ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Лабораторная работа

«Изучение распределений непрерывных случайных величин в среде MATHCAD»

Томск 2009

Лабораторный практикум предназначен для выполнения студентами направления 220200 «Автоматизация и управление» и студентами специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств (в нефтегазовой отрасли)» цикла лабораторных работ по дисциплине «Математические основы кибернетики» / сост., В.А. Рудницкий, Томск, ТПУ, каф. ИКСУ АВТФ, 2009 г.

Целью лабораторной работы является изучение наиболее распространенных непрерывных случайных величин в среде математического пакета Mathcad.

Как известно, каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. Если ξ - случайная величина, то функция $\mathbf{F_\xi(x) = P(\xi<x)}$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ. Здесь $\mathbf{P(\xi<x)}$ – вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение меньшее $\mathbf{x}$. Если $\mathbf{F_\xi(x)}$ непрерывна, то случайная величина ξ называется *непрерывной случайной величиной.* В случае, когда $\mathbf{F_\xi(x)}$ непрерывно дифференцируема, то более наглядное представление о случайной величине дает *плотность вероятности* случайной величины $\mathbf{p_\xi(x)}$, которая связана с функцией распределения $\mathbf{F_\xi(x)}$ соотношениями

$$\mathbf{F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(t)dt} \quad \text{и} \quad \mathbf{p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}}.$$

Вероятность того, что значение случайной величины ξ попадет в интервал $\mathbf{[a, b]}$, вычисляется для непрерывной случайной величины по формуле

$$\mathbf{P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(t)dt}.$$

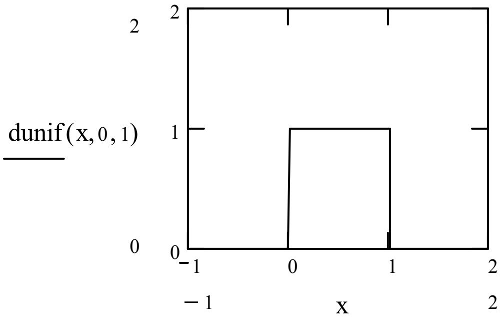
Как и в случае дискретных случайных величин изучение непрерывной случайной величины заключается в исследовании ее функции распределения, которая содержит полную информацию об этой величине. Поэтому обратимся к рассмотрению наиболее распространенных законов распределения непрерывной случайной величины.

1.Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина ξ, принимающая значения на отрезке **[a, b],** распределена равномерно на **[a, b],** если плотность распределения $\mathbf{p_\xi(x)}$ и функция распределения случайной величины $\mathbf{F_\xi(x)}$ имеют вид:

$$\mathbf{p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}} \qquad \mathbf{F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}}$$

В Mathcad , в случае равномерного распределения, значения плотности распределения и функции распределения случайной величины в точке **x** вычисляются с помощью встроенных функций, соответственно, dunif(x, a,b) и punif(x,a,b). Пример использования этих функций в рабочем документе показан на рисунке 1.



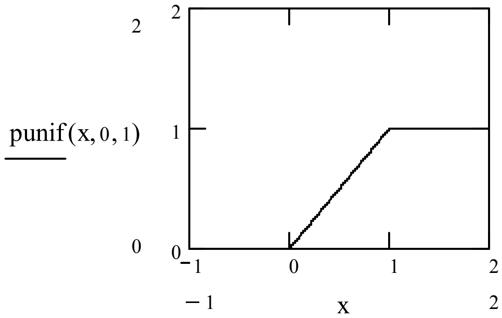


Рисунок 1. Графики плотности вероятностей и функции распределения случайной величины ξ, принимающей значения на отрезке [0, 1] и имеющей равномерное распределение.

2. Экспоненциальное (показательное распределение)

Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ, если плотность распределения $\mathbf{p}_\xi$ имеет вид

$$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} < \mathbf{0}, \\ \lambda \mathbf{e}^{-\lambda \mathbf{x}}, & \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что показательное распределенная случайная величина принимает только неотрицательные значения. Функция распределения такой случайной величины имеет вид

$$\mathbf{F}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} \le \mathbf{0} \\ \mathbf{1 - e}^{-\lambda \mathbf{x}}, & \mathbf{x} > \mathbf{0}. \end{cases}$$

В Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, вычисляются с помощью встроенных функций dexp(x, λ) и pexp(x, λ) соответственно.

