$$

– среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди)

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu} . \qquad (4.48)$$

Пример 4.6. Пусть для обслуживания десяти персональных компьютеров (ПК) выделено два инженера одинаковой производительности. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера - пуассоновский с интенсивностью λ = 0,2. Время обслуживания ПК подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного ПК одним инженером составляет: $\bar{t}$=1,25 час.

Возможны следующие варианты организации обслуживания:

– оба инженера обслуживают все десять компьютеров, так что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае R = 2, N = 10;
– каждый из двух инженеров обслуживает по пять закрепленных за ним ПК. В этом случае R = 1, N = 5.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Решение

1. Вычислим параметр обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 .$$

2. Приведенная интенсивность

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25 .$$

3. Вычислим вероятностные характеристики СМО для двух вариантов организации обслуживания ПК.

Вариант 1 1. Определим вероятности состояний системы:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\cdot\psi^k}{k!\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & 1 \le k < R \\ \dfrac{N!\cdot\psi^k}{R!\cdot R^{k-R}\cdot(N-k)!}\cdot P_0, & R \le k \le N \end{cases};$$

$$P_1 = \frac{10!\cdot 0,25^1}{1!\cdot(10-1)!}\cdot P_0 = 2,5\cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{10!\cdot 0,25^2}{2!\cdot 2^{2-2}\cdot(10-2)!}\cdot P_0 = 2,812\cdot P_0;$$

$$P_3 = \frac{10!\cdot 0,25^3}{2!\cdot 2^{3-2}\cdot(10-3)!}\cdot P_0 = 2,812\cdot P_0;$$

$$P_4 = \frac{10!\cdot 0,25^4}{2!\cdot 2^{4-2}\cdot(10-4)!}\cdot P_0 = 2,461\cdot P;$$

$$P_5 = \frac{10!\cdot 0,25^5}{2!\cdot 2^{5-2}\cdot(10-5)!}\cdot P_0 = 1,864\cdot P_0;$$

$$P_6 = \frac{10!\cdot 0,25^6}{2!\cdot 2^{6-2}\cdot(10-6)!}\cdot P_0 = 1,154\cdot P;$$

$$P_7 = \frac{10!\cdot 0,25^7}{2!\cdot 2^{7-2}\cdot(10-7)!}\cdot P_0 = 0,577\cdot P_0;$$

$$P_8 = \frac{10!\cdot 0,25^8}{2!\cdot 2^{8-2}\cdot(10-8)!}\cdot P_0 = 0,216\cdot P_0;$$

$$P_9 = \frac{10!\cdot 0,25^9}{2!\cdot 2^{9-2}\cdot(10-9)!}\cdot P_0 = 0,054\cdot P_0;$$

$$P_{10} = \frac{10!\cdot 0,25^{10}}{2!\cdot 2^{10-2}\cdot(10-10)!}\cdot P_0 = 0,007\cdot P_0.$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{N} P_k$ =1 и используя результаты расчета P_k, вычислим P_0 :

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 2,5\cdot P_0 + 2,812\cdot P_0 + 2,812\cdot P_0 + \ldots + 0,007\cdot P_0 = 1.$$

Откуда P_0 = 0,065.

Тогда

$P_1 \approx 0{,}162;$

$P_2 \approx 0{,}183;$

$P_3 \approx 0{,}182;$

$P_4 \approx 0{,}16;$

$P_5 \approx 0{,}11;$

$P_6 \approx 0{,}075;$

$P_7 \approx 0{,}037;$

$P_8 \approx 0{,}014;$

$P_9 \approx 0{,}003;$

$P_{10} \approx 0{,}000.$

– Определим среднее число компьютеров в очереди на обслуживание:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R)\cdot P_k = 0 + (3-2)\cdot 0{,}182 + (4-2)\cdot 0{,}16 + (5-2)\cdot 0{,}11 + (6-2)\cdot 0{,}07$$

$$+ (7-2)\cdot 0{,}037 + (8-2)\cdot 0{,}014 + (9-2)\cdot 0{,}003 = 0{,}182 + 0{,}32 + 0{,}33 + 0{,}3 + 0{,}18$$

$$+ 0{,}084 + 0{,}021 = 1{,}42$$

– Определим среднее число ПК, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):

$$L_S = \sum_{R=1}^{N} k\cdot P_k = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 + 4\cdot P_4 + 5\cdot P_5 + 6\cdot P_6 + 7\cdot P_7 +$$

$$8\cdot P_8 + 9\cdot P_9 + 10\cdot P_{10} = 0.162 + 2\cdot 0{,}183 + 3\cdot 0{,}182 + 4\cdot 0{,}16 + 5\cdot 0{,}11 +$$

$$+ 6\cdot 0{,}075 + 7\cdot 0{,}037 + 8\cdot 0{,}014 + 9\cdot 0{,}003 + 10\cdot 0 = 3{,}11$$

– Определим среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$\overline{R}_н = \sum_{k=0}^{R-1}(R-k)\cdot P_k = (2-0)\cdot P_0 + (2-1)\cdot P_1 = 2\cdot 0{,}065 + 1\cdot 0{,}162 = 0{,}292.$$

– Коэффициент простоя персонального компьютера в очереди следующий:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{1{,}42}{10} = 0{,}142.$$

– Коэффициент использования компьютеров определяется по формуле:

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 1 - \left(\frac{3{,}11}{10}\right) = 0{,}689.$$

– Коэффициент простоя обслуживающих инженеров рассчитывается так:

$$\alpha_3 = \frac{\overline{R}_н}{R} = \frac{0{,}292}{2} = 0{,}146.$$

– Среднее время ожидания ПК обслуживания

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{1-0{,}689}{0{,}689} - \frac{1}{0{,}8} = 1{,}01 \text{ час.}$$

Вариант 2

Определим вероятности состояний системы:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N! \cdot \psi^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 1 \le k < R \\ \dfrac{N! \cdot \psi^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & R \le k \le N \end{cases};$$

$$P_1 = \frac{10! \cdot 0{,}25^1}{1! \cdot (5-1)!} \cdot P_0 = 1{,}25 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{5! \cdot 0{,}25^2}{1! \cdot 2^{2-1} \cdot (5-2)!} \cdot P_0 = 1{,}25 \cdot P_0;$$

$$P_3 = \frac{5! \cdot 0{,}25^3}{(5-3)!} \cdot P_0 = 0{,}938 \cdot P_0;$$

$$P_4 = \frac{5! \cdot 0{,}25^4}{(5-4)!} \cdot P_0 = 0{,}469 \cdot P_0;$$

$$P_5 = 5! \cdot 0{,}25^5 \cdot P_0 = 0{,}117 \cdot P;$$

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 1{,}25 \cdot P_0 + 1{,}25 \cdot P_0 + 0{,}938 \cdot P_0 + 0{,}469 \cdot P_0 + 0{,}117 \cdot P_0 = 1.$$

Откуда $P_0 = 0{,}199$.

Тогда

$$P_1 \approx 0{,}249;$$

$$P_2 \approx 0{,}249;$$

$$P_3 \approx 0{,}187;$$

$$P_4 \approx 0{,}093;$$

$$P_5 \approx 0{,}023.$$

– Среднее число компьютеров в очереди на обслуживание таково:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N} (k-R) \cdot P_k = (2-1) \cdot 0{,}249 + (3-1) \cdot 0{,}187 + (4-1) \cdot 0{,}093 + (5-1) \cdot 0{,}023 = 0{,}994$$

– Среднее число компьютеров, находящихся на обслуживании и в очереди рассчитывается так:

$$L_S = \sum_{R=1}^{N} k \cdot P_k = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 =$$
$$= 0{,}249 + 2 \cdot 0{,}249 + 3 \cdot 0{,}187 + 4 \cdot 0{,}093 + 5 \cdot 0{,}023 = 1{,}8$$

– Среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$\overline{R}_{\text{н}} = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k) \cdot P_k = (1-0) \cdot P_0 = 0{,}199.$$

– Коэффициент простоя персонального компьютера в очереди:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{0{,}994}{5} = 0{,}199.$$

– Коэффициент использования компьютеров:

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 1 - \left(\frac{1{,}8}{5}\right) = 0{,}64.$$

– Коэффициент простоя обслуживающих инженеров:

$$\alpha_3 = \frac{R_н}{R} = \frac{0{,}199}{1} = 0{,}199$$
.

– Среднее время ожидания ПК обслуживания:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}2} \cdot \frac{1-0{,}64}{0{,}64} - \frac{1}{0{,}8} = 1{,}56$$
час.

Сведем полученные результаты по двум вариантам в следующую таблицу:

Итоговые вероятностные характеристики	Варианты	
	1	2
α_1	0,142	0,199
α_2	0,689	0,64
α_3	0,146	0,199
W_q, час	1,01	1,56

Таким образом, в варианте 1 каждый компьютер стоит в очереди в ожидании начала его обслуживания приблизительно 0,142 части рабочего времени, что меньше этого показателя при варианте 2 организации работ. Далее в варианте 1 вероятность того, что ПК и любой момент времени будет работать выше, чем в варианте 2, и равна $\alpha_2^1 = 0{,}689 > \alpha_2^2 = 0{,}64$. Очевидно, вариант 1 организации работ по обслуживанию ПК
эффективнее, чем вариант 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.1

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока λ = 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора $\bar{t}$ =1 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 4.2

В одноканальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ = 0,5 заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное распределение с $\bar{t}$ =1,5 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 4.3

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ = 10 задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты. Найдите вероятностные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Задача 4.4

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью λ = 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Задача 4.5

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности λ = 4 машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определите вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

Задача 4.6

На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. Пусть предприятие имеет 10 машин, требующих ремонта с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой λ = 10 отк/час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем $\bar{t}$ = 3 мин. Распределение моментов возникновения отказов является пуассоновским, а продолжительность выполнения ремонтных работ распределена экспоненциально. Возможно организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Задача 4.7

В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, - простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приема третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

Задача 4.8

В инструментальном отделении сборочного цеха работают три кладовщика. В среднем за 1 мин. за инструментом приходят 0,8 рабочего (λ= 0,8). Обслуживание одного рабочего занимает у кладовщика $\bar{t}$ = 1,0 мин. Очередь не имеет ограничения. Известно, что поток рабочих за инструментом - пуассоновский, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Стоимость 1 мин. работы рабочего равна 30 д. е., а кладовщика - 15 д. е. Найдите средние потери цеха при данной организации обслуживания в инструментальном отделении (стоимость простоя) при стационарном режиме работы.

Задача 4.9

Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания - 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно λ = 20 пасс/час. Все потоки в системе простейшие. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Задача 4.10

Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику λ = 0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики $\bar{t}$ = 1,2 часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Задача 4.11

Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность λ = 0,7 автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Задача 4.12

На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью λ = 2 состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно 0,4 час. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь. Все потоки событий простейшие.

При установившемся режиме найдите:

- среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его);
- среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях;
- среднее время ожидания состава в системе обслуживания;
- вероятность того, что прибывший состав займет место на внешних путях.

Задача 4.13

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

Задача 4.14

На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания одной машины - 2 часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

Задача 4.15

В вычислительном центре работает 9 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток неисправностей имеет интенсивность 0,3 отказа в день. Среднее время устранения одной неисправности одним инженером равно 1,5 час. Компьютеры обслуживают три инженера с одинаковой производительностью. Все потоки событий простейшие. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК:

- три инженера обслуживают все 9 компьютеров, так, что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае $R = 3$; $N = 9$;
- каждый из трех инженеров обслуживает по три закрепленных за ним ПК. В этом случае $R = 1$; $N = 3$.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Задача 4.16

Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность λ = 0,25 отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Все потоки событий простейшие. Возможны два варианта обслуживания:

- все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью;

– все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Задача 4.17

В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы:

– вероятность обслуживания покупателя;
– абсолютную пропускную способность магазина;
– среднюю длину очереди;
– среднее время ожидания в очереди; –
среднее время всего обслуживания;
– вероятность простоя продавца.

Задача 4.18

Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью λ = 3 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}$ = 0,5 час. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 д. е. Содержание канала обходится 3 д.е./час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

Задача 4.19

Подсчитайте вероятностные характеристики для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условиях λ = 4 заявки/час; $\bar{t}$ = 0,5 час. Выясните, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до четырех.

Задача 4.20

Система массового обслуживания - билетная касса с тремя окошками (с тремя кассирами) и неограниченной очередью.

Пассажиров, желающих купить билет, приходит в среднем 5 человек за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Задача 4.21

Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью λ = 1,6 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания $\bar{t}$ = 0,5 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 5 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.

5. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Теоретические основы метода

Метод статистического моделирования (или метод Монте-Карло) - это способ исследования поведения вероятностных систем (экономических, технических и т. д.) в условиях, когда не известны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах.

Этот метод заключается в воспроизведении исследуемого физического процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Одно такое воспроизведение функционирования системы называют реализацией или испытанием. После каждого испытания регистрируют совокупность параметров, характеризующих случайный исход реализации. Метод основан на многократных испытаниях построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения числовых характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Процесс моделирования функционирования экономической системы сводится к машинной имитации изучаемого процесса, который как бы копируется на ЭВМ со всеми сопровождающими его случайностями.

Первые сведения о методе Монте-Карло были опубликованы в конце 40-х гг. Авторами метода являются американские математики Дж. Нейман и С. Улам. В нашей стране первые работы были опубликованы в 1955-1956 гг. В.В. Чавчанидзе, Ю.А.
Шрейдером и В.С. Владимировым.

Основой метода статистического моделирования является закон больших чисел. Закон больших чисел в теории вероятностей доказывает для различных условий сходимость по вероятности средних значений результатов большого числа наблюдений к некоторым постоянным величинам.

Под законом больших чисел понимают ряд теорем. Например, одна из ***теорем Л.Л. Чебышева*** формулируется так: "При неограниченном увеличении числа независимых испытаний *n* среднее арифметическое свободных от систематических ошибок и равноточных результатов наблюдений ξ_i случайной величины ξ, имеющей конечную дисперсию $D(\xi)$, сходится по вероятности к математическому ожиданию $M(\xi)$ этой случайной величины». Это можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{n=1}^{n}\xi_i}{n} - M(\xi)\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (5.1)$$

где ε - сколь угодно малая положительная величина

Теорема Бернулли формулируется так: "При неограниченном увеличений числа независимых испытаний в одних и тех же условиях частота $P^*(A)$ наступления случайного события *А* сходится по вероятности к его вероятности *Р*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m_i^*}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (5.2)$$

Согласно данной теореме, для получения вероятности какого-либо события, например вероятности состояний некоторой системы $P_i(t)$, $i=\overline{0,k}$, вычисляют частоты $P_i^* = \frac{m_i^*}{n}$ для одной реализации (испытания), далее проводят подобные вычисления для числа реализаций, равного *n*. Результаты усредняют и этим самым с некоторым приближением, получают искомые вероятности состояний системы. На основании вычисленных вероятностей определяют другие характеристики системы. Следует отметить, что, чем больше число реализаций *n*, тем точнее результаты вычисления искомых величин (вероятностей состояний системы).

Решение любой задачи методом статистического моделирования состоит в:

- разработке и построении структурной схемы процесса, выявлении основных взаимосвязей;
- формальном описании процесса;
- моделировании случайных явлений (случайных событий, случайных величин, случайных функций), сопровождающих функционирование исследуемой системы;
- моделировании (с использованием данных, полученных на предыдущем этапе) функционирования системы - воспроизведении процесса в соответствии с разработанной структурной схемой и формальным описанием;.

- накоплении результатов моделирования, их статистической обработке, анализе и обобщении.

В отличие от описанных ранее математических моделей, результаты которых отражали устойчивое во времени поведение системы, результаты, получаемые при статистическом моделировании, подвержены экспериментальным ошибкам. Это означает, что любое утверждение, касающееся характеристик моделируемой системы, должно основываться на результатах соответствующих статистических проверок.

Экспериментальные ошибки при статистическом моделировании в значительной степени зависят от точности моделирования случайных явлений, сопровождающих функционирование исследуемой системы.

Известно, что при изучении вероятностных систем случайные явления могут интерпретироваться в виде случайных событий, случайных величин и случайных функций. Следовательно, моделирование случайных явлений сводится к моделированию случайных событий, случайных величин и случайных функций. Так как случайные события и случайные функции могут быть представлены через случайные величины, то и моделирование случайных событий и случайных функций производится с помощью случайных величин. В связи с этим рассмотрим сначала способы моделирования случайных величин.

Моделирование случайных величин

Для моделирования случайной величины необходимо знать ее закон распределения. Наиболее общим способом получения последовательности случайных чисел, распределенных по произвольному закону, является способ, в основе которого лежит их формирование из исходной последовательности случайных чисел, распределенных в интервале [0,1] по равномерному закону.

Равномерно распределенные в интервале [0,1] последовательности случайных чисел можно получить тремя способами:

- использование таблиц случайных чисел;
- применение генераторов случайных чисел;
- метод псевдослучайных чисел.

При решении задачи без применения ЭВМ чаще всего используют ***таблицы случайных чисел***. В таблицах случайных чисел случайные цифры имитируют значения дискретной случайной величины с равномерным распределением:

x_i	0	1	2	3	…	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	…	0,1

При составлении таких таблиц выполняется требование, чтобы каждая из этих цифр от 0; 1;...; 9 встречалась примерно одинаково часто и независимо от других с вероятностью p_i = 0,1.

Самая большая из опубликованных таблиц случайных чисел содержит 1000 000 цифр. Таблицы случайных чисел составить не так просто. Они требуют тщательной проверки с помощью специальных статистических тестов.

При решении задач на ЭВМ для выработки случайных чисел, равномерно распределенных в интервале [0,1], могут применяться ***генераторы случайных чисел***. Данные генераторы преобразуют результаты случайного физического процесса в двоичные числа. В качестве случайного физического процесса обычно используют собственные шумы (случайным образом меняющееся напряжение).

Недостатки данного способа получения случайных чисел следующие:

1. Трудно проверить качество вырабатываемых чисел.
2. Случайные числа не воспроизводимы (если их не запоминать), и, как следствие, нельзя повторить расчет на ЭВМ для исключения случайного сбоя.

Получение псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения заключается в выработке псевдослучайных чисел. *Псевдослучайные числа* - это числа, полученные по какойлибо формуле и имитирующие значения случайной величины. Под словом "имитирующие" подразумевается, что эти числа удовлетворяют ряду тестов так, как если бы они были значениями этой случайной величины.

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел предложил Дж. Нейман. Это так называемый метод середины квадратов, который заключается в следующем:

$$\gamma_0 = 0{,}9876,\ \gamma_0^2 = 0{,}97\underline{5353}76,$$

$$\gamma_1 = 0{,}5353,\ \gamma_1^2 = 0{,}28\underline{6546}09,$$

$$\gamma_2 = 0{,}6546$$

и т.д.

Алгоритм себя не оправдал: получилось больше, чем нужно, малых значений γ_i - случайных чисел. В настоящее время разработано множество алгоритмов для получения псевдослучайных чисел.

Назовем достоинства метода псевдослучайных чисел.

1. На получение каждого случайного числа затрачивается несколько простых операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ.
2. Малый объем памяти ЭВМ для программирования.
3. Любое из чисел легко воспроизвести.
4. Качество генерируемых случайных чисел достаточно проверить один раз.

Подавляющее число расчетов по методу Монте-Карло осуществляется с использованием псевдослучайных чисел. От последовательности случайных чисел, равномерно распределенных в интервале [0,1], нетрудно перейти к последовательности случайных чисел с произвольным заданным законом распределения.

5.2. Моделирование случайных событий с заданным законом распределения

5.2.1. Разыгрывание дискретной случайной величины

Пусть требуется разыграть дискретную случайную величину, т.е. получить последовательность ее возможных значений x_i (i = 1,2,3,...n), зная закон распределения X:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Обозначим через *R непрерывную случайную величину*. Величина R распределена равномерно в интервале (0,1). Через r_j (j = 1,2,...) обозначим возможные значения случайной величины R. Разобьем интервал 0 < R < 1 на оси $0r$ точками с координатами $P_1, P_1+P_2, P_1+P_2+P_3, P_1+\ldots+P_{n-1}$ на n частичных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Тогда получим:

Длина $\Delta_1 = P_1 - 0 = P_1$

Длина $\Delta_2 = (P_1 + P_2) - P_1 = P_2$

....

Длина $\Delta_n = 1 - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}) = P_n$

Видно, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности P с тем же индексом. Длина $\Delta_i = P_i$

Таким образом, при попадании случайного числа r_i в интервал Δ_i случайная величина X принимает значение x_i с вероятностью P_i.

<u>Существует следующая теорема:</u>

Если каждому случайному числу $r_j (0 \le r_j < 1)$, которое попало в интервал Δ_i, поставить в соответствие возможное значение x_i, то разыгрываемая величина будет иметь заданный закон распределения

Алгоритм разыгрывания дискретной случайной величины заданной законом распределения

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_n

1. Нужно разбить интервал (0,1) оси Or на n частичных интервалов:

$$\Delta_1 - (0; P_1), \Delta_2 - (P_2; P_1 + P_2), \ldots, \Delta_n - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}; 1)$$

2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел, или в компьютере) случайное число r_j.

Если r_j попало в интервал Δ_i, то разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_i.

Пример 5.1.

Разыграть 8 значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	$X_1=3$	$X_2=11$	$X_3=24$
P	$P_1=0{,}25$	$P_2=0{,}16$	$P_3=0{,}59$

Решение

1. Разобьем интервал (0,1) оси Or точками с координатами 0,25; 0,25+0,16=0,41 на три частичных интервала;

$$\Delta_1 = (0; 0{,}25), \quad \Delta_2 = (0{,}25; 0{,}41), \quad \Delta_3 = (0{,}41; 1).$$

2. Выпишем из таблицы случайных чисел 9 чисел, например 0,10; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85.
3. Случайное число r_1 = 0,10 принадлежит первому частичному интервалу, поэтому разыгрываемая случайная величина приняла возможное значение x_1 = 3. Случайное число r_2= 0,37 принадлежит второму частичному интервалу, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение x_2 = 11. Аналогично получим остальные возможные значения дискретной случайной величины X.

Итак: разыгранные возможные значения X таковы: 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Как видим, можно получить множество значений случайной величины X с заданным законом распределения.

5.2.2. Разыгрывание непрерывной случайной величины

Пусть требуется разыграть непрерывную случайную величину X, т.е. получить последовательность ее возможных значений x_i (i = 1,2,...). При этом функция распределения $F(X)$ известна.

Существует следующая теорема.

Если r_i - случайное число, то возможное значение x_i разыгрываемой непрерывной случайной величины X с известной функцией распределения $F(X)$ соответствующее r_i, является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i$$

Алгоритм разыгрывания непрерывной случайной величины***:***

1. Необходимо выбрать случайное число r_i.
2. Приравнять выбранное случайное число известной функции распределения $F(X)$ и получить уравнение $F(x_i) = r_i$.
3. Решить данное уравнение относительно x_i. Полученное значение x_i будет соответствовать одновременно и случайному числу r_i. и заданному закону распределения $F(X)$.

Пример5.2.

Разыграть 3 возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2; 10).

Решение

Функция распределения величины X имеет следующий вид:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

По условию, $a = 2$, $b = 10$, следовательно,

$$F(x) = \frac{x-2}{8}$$

В соответствии с алгоритмом разыгрывания непрерывной случайной величины приравняем $F(X)$ выбранному случайному числу r_i.. Получим отсюда:

$$(x_i - 2)/8 = r_i \quad \Rightarrow \quad x_i = 8r_i + 2 \tag{5.3}$$

Далее в соответствии с алгоритмом выберем три случайных числа, распределенных равномерно в интервале (0; 1). Например r_1 = 0,11; r_2 = 0,17; r_3 = 0,66.

Подставим эти числа в уравнение (5.3).Получим соответствующие возможные значения x :

$$x_1 = 8 \cdot 0{,}11 + 2 = 2{,}88; \quad x_2 = 8 \cdot 0{,}17 + 2 = 3{,}36; \quad x_3 = 8 \cdot 0{,}66 + 2 = 7{,}28$$

Пример 5.3

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с известной функцией

$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x)}$ (x>0, параметр λ> 0 известен)

Требуется найти формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение

В соответствии с алгоритмом разыгрывания непрерывной случайной величины получим уравнение

$$1 - e^{-\lambda x_i} = r_i$$

Решим это уравнение относительно x_i. Получим:

$$e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i, \qquad -\lambda x_i = \ln(1 - r_i), \qquad \Rightarrow \qquad x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$$

Случайное число r_i находится в интервале (0, 1). Следовательно число (1- r_i) также случайное и принадлежит интервалу (0, 1). То есть случайные величины R и 1 - R распределены одинаково, т.е. равномерно в одном и том же интервале (0, 1). Поэтому для отыскания значения x_i можно воспользоваться более простой формулой:

$$x_i = -\tfrac{1}{\lambda}\ln r_i$$

5.2.3. Разыгрывание случайной величины X, распределенной нормально Известно, что если случайная величина R распределена равномерно в интервале (0, 1), то ее математическоеожидание $M(R)$ = 1/2, а дисперсия $D(R)$ = 1/12.

Составим сумму n независимых случайных величин R_j (j = 1,2,...n), которые распределены равномерно в интервале (0, 1). Получим $\sum_{j=1}^{n} R_j$.

Пронормируем эту сумму. Для этого найдем сначала ее математическое ожидание и дисперсию. Известно, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Сумма R_i содержит n слагаемых. Математическое ожидание каждого слагаемого равна 1/2. Следовательно математическое ожидание суммы равно:

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right] = \frac{n}{2};$$

Аналогично для дисперсии суммы R_j получим:

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right] = \frac{n}{12}$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение суммы R_j:

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{n/12}$$

Теперь пронормируем сумму R_j.

Для этого вычтем из суммы R_j математическое ожидание этой суммы и разделим на среднее квадратическое отклонение суммы R_j. Получим

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - n/2}{\sqrt{n/12}};$$ (то есть $\frac{x-a}{\sigma}$)

На основании *центральной предельной теоремы* теории вероятностей при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.

При конечном n распределение можно рассматривать как приближенно нормальное. Например, при $n = 12$ получим достаточно точное для практики приближение

$$\sum_{j=1}^{12} R_j - 6 \Big/ 1 = \sum_{j=1}^{12} R_j - 6$$

Таким образом, получаем, что для того чтобы разыграть возможное значение x_i нормальной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, нужно сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть 6.

$$x_i = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 = S_i - 6$$

Пример 5.4.

1. Разыграть 100 возможных значений случайной величины X распределенной нормально с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.
2. Оценить параметры разыгранной случайной величины X.

Решение

1. Выберем 12 случайных чисел распределенных равномерно в интервале (0, 1) из таблицы случайных чисел, либо из компьютера. Сложим эти числа и из суммы вычтем 6, в итоге получим:

$$x_1 = (0{,}10 + 0{,}09 + \ldots + 0{,}67) - 6 = -0{,}99$$

Поступая аналогичным образом найдем остальные возможные значения $x_2, x_3, \ldots, x_{100}$.

2. Выполнив необходимые расчеты найдем выборочную среднюю, которая является оценкой a^*

и выборочное среднее квадратическое отклонение, которое является оценкой σ^*. Получим:

$$a^* = \overline{x_в} \approx -0{,}05; \quad \sigma^* = \sqrt{D_в} \approx 1{,}04$$

Как видим, оценки удовлетворительны, т.е. a^* близко к нулю, а σ^* близко к единице.

Если требуется разыграть значения нормальной ненормированной случайной величины с математическим ожиданием a отличным от нуля и σ отличным от единицы, то сначала разыгрывают возможные значения x_i нормированной случайной величины, а затем находят искомое значение по формуле

$$z_i = \sigma \cdot x_i + a$$

которая получена из соотношения:

$$x_i = \frac{z_i - a}{\sigma}$$

Таблица 5.1

Формулы для моделирования случайных величин

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирова случайной величины
Экспоненциальный	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]$	$x_i = -b \cdot (\ln \xi_i)^{1/a}$
Гамма-распределение (η - целые числа)	$f(x) = \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} \cdot e^{-\lambda \cdot x} x^{\eta - 1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_j)$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = \bar{x} + \sigma\left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i - 6\right)$

5.3. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло

В реальных условиях функционирования СМО имеются переходные режимы, а входящие и исходящие потоки требований являются далеко не простейшими. В этих условиях для оценки качества функционирования систем обслуживания широко используют **метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**. Основой решения задачи исследования функционирования СМО в реальных условиях является статистическое моделирование входящего потока требований и процесса их обслуживания (исходящего потока требований).

Для решения задачи статистического моделирования функционирования СМО должны быть заданы следующие исходные данные:

- описание СМО (тип, параметры, критерии эффективности работы системы);
- параметры закона распределения периодичности поступлений требований в систему;
- параметры закона распределения времени пребывания требования в очереди (для СМО с ожиданием);
- параметры закона распределения времени обслуживания требований в системе.

Решение задачи статистического моделирования функционирования СМО складывается из следующих этапов.

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i.
2. Равномерно распределенные случайные числа преобразуют в величины с заданным законом распределения:
   - интервал времени между поступлениями требований в систему ($\Delta t_п$);
   - время ухода заявки из очереди (для СМО с ограниченной длиной очереди);
   - длительность времени обслуживания требования каналами (Δt_o).
3. Определяют моменты наступления событий:
   - поступление требования на обслуживание;
   - уход требования из очереди;
   - окончание обслуживания требования в каналах системы.
4. Моделируют функционирование СМО в целом и накапливают статистические данные о процессе обслуживания.
5. Устанавливают новый момент поступления требования в систему, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.
6. Определяют показатели качества функционирования СМО путем обработки результатов моделирования методами математической статистики.

Методику решения задачи рассмотрим на примере ***моделирования СМО с отказами***.

Пусть система имеет два однотипных канала, работающих с отказами, причем моменты времени окончания обслуживания на первом канале обозначим через t_{1i} , на втором канале - через t_{2i} . Закон распределения интервала времени между смежными поступающими требованиями задан плотностью распределения $f_1(t_T)$. Продолжительность обслуживания также является случайной величиной с плотностью распределения $f_1(t_o)$.

Процедура решения задачи будет выглядеть следующим образом:

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i.
2. Равномерно распределенное случайное число преобразуют в величины с заданным законом распределения, используя формулы табл. 5.1. Определяют реализацию случайного интервала времени (Δt_{Π}) между поступлениями требований в систему.
3. Вычисляют момент поступления заявки на обслуживание: $t_i = t_{i-1} + \Delta t_{\Pi}$.
4. Сравнивают моменты окончания обслуживания предшествующих заявок на первом $t_{1(i-1)}$ и втором $t_{2(i-1)}$ каналах.
5. Сравнивают момент поступления заявки t_i с минимальным моментом окончания обслуживания (допустим, что $t_{1(i-1)} < {}_{2(i-1)}$):

– если [$t_i - t_{1(i-1)} < 0$] < 0, то заявка получает отказ и вырабатывают новый момент поступления заявки описанным способом;

– если $\left\lfloor t_1 - t_{2(i-1)} \right\rfloor \geq 0$, то происходит обслуживание.

6. При выполнении условия 5 б) определяют время обслуживания *i*-й заявки на первом канале Δt_{1i} путем преобразования случайной величины ξ_i в величину (время обслуживания /-и заявки) с заданным законом распределения.
7. Вычисляют момент окончания обслуживания *i*-й заявки на первом канале $t_{1i} = \left\lfloor t_{1(i-1)} + \Delta t_{1i} \right\rfloor$.
8. Устанавливают новый момент поступления заявки, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.
9. В ходе моделирования СМО накапливаются статистические данные о процессе обслуживания.
10. Определяют показатели качества функционирования системы путем обработки накопленных результатов моделирования методами математической статистики.

5.4. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем

Под **сложной технической системой** будем понимать систему, состоящую из элементов (два и более). Отказ одного из элементов системы приводит к отказу системы в целом.

Рассмотрим последовательность замен некоторого определенного элемента *Z* данного наименования. Эксплуатация каждого нового элемента начинается с момента окончания срока службы предыдущего. Первый элемент отрабатывает время Δt_1 , второй - Δt_2 , третий - Δt_3 и т. д.

Случайная ситуация, сложившаяся в *k*-м опыте (ситуации) для элемента *Z*, показана на рис. 5.1.

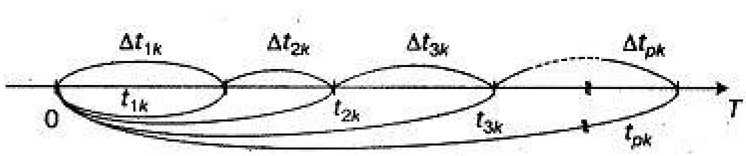

Рис. 5.1. Временная эпюра случайной ситуации при *k*-м опыте в случае мгновенного восстановления отказавшей системы путем замены элемента

На рис. 5.1 видно, что система начинает свою работу в момент времени $t = 0$ и, отработав случайное время Δt_{1k}, выходит из строя в момент $t_{1k} = \Delta t_{1k}$. В этот момент система мгновенно восстанавливается (элемент заменяется) и снова работает случайное время t_{2k}. По истечении

Δ

$t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}$

некоторого времени система (элемент) вновь выходит из строя в момент и вновь мгновенно восстанавливается.

Считают, что интервалы времени между отказами t_{1k}, t_{2k}, ... Δ Δ t_{pk} Δ представляют собой систему взаимно независимых случайных величин с плотностями распределения наработок между отказами $f(t_1)$, $f(t_2)$, … , $f(t_p)$. Δ Δ Δ

Моменты отказов или восстановлений образуют в каждом k-м опыте (испытании) ряд чисел по следующему правилу:

$$t_{1k} = \Delta t_{1k};$$

$$t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k};$$

$$t_{3k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \Delta t_{3k} = t_{2k} + \Delta t_{3k};$$

……………………………………………

$$t_{pk} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \ldots + \Delta t_{pk} = t_{(p-1)k} + \Delta t_{pk}. \qquad (5.4)$$

или

$$t_{pk} = \sum_{i=1}^{p} \Delta t_{ik} = \sum_{i=1}^{p-1} \Delta t_{ik} + \Delta t_{pk}.$$

где t_{ik} - время работы (наработка) элемента до i-го отказа в k–м опыте, час, $i = \overline{1,p}$, $k = \overline{1,N}$.

Δt_{ik} - время работы (наработка) элемента между (i-1)-м и i-м отказами в k–й реализации, час, $i = \overline{1,p}$, $k = \overline{1,N}$.

Числа t_{1k}, t_{2k}, ... ,t_{pk} образуют случайный поток, который называется процессом восстановления. Этот процесс является различным для различных элементов и продолжается до окончания срока службы системы. Изучением таких процессов занимается теория восстановления.

Из большого количества различных процессов восстановления для исследования надежности элементов технической системы (как неремонтируемых, так и ремонтируемых) используют три типа процессов:

- простой, при котором все функции распределения наработок до первого и между последующими отказами $F_i(t)$ равны;
- общий, при котором вид функции распределения наработки до первого отказа элемента, установленного в системе заводом-изготовителем, отличается от вида функций распределения наработок элементов при последующих заменах, т. е. $F_1(t) \neq F_i(t)$, i = 2, 3, 4,…
- сложный, при котором все функции распределения $F_i(t)$ различны.

Основной характеристикой процесса восстановления является функция восстановления $\Omega(t)$ и ее дифференциальная характеристика - плотность восстановления $\omega(t)$, определяемые по следующим формулам:

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t); \qquad (5.5)$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t); \qquad (5.6)$$

где $F_n(t)$ и $f_n(t)$ - соответственно плотность и функция распределения наработки до n-го отказа.

В случае независимости наработок между отказами функции распределения $F_n(t)$ наработок до n-го отказа находятся путем последовательного применения правила свертки для суммы двух случайных величин:

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) \cdot F(\Delta t_n) = \int_0^t F_{n-1}(t - \Delta t) \cdot dF(\Delta t)$$
; (5.7)

$F_1(t) = F(t)$.

Следует отметить, что сложность получения аналитических выражений для $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ по формулам (5.5), (5.6) состоит в том, что свертка (5.7) лишь для некоторых законов распределения вычисляется в конечном виде. Использование аналитических методов расчета плотности $\omega(t)$ и функции восстановления $\Omega(t)$ ограничено из-за сложности математической формализации применяемых стратегий восстановления работоспособности технических систем и необходимости учета множества факторов, влияющих на замену элемента в системе. В этих условиях наиболее эффективным методом расчета $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ является метод Монте-Карло.

Расчет ведущей функции и параметра потока отказов этим методом в случае простого, общего или сложного процессов производится в следующем порядке.

$t_{ik} = t_{(i-1)k} + \Delta t_{ik}$

$t_{1k} = \Delta t_{1k}$,

По известным законам распределения наработок элементов с использованием формул преобразования (табл. 5.1) моделируются массивы случайных величин Δ t_{ik} между (i-1)-м и i-м отказами Размерность каждого массива равна N.

Далее вычисляются значения наработок до i-го отказа t_{ik} по следующим формулам:

; (5.8)

(5.9)

где i – номер отказа, $i = \overline{1, p}$

k – номер реализации при моделировании, $k = \overline{1, N}$

p – $\gamma = CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$ максимальное число отказов элемента, получаемое в k-й реализации случайного процесса

Затем полученные случайные величины наработок t_{ik} группируются по интервалам времени.

$CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$

Номера интервалов, в которые попадают моменты возникновения отказов t_{1k}, t_{2k}, ... ,t_{ik}, ... , t_{pk} определяются по формуле:

, $\omega_j(t) = \sum_{i=1}^{p} n_{ij} \Big/ \Delta t \cdot N = \frac{n_j}{\Delta t \cdot N}$ (5.10)

где $n_j = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$ наименьшее целое число, не меньшее $\frac{t_{ik}}{\Delta t}$;

Δ t_i , $\sum_{j=1} \sum_{i=1}^{p} n_{ij} = \frac{S_j}{N}$; - величина интервала времени

Параметр и ведущая функция потока отказов в j-м интервале времени определяется по следующим формулам:

; $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} n_{ij} = \begin{cases} S_1 = n_1 \\ S_2 = n_1 + n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_j + \ldots + n_k \end{cases}$ (5.11)

(5.12)

где n_{ij} - число попаданий случайной наработки до i-го отказа t_{ik} в j-й интервал времени ($j = \overline{1, h}$) за N реализаций.

(5.13)

. (5.22)

где h - максимальное число интервалов времени.

Пример 5.5. Законы распределения наработок элемента системы до первого и второго отказов и соответствующие параметры этих законов приведены в следующей таблице:

№ отказа	Закон распределения	Параметры закона

		$a(\lambda)$	b
1	Вейбула	1,4	45,8
2	Экспоненциальный	0,3	-

Определите номера временных интервалов, на которых произойдут первый и второй отказы в ходе первого опыта (испытания) (Δt_i = 1 час).

Решение

1. Выберем равномерно распределенное случайное число. Допустим ξ_i = 0,725.
2. Вычислим случайные значения наработок на отказ элемента используя формулы табл. 5.1.

$$t_{11} = \Delta t_{11} = -b \cdot (\ln \xi_1)^{1/a} = -45{,}8 \cdot (\ln 0{,}725)^{1/1{,}4} = 20{,}37$$ час.;

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21};$$

$$\Delta t_{21} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_1 = -\frac{1}{0{,}3} \cdot \ln 0{,}725 = 1{,}07$$ час.;

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21} = 20{,}37 + 1{,}07 = 21{,}44$$ час.

3. Определим номер временного интервала, на котором произойдут отказы

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$$

первый отказ

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{11}}{\Delta t}\right) = CEIL\left(\frac{20{,}37}{1}\right) = 21;$$

второй отказ

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{21}}{\Delta t}\right) = CEIL\left(\frac{21{,}44}{1}\right) = 22.$$

В ходе первой реализации элемент системы первый раз откажет на 21-м временном интервале, а второй отказ произойдет на 22-м временном интервале.

В ходе первой реализации элемент системы первый раз откажет на 21-м временном интервале, а второй отказ произойдет на 22-м временном интервале.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 5.1

Периодичность поступления заявок на обслуживание подчинена показательному закону распределения Средний интервал между поступлениями заявок в систему равен $\bar{t}$ = 2 час. Определите последовательность значений продолжительности интервалов между поступлениями заявок. Число реализаций равно 10.

Задача 5.2

Время обслуживания работника предприятия кассой бухгалтерии является случайной величиной, распределенной в соответствии с законом Вейбула. Среднее время обслуживания $\bar{t}$ = 3 мин., среднее квадратическое отклонение равно σ = 2 мин. Требуется смоделировать случайную величину, отвечающую этим условиям. Число реализаций принять равным 10.

Задача 5.3

При обработке экспериментальных данных было установлено, что время, расходуемое на станции технического обслуживания автомобилей для замены двигателя, распределено по нормальному закону, параметры которого $\bar{x}$ = 2,8 час. на один двигатель и $\sigma_{\bar{x}}$ = 0,6 час. Требуется смоделировать для отмеченных условий случайную величину - время X, расходуемое для замены двигателя. Число реализаций принять равным 5.

Задача 5.4

Время проверки приемки квартального отчета инспектором Налоговой службы (t) величина случайная, распределенная в соответствии с законом Вейбула. Среднее время проверки и приемки равно $\bar{t}$ = 20 мин. Коэффициент вариации величины t равен V_t= 0,52. Требуется смоделировать для заданных условий случайные числа t (число реализаций принять равным 10).

Задача 5.5

Среднее число исправных станков в токарном цехе на заводе равно $\bar{x}$ = 6. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ = 2,2. Требуется смоделировать число исправных станков в цехе (число реализаций равно 5) при условии, что случайная величина X имеет гаммараспределение.

Задача 5.6

Система имеет два элемента. Средняя периодичность первого элемента $\bar{t}_1$ = 60 час., второго элемента - $\bar{t}_2$ = 85 час. Периодичности отказа первого и второго элементов — случайные вели чины, подчиненные экспоненциальному закону распределения. Определите параметр и функцию распределения потока отказов системы по интервалам времени Δt = 8 час. Число реализаций N = 10.

Задача 5.7

Периодичность проверки предприятий налоговой инспекции - величина случайная (Δt), подчиняющаяся закону гамма-распределения. Средний интервал проверки $\Delta \bar{t}$ = 2,5 мес. Коэффициент вариации величины Δt равен V =0,38. Требуется смоделировать для заданных условий возможные моменты проверок предприятия налоговой инспекцией (число реализаций принять равным 10).

Задача 5.8

Среднее число работающих машин на заводе $\bar{x}$ = 25. Коэффициент вариации числа работающих V = 0,6. Требуется смоделировать число работающих машин на заводе (число реализаций равно 10). Случайная величина X имеет распределение Вейбула.

Задача 5.9

После каждой проверки предприятия налоговой инспекцией вероятность появления необходимости аудиторской проверки Данного предприятия P = 0,72. Смоделируйте шесть испытаний. Определите последовательность проведения различных проверок предприятия.

6. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

6.1. Модели управления запасами

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф.Эджуорта и Ф. Харриса, появившимися в конце XIX – начале XX вв., в которых исследовалась простая оптимизационная модель определении экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта.

Запасами называется любой ресурс на складе, который используется для удовлетворения будущих нужд. Примерами запасов могут служить полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также такие специфические товары, как денежная наличность, находящаяся в хранилище. Большинство организаций имеют примерно один тип системы планирования и контроля запасов. В банке используются методы контроля за количеством наличности, в больнице применяются методы контроля поставки различных медицинских препаратов.

Простейшая схема системы управления запасами выглядит следующим образом (рис.6.1.):

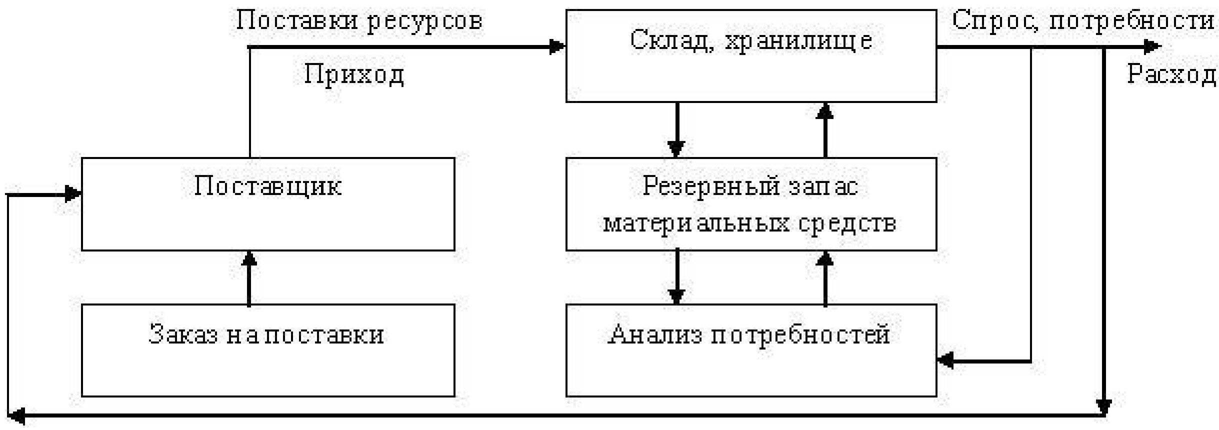

Рис. 6.1. Система управления запасами

Существуют причины, побуждающие организации создавать запасы:
1) дискретность поставок при непрерывном потреблении;
2) упущенная прибыль;
3) случайные колебания:
   - в спросе за период между поставками;
   - в объеме поставок;
   - в длительности интервала между поставками;
4) предполагаемые изменения конъюнктуры:
   - сезонность спроса;
   - сезонность производства;
   - ожидаемое повышение цен.

Имеются также причины, побуждающие предприятия стремиться к минимизации запасов на складе:
1) плата за физическое хранение запаса;
2) потери в количестве запаса;
3) моральный износ продукта.

Рассмотрим определяющие понятия теории управления запасами.

Издержки выполнения заказа (*издержки заказа*) - накладные расходы, связанные с реализацией заказа. В промышленности такими издержками являются затраты на подготовительно-заготовочные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль – издержки, связанные с неудовлетворительным спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенного дохода. Иногда к ним прибавляются издержки на покупку товаров.

Срок выполнения заказов – срок между заказом и его выполнением.

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

.2. Краткая характеристика моделей управления запасами

1.1. Модель оптимального размера заказа.

Предпосылки:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;
2) получение заказа мгновенно;
3) отсутствуют количественные скидки при закупке больших партий товара;
4) единственные меняющиеся параметры – издержки заказа и хранения;
5) исключается дефицит в случае своевременного заказа.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами и их количество за период.

1.2. Модель оптимального размера заказа в предположении, что получение заказа не мгновенно. Следовательно, нужно найти объем запасов, при котором необходимо делать новый заказ.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами; точка восстановления запаса.

1.3. Модель оптимального размера заказа в предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль. Необходимо найти точку восстановления.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; упущенная прибыль.

Результат: оптимальный размер заказа; время между заказами; точка восстановления запаса.

1.4. Модель с учетом производства (в сочетании с условиями 1.1 – 1.3). Необходимо рассматривать уровень ежедневного производства и уровень ежедневного спроса.

Исходные данные: темп спроса; издержки заказа и хранения; упущенная прибыль; темп производства.

Результат: оптимальный уровень запасов (точка восстановления)

1.5. Модель с количественными скидками. Появляется возможность количественных скидок в зависимости от размера заказа. Рассматривается зависимость издержек хранения от цены товара. Оптимальный уровень заказа определяется исходя из условия минимизации общих издержек дл каждого вида скидок.

Модель 1.1 *наиболее экономичного размера заказа.* Заказ, пополняющий запасы, поступает как одна партия. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью пока не достигнет нуля. В этой точке поступает заказ, размер которого равен Q, и уровень запасов восстанавливается до максимального значения. При этом оптимальным решением задачи будет тот размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период (рис. 6.2).

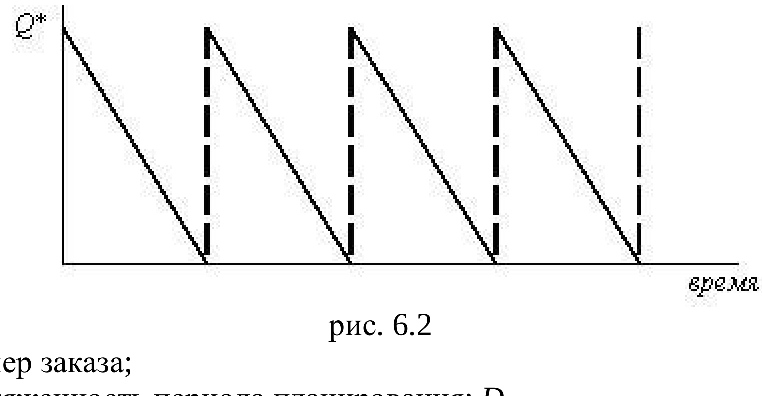

рис. 6.2

Пусть Q – размер заказа;

T – протяженность периода планирования; D – величина спроса за период планирования; d – величина спроса в единицу времени;

K – издержки заказа;

H – удельные издержки за период; h – удельные издержки хранения в единицу времени.

Тогда: $d = \frac{D}{T}$; $h = \frac{H}{T}$;

совокупные издержки заказа = $\frac{D}{Q}K$;

совокупные издержки хранения = ;

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$;

оптимальное число заказов за период $N = \frac{D}{Q^*}$;

время цикла (оптимальное время между заказам) $t^* = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$.

Модель 1.2. Введем предположение о том, что заказ может быть получен не мгновенно, а с течением времени. Тогда нам необходимо заранее делать заказ, чтобы в нужное время иметь достаточное количество товара на складе. Следовательно, нам необходимо найти тот уровень запасов, при котором делается новый заказ. Этот уровень называется точкой восстановления R. Пусть L – время выполнения заказа. Тогда R = величина спроса в единицу времени, умноженная на время выполнения заказа = $d \cdot L$. Другие характеристики системы определяются также, как и в модели1.1. Модель иллюстрируется рис. 6.3.

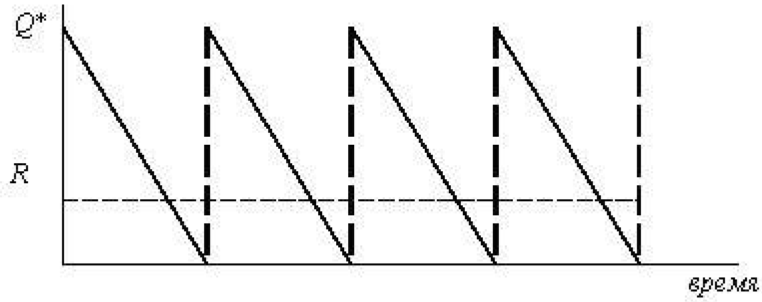

рис. 6.3

Пример 1. Андрей Удачливый является торговым агентом компании TOYOTA и занимается продажей последней модели этой марки автомобиля. Годовой спрос оценивается в 4000 ед. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. руб., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля. Андрей произвел анализ издержек заказа и понял, что средние издержки заказа составляют 25 тыс. руб. на заказ. Время выполнения заказа равно восьми дням. В течение этого времени ежедневный спрос на автомобили равен 20.

- Чему равен оптимальный размер заказа?
- Чему равна точка восстановления?
- Каковы совокупные издержки?
- Каково оптимальное количество заказов в год?
- Каково оптимальное время между двумя заказами, ели предположить, что количество рабочих дней в году равно 200?

Исходные данные

величина спроса за год D = 4000; издержки заказа K = 25;

издержки хранения h = $\frac{9}{200} = 0{,}045$;

цена за единицу c = 90; время выполнения заказа L = 8;

ежедневный спрос d = 20; число рабочих дней T = 200.

Решение

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 20 \cdot 25}{0{,}045}} \approx 149$;

точка восстановления R = 160 – 149 = 11;

число заказов за год $N = \dfrac{D}{Q^*} = 26{,}83$;

совокупные издержки = совокупные издержки заказа + совокупные издержки хранения $C = \dfrac{4000}{149}25 + \dfrac{149}{2}9 = 1341{,}64$;

стоимость продаж = 360000; число дней между заказами t = 7,45.

Модель 1.3. *оптимального размера заказа* в предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль (рис. 6.4).

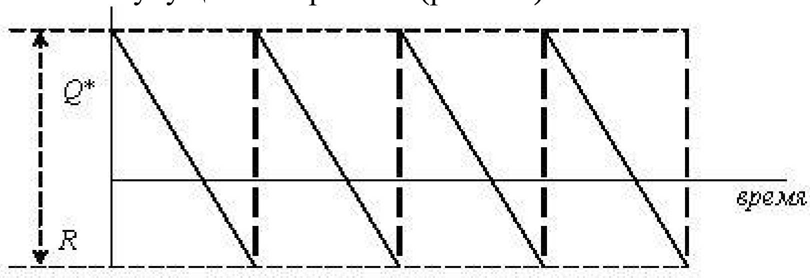

рис. 6.4

Пусть p – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта;

P – упущенная прибыль за период, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта.

Тогда:

оптимальный размер заказа $$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}} \cdot \sqrt{\frac{P+H}{P}};$$

максимальный размер запаса $$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P+H}};$$

максимальный дефицит $$R = Q^* - S^*.$$

Модель 1.4 *производства и распределения*. В предыдущей модели мы допускали, что пополнение запаса происходит единовременно. Но в некоторых случаях, особенно в промышленном производстве, для комплектования партии товаров требуется значительное время и производство товаров для пополнения запасов происходит одновременно с удовлетворением спроса. Такой случай показан на рис. 6.5.

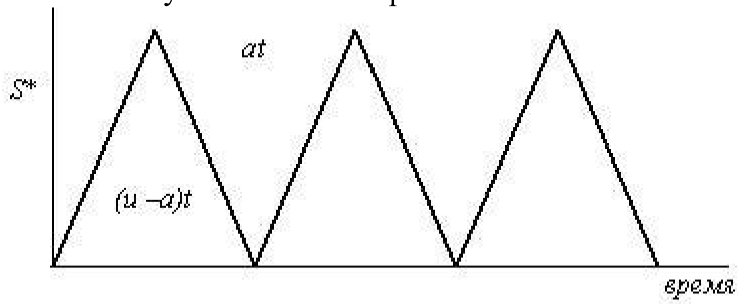

рис. 6.5

Спрос и производство являются частью цикла восстановления запасов.

Пусть u - уровень производства в единицу времени;

K – фиксированные издержки хранения.

Тогда:

совокупные издержки хранения =

$$(средний\quad уровень\quad запасов)\times H = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{u}\right)H;$$

средний уровень запасов = (максимальный уровень запасов)/2;

максимальный уровень запасов = $u \cdot t - d \cdot t = Q\left(1-\frac{d}{u}\right)$;

время выполнения заказа $t = \frac{Q}{u}$;

издержки заказа = $\frac{D}{Q}K$;

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}\left(1-\frac{d}{u}\right)} = \sqrt{\frac{2DK}{H}\left(1-\frac{d}{u}\right)}$;

максимальный уровень запасов $S^* = Q^*\left(1-\frac{d}{u}\right)$.

Модель 1.5 *с количественными скидками*. Для увеличения объема продаж компании часто предлагают количественные скидки своим покупателям. Количественная скидка – сокращенная цена на товар в случае покупки большого количества этого товара. Типичные примеры количественных скидок приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Варианты скидок	1	2	3
Количество, при котором делается скидка	от 0 до 999	от 1000 до 1999	от 2000 и выше
Размер скидки, %	0	3	5
Цена со скидкой	5	4,8	4,75

Пусть I – доля издержек хранения в цене продукта c.
Тогда:
$h = I \cdot c$;

оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{Ic}}$.

Пример 2. Рассмотрим пример, объясняющий принцип принятия решения в условиях скидки. Магазин "Медвежонок" продает игрушечные гоночные машинки. Эта фирма имеет таблицу скидок на машинки в случае покупок их в определенном количестве (табл. 6.1). Издержки заказа составляют 49 тыс. руб. Годовой спрос на машинки равен 5000. годовые издержки хранения в отношении к цене составляют 20%, или 0,2. Необходимо найти размер заказа, минимизирующий общие издержки.

Решение.

Рассчитаем оптимальный размер заказа для каждого вида скидок, т.е. $Q1^*$, $Q2^*$ и $Q3^*$, и получим $Q1^* = 700$; $Q2^* = 714$; $Q3^*=718$.

Так как $Q1^*$ - величина между 0 и 999, то ее можно оставить прежней. $Q2^*$ меньше количества, необходимого для получения скидки, следовательно, его значение необходимо принять равным 1000 единиц. Аналогично $Q3^*$ берем равным 2000 единиц. Получим $Q1^* = 700$; $Q2^* = 1000$; $Q3^* = 2000$.

Далее необходимо рассчитать общие издержки для каждого размера заказа и вида скидок, а затем выбрать наименьшее значение.

Рассмотрим следующую таблицу.

Варианты скидок	1	2	3
Цена	5	4,8	4,75
Размер заказа	700	1000	2000
Цена на товар за год	25000	24000	23750
Годовые издержки заказа	350	245	122,5
Годовые издержки хранения	350	480	950
Общие годовые издержки	25700	24725	24822,5

Выберем тот размер заказа, который минимизирует общие годовые издержки. Из таблицы видно, что заказ в размере 1000 игрушечных гоночных машинок будет минимизировать совокупные издержки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 6.1

Менеджер приобретает в течение года 1500 телевизоров для розничной продажи в свое магазине. Издержки хранения каждого телевизора равны 45 тыс. руб. в год. Издержки заказа – 150 тыс. руб. Количество рабочих дней в году равно 300, время выполнения заказа – 6 дней. Необходим найти:

- оптимальный запас заказа;
- годовые издержки заказа; –

точку восстановления запаса.

Задача 6.2

Менеджер продает 400 водяных кроватей в год, причем издержки хранения равны 1 тыс. руб. за кровать в день и издержки заказа – 40 тс. Руб. Количество рабочих дней равно 250 и время выполнения заказа – 6 дней.

- Каков оптимальный размер заказа?
- Чему равна точка восстановления запаса?
- Каков оптимальный размер заказа, если издержка хранения равны 1,5 тыс. руб.?

Задача 6.3

Владелец маленькой компании, которая выпускает электрические ножи, может производить 150 ножей в день. Дневной спрос на ножи примерно равен 40. Фиксированные издержки производства равны 100 тыс. руб., издержки хранения – 8 тыс.
руб. за нож в год. Каков максимальный заказ следует иметь на складе?

Задача 6.4

Компания закупает у завода-изготовителя лобовые стекла грузовых автомобилей для розничной продажи. В год, за 200 рабочих дней, реализуется около 10 000 стекол. Издержки заказа для компании составляют 400 тыс. руб., ежедневные издержки хранения одного стекла – 6 тыс. руб.

- Чему равен оптимальный размер заказа?
- Каковы минимальные годовые совокупные издержки?

Задача 6.5

Годовой заказ на тостер равен 3 000 единиц, или 10 в день. Издержки заказа равны 25 тыс. руб., издержки хранения – 0,4 тыс. руб. в день. Так как тостер является очень популярным среди покупателей, то в случае отсутствия товара покупатели обычно согласны подождать. Пока не подойдет следующий заказ. Однако издержки, связанные с дефицитом, равны 0,75 тыс. руб. за тостер в день.

- Сколько тостеров будет заказывать менеджер.
- Каков минимальный дефицит?

– Чему равны совокупные издержки?

Задача 6.6

Магазин пользуется популярностью у покупателей благодаря широкому ассортименту экологически чистых продуктов. Большинство покупателей не отказываются от услуг магазина даже том случае, когда интересующий их товар отсутствует в продаже. Они оставляют заказ на товар и ждут, когда поступит новая партия.

Сыр – не самый популярный из всего набора товаров, но администратор магазина регулярно заказывает этот продукт. Годовой спрос на сыр составляет 500 головок. Издержки заказа – 40 тыс. руб. за заказ. Издержки хранения – 5 тыс. руб. в год Упущенная прибыль вследствие дефицита составляет 100 тыс. руб. в год на одну головку сыра.

- Сколько головок сыра следует заказывать, чтобы не допускать дефицита и иметь при этом минимальные общие издержки?
- Сколько сыра следует заказывать, если допустить возможность дефицита?
- Чету равна точка восстановления запаса, если время выполнения заказа 10 дней и число рабочих дней в году 250?
- Чему равен максимальный размер дефицита?

Задача 6.7

Компания предлагает следующие скидки для линолеума размером 2 × 3 м.

Размер заказа	9 кусков или менее	10-50 кусков	50 кусков и более
Цена 1 куска	18 тыс. руб.	17,5 тыс. руб.	17,25 тыс. руб.

Магазин заказывает у компании линолеум. Издержки заказа равны 45 тыс. руб. Годовые издержки хранения равны 50% от цены. Годовой спрос на линолеум в магазине составляет 100 кусков. Какое количество необходимо приобрести?

Задача 6.8

Мебельный салон продает в год около 1000 спальных гарнитуров по цене 50 тыс. руб. Размещение одного заказа на поставку гарнитуров обходится в 40 тыс. руб. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 25% его цены. Салон может получать 3%-ную скидку у поставщика, если размер заказа составит не менее 200 гарнитуров. Следует ли салону заказывать 200 или более гарнитуров и пользоваться скидкой?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абрамов Л.Ф. Капустин В.Ф. Математическое программирование. Л., Изд-во Ленингр. ун-та,1976. - 184 с.
2. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.:Мир,1971. -534 с.
3. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономикоматематические методы и модели". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.
4. Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Сборник задач по исследованию операций. – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 256 с.
5. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. - М.: финансы и статистика, 2002. - 386 с.: ил.
6. Большаков А.С. Моделирование в менеджменте. Учебное пособие. - М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", Рилант, 2000. - 464 с.
7. Большаков А.С. Моделирование в менеджменте. Учебное пособие. - М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", Рилант, 2000. - 464 с.
8. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т.1.- М.:Мир,1972; Т.2,3, 1973.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, 1988.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций.-М.: Наука, 1980.
11. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 436 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XX).
12. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций.-М.: Наука, 1971.
13. Давыдов Э.Т. Исследование операций.- М.: Высш.шк., 1990.

14. Димов Э.М., Калиновский Д.А. Основы исследования операция в экономике: Учебное пособие. – Самара: ПИРС, 1997. – 68 с., ил.
15. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие / Под ред. Б.А. Лагоши. - М.: Финансы и статистика, 1999. - 16 с.: ил.
16. Исследование операций в экономике. По ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
17. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.-М.:Мир,1981.Т.1. 712 с.
18. Исследование операций: В 2-х томах. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.М.:Мир,1981.Т.2. 677 с.
19. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию.-М.: Высш.школа, 1975.
20. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964. 839 с.
21. Карманов В.Г. Математическое программирование.- М.:Наука, 1975.
22. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. Под. ред. И.Ф.Шахнова.-М.: Радио и связь,1981.-560 с.
23. Конюховский П. Математические методы исследования операций. Пособие для подготовки к экзамену. – СПб.: Питер, 2001.
24. Матвеев Л.А. Компьютерная поддержка решений: Учебник. - СПб.: "Специальная литература", 1998. - 472 с.ил
25. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.- 488 с.
26. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: Учебное пособие для студентов вузов, обуч. по спец. «Прикладная математика».-М.:Высш.шк.,1986.- 287с.
27. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.-М.: Наука, 1982, 256 с.
28. Полак Э. Численные методы. Единый подход. -М.:Мир,1974. 376 с.
29. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн.-М.:Мир, 1986.
30. Современное состояние теории исследования операций/Под ред. Н.Н.Моисеева.М.: Наука, 1979.
31. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.- М.: Наука, 1986.- 328 с.
32. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 1. -М.:Мир, 1985.- 496 с.
33. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 2. -М.:Мир, 1985.- 479 с.
34. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001.
35. Фомин Г.П. Математические методы модели в коммерческой деятельности: Учебник. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 544 с.: ил.
36. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике: Учебное пособие. - М.: Издательство БЕК, 2002. - 144 с.
37. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации: Учебное пособие.- Челябинск: ЧГТУ, 1993.- 88 с.
38. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.,1969. 424 с.