ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Лабораторная работа
«Изучение числовых характеристик случайных величин
в среде MATHCAD»

Томск 2009

Лабораторный практикум предназначен для выполнения студентами направления 220200 «Автоматизация и управление» и студентами специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств (в нефтегазовой отрасли)» цикла лабораторных работ по дисциплине «Математические основы кибернетики» / сост., В.А. Рудницкий, Томск, ТПУ, каф. ИКСУ АВТФ, 2009 г.

Целью работы является изучение числовых характеристик случайных величин с помощью инструментов математического пакета Mathcad.

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся в первую очередь *математическое ожидание* и *дисперсия*.

Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание - число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины.

Если ξ -дискретная случайная величина с распределением

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

То ее математическим ожидание $M\xi$ называется величина

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i ,$$

если число значений случайной величины конечно. В противном случае $M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$. При этом если ряд в правой части равенства расходится или сходится условно, то говорят, что величина ξ не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей $p_\xi(x)$ вычисляется по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx .$$

При этом если интеграл в правой части равенства расходится, то говорят, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Если случайная величина η является функцией случайной величины ξ, $\eta = f(\xi)$, то

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\xi(x) dx .$$

Аналогичные формулы справедливы для функций дискретной случайной величины:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \qquad M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i).$$

При вычислении математического ожидания случайной величины полезны его следующие свойства:

- Математическое ожидание константы равно этой константе, т.е. $Mc=c$;
- Математическое ожидание – линейный функционал случайной величины, т.е. при произвольных постоянных a и b верно равенство $M(a\xi+b\eta)=aM\xi+bM\eta$;

- Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е. $M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta$.

Формулы математического ожидания для наиболее известных распределений выглядят следующим образом:

1. биномиальное распределение $P(\xi=k)=C^k_n p^k q^{n-k}$: $M\xi=np$;
2. геометрическое распределение $P(\xi=k)=pq^k$: $M\xi=\frac{q}{p}$;
3. гипергеометрическое распределение $P(\xi=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$: $M\xi=\frac{mM}{N}$;
4. пуассоновское распределение $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$: $M\xi=\lambda$;
5. равномерное распределение $p_\xi(x)=1/(b-a)$, $x\in[a, b]$: $M\xi=(a+b)/2$;
6. экспоненциальное (показательное) распределение $p_\xi(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$: $M\xi=1/\lambda$;
7. нормальное распределение $N(a, \sigma)$ $p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2)$: $M\xi=a$;
8. χ^2-распределение с n степенями свободы $p_{\chi^2}(z)=\left[\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\right]^{-1} z^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z>0$: $M_{\chi 2}=n$;
9. распределение Стьюдента (t-распределение) с n степенями свободы $p_{t_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})^{-1}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$: $Mt_n=0$;
10. F-распределение Фишера с n и m степенями свободы $p_F(x)=\frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{nx}{m})^{-\frac{n+m}{2}}$, $x>0$: $MF=\frac{m}{m-2}$, $m>2$;
11. распределение Парето $p_\xi(x)=\rho a^\rho x^{-\rho-1}$, $x\geq a$, $a, \rho>0$ имеет математическое ожидание только при $\rho>1$: $M\xi=\frac{\rho}{\rho-1}a$;
12. логистическое распределение $p_\xi(x)=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{z}{(1+z)^2}$, $z=\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})$: $M\xi=\alpha$.

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса значений случайной величины около ее математического ожидания. Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi$, то *дисперсией* случайной величины ξ называется величина $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$. легко показать, что $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$. эта универсальная формула одинаково хорошо применима как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных. Величина $M\xi^2$ вычисляется по формулам:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2, \qquad M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)dx$$

для дискретных и непрерывных случайных величин соответственно.

Еще одним параметром для определения меры разброса значений случайной величины является *среднеквадратичное отклонение* σ_ξ, связанное с дисперсией соотношением $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

Перечислим основные свойства дисперсии:

- дисперсия любой случайной величины неотрицательна: $D\xi \geq 0$;
- дисперсия константы равна нулю: $Dc=0$;
- для произвольной константы c: $D(c\xi)=c^2 D\xi$;
- дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(\xi \pm \eta)=D\xi + D\eta$.

Формулы для дисперсий наиболее известных стандартных распределений выглядят следующим образом:

1. биномиальное распределение: $D\xi=npq$;
2. геометрическое распределение: $D\xi=\frac{q}{p^2}$;
3. гипергеометрическое распределение: $D\xi=\frac{M(N-M)(N-n)n}{N^2(N-1)}$;
4. пуассоновское распределение: $D\xi=\lambda$;
5. равномерное распределение: $D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}$;
6. экспоненциальное (показательное) распределение: $D\xi=\lambda^{-2}$;
7. нормальное распределение $N(a, \sigma)$: $D\xi=\sigma^2$;
8. χ^2-распределение с n степенями свободы: $D_{\chi^2}=2n$;
9. распределение Стьюдента с n степенями свободы: $D\xi=\frac{n}{n-2},\ n>2$;
10. F-распределение Фишера с n и m степенями свободы: $DF = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)},\ m>4$;
11. распределение Парето: $D\xi=\frac{\rho\alpha}{(\rho-1)^2(\rho-2)},\quad \rho>2$;
12. логистическое распределение $D\xi=\frac{1}{3}\pi^2\beta^2$.

ЗАДАНИЕ №1

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi=S(\eta)$, которая представляет собой площадь указанной в задании геометрической фигуры, для случайной величины η, распределенной равномерно на промежутке **[a, b]**.

N	Геометрическая фигура	a	b
1	Квадрат со стороной η	1	3
2	Правильный треугольник со стороной η	2	6
3	Круг радиуса η	3	9
4	Эллипс с полуосями η и 2η	4	4
5	Правильный шестиугольник со стороной η	5	7
6	Боковая поверхность тетраэдра с ребром η	6	8
7	Поверхность шара радиуса η	7	9
8	Прямоугольник со сторонами η и 2η	8	10
9	Осевое сечение конуса с радиусом основания η и высотой η	9	11.5
10	Прямоугольный треугольник с катетами η и 2η	10	11.5
11	Прямоугольный треугольник с катетом η и гипотенузой 2η	9	12.5
12	Квадрат со стороной η	8	12
13	Правильный треугольник со стороной η	7	10
14	Круг радиуса η	6	4
15	Эллипс с полуосями η и 2η	5	6
16	Правильный шестиугольник со стороной η	4	5
17	Боковая поверхность тетраэдра с ребром η	3	4
18	Поверхность шара радиуса η	2	4.5
19	Прямоугольник со сторонами η и 2η	1	4.5
20	Осевое сечение конуса с радиусом основания η и высотой η	1.5	3.5

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Записать выражение для функции $\xi=S(\eta)$ от случайной величины η, определяющей площадь фигуры.
2. Вычислить математическое ожидание случайной величины ξ.
3. Вычислить математическое ожидание случайной величины ξ^2.
4. Вычислить дисперсию случайной величины $\xi=S(\eta)$ по формуле $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$.

<u>Моменты</u>

В теории вероятностей и математической статистике, помимо математического ожидания и дисперсии, используются и другие числдовые характеристики случайных величин. В первую очередь это *начальные* и *центральные моменты*.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание kой степени случайной величины ξ, т.е. $\alpha_k=M\xi^k$.

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина μ_k, определяемая выражением $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$.
Можно заметить, что математическое ожидание случайной величины представляет собой момент первого порядка $\alpha_1 = M\xi$, а дисперсия – центральный момент второго порядка $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$.

Существуют формулы, позволяющие выразить центральные моменты случайной величины через ее начальные моменты, например: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \mu_2 - \alpha_1^2$. В дальнейшем будет использоваться формула $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1^3$.

Отметим еще одно важное свойство: если плотность распределения вероятностей случайной величины симметрична относительно прямой $x = M\xi$, то все ее центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

В теории вероятностей и в математической статистике в качестве меры асимметрии распределения служит *коэффициент асимметрии*

$$\beta_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3},$$

где μ_3- центральный момент третьего порядка; $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\mu_2}$ - среднеквадратичное отклонение.

Коэффициент асимметрии – величина безразмерная, а по его знаку можно судить о характере асимметрии. Как правило, если коэффициент асимметрии положителен, то график плотности вероятностей имеет более крутой «левый склон», и наоборот, при отрицательном коэффициенте асимметрии «круче правый склон». Если график симметричен, то коэффициент асимметрии равен нулю.

ЗАДАНИЕ №2

Вычислить коэффициент асимметрии случайной величины ξ с заданным распределением.

N	Распределение
1	Биномиальное с параметрами n=20, p=0.3
2	Пуассоновское с параметром $\lambda=2$
3	Геометрическое с параметрами n=20, p=0.3
4	Равномерное на промежутке [-2, 3]
5	Пуассоновское с параметром $\lambda=3$
6	Нормальное N(1,4)
7	Экспоненциальное с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
8	Логистическое с плотностью $p_\xi(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-(x-1)/2}}{(1+e^{-(x-1)/2})^2}$
9	Парето с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 8x^{-3}, & x \ge 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$
10	Геометрическое с параметрами n=30, p=0.35

11	Рэлея с плотностью $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{3}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2/6}$
12	Равномерное на промежутке [-2, 3]
13	Биномиальное с параметрами n=25, p=0.15
14	Равномерное на промежутке [-2, 6]
15	Экспоненциальное с плотностью $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \ge 0 \\ 0, & \mathbf{x} < 0 \end{cases}$
16	Парето с плотностью $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 18\mathbf{x}^{-3}, & \mathbf{x} \ge 3 \\ 0, & \mathbf{x} < 3 \end{cases}$
17	$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 \mathbf{x}, & \lvert \mathbf{x} \rvert \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \lvert \mathbf{x} \rvert > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
18	Биномиальное с параметрами n=30, p=0.2
19	Нормальное N(1,2)
20	Геометрическое с параметрами n=25, p=0.25

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Определить значения параметров распределения случайной величины.
2. Определить центральный момент третьего порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определить центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Вычислить коэффициент асимметрии.
5. Построить график плотности вероятности.

Эксцесс

Нормальное распределение наиболее часто используется в теории вероятностей и в математической статистике, поэтому график плотности вероятностей нормального распределения стал своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. Одним из параметров, определяющих отличие сравниваемого распределения от нормального, является эксцесс.

Эксцесс $\boldsymbol{\gamma}$ случайной величины ξ определяется равенством

$$\gamma = \frac{\mu_4}{(\mathbf{D}\xi)^2} - 3 .$$

Естественно, что у нормального распределения $\boldsymbol{\gamma}$**=0.** Если $\boldsymbol{\gamma}$**>0,** то это означает, что график плотности вероятностей $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x})$ сильнее «заострен», чем у нормального распределения. Если же $\boldsymbol{\gamma}$**<0,** то «заостренность» графика $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x})$ меньше, чем у нормального распределения.

ЗАДАНИЕ №3

Вычислить эксцесс случайной величины ξ с заданным распределением. Выполните вычисления для распределений из Задания 2.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Определить значения параметров распределения случайной величины.
2. Определить центральный момент четвертого порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определить центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Вычислить эксцесс случайной величины.
5. Построить графики плотности вероятностей для заданного распределения и график плотности вероятностей нормального распределения N(0,1) в одних осях.

Обратите внимание, MathCAD не может вычислить интегралы функций, заданных разными выражениями на разных промежутках. Поэтому при вычислении моментов необходимо использовать свойство интеграла по симметричному промежутку от четной функции. Для того чтобы определить плотность вероятностей равномерного распределения, щелкните по кнопке “AddLine” в панели “Programming Toolbar”, введите в первой строке выражение для функции, щелкните по кнопке “if” и введите условие.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Задания.
3. Рабочий документ Mathcad для всех указанных задач с комментариями.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое математическое ожидание случайной величины?
2. Что характеризует дисперсия случайной величины?
3. Какую информацию можно получить на основании коэффициента асимметрии?
4. Для чего вводят понятие эксцесса?