На рисунке 2 приведен фрагмент рабочего документа, содержащего графики плотностей вероятностей и функций распределения случайных величин для параметров λ**=1** и λ**=2**.

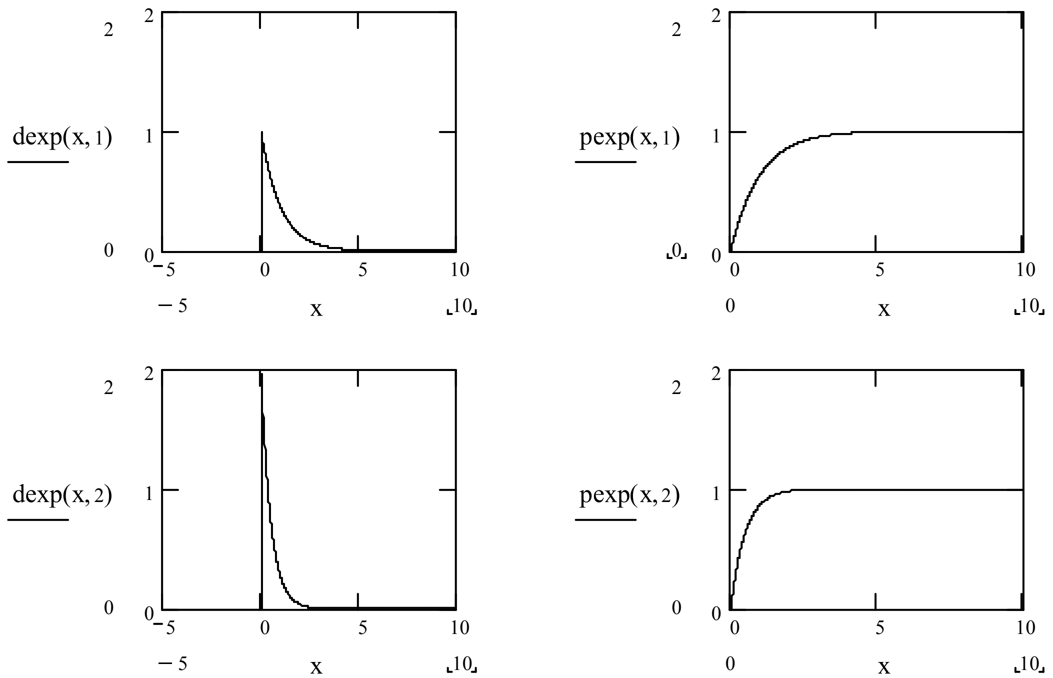


Рисунок 2. Графики плотностей вероятностей и функций распределения случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметрами λ=1 и λ=2.

3. Нормальное распределение

Это распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами **a** и **σ**, **σ>0**, это записывается в форме **ξ ~N (a, σ),** если ее плотность распределения $\mathbf{p}_\xi$ имеет вид

$$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, если **a=0** и **σ=1, ξ ~N (0, 1).** Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2}\right),$$

а его функция распределения $\mathbf{F}_\xi(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{x})$, где $\Phi(\mathbf{x})$ – функция Лапласа:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\mathbf{x}}\exp\left(-\frac{\mathbf{z}^2}{2}\right)\mathbf{dz}.$$

Функция распределения нормальной величины **η ~N (a, σ),** также выражается через функцию Лапласа

$$\mathbf{F}_\eta(\mathbf{x}) = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\sigma}\right).$$

Возможность выражения плотности распределения и функции распределения с помощью функции Лапласа обусловили широкое распространение нормального распределения при решении различных задач теории вероятности и математической статистики.

В Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции распределения нормальной случайной величины с параметрами **a** и **σ**, находятся встроенными функциями dnorm(x, a , σ) и pnorm(x, a , σ).

На рисунке 3 приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения случайных величин для **ξ ~N (0, 1)** и **η ~N (1, 2).**

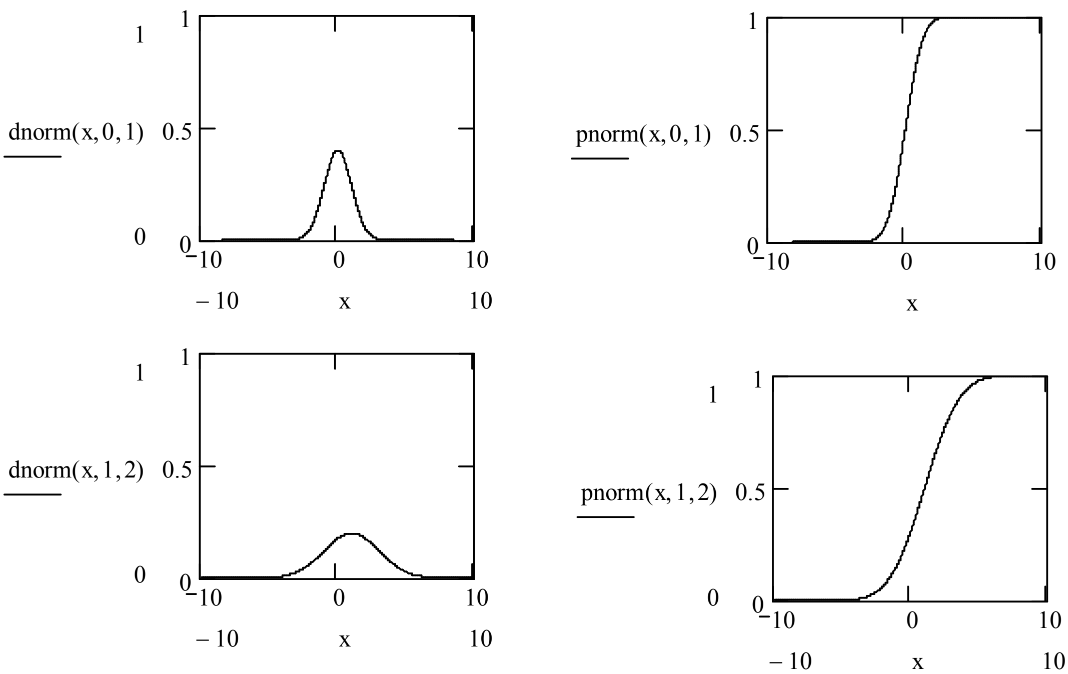


Рисунок 3. Графики плотности вероятностей и функций распределения случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение для ξ ~N (0, 1) и η ~N (1, 2).

4. Распределение хи-квадрат (χ^2-распределение)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение **N(0, 1).** Можно составить случайную величину $\chi^2_n = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_n^2$. Ее распределение называется χ^2*-распределением* с **n** степенями свободы. Выражение плотности распределения этой случайной величины определяется следующим образом:

$$p_n(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} z^{\frac{n-2}{2}} \exp(-\dfrac{z}{2}) & z \ge 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$- гамма функция Эйлера $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty x^{z-1} \exp(-z)dz$.

В среде Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции распределения с **n** степенями свободы вычисляется встроенными функциями dchisq (x, n) и pchisq (x, n).

На рисунке 4 приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для χ^2-распределения с двумя, четырьмя и восьмью степенями свободы.

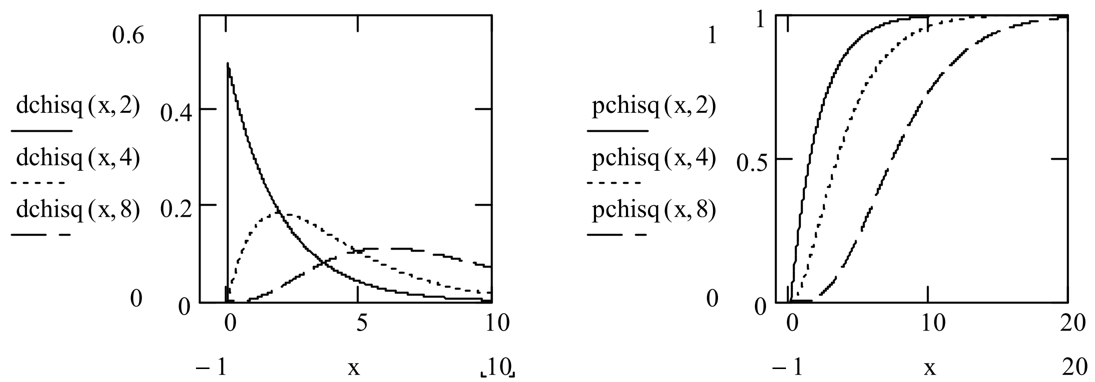


Рисунок 4. Графики плотности вероятностей и функций распределения для χ^2-распределения с двумя, четырьмя и восьмью степенями свободы.

5. Распределение Стьюдента

Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина χ_n^2 - распределение с n степенями свободы. Если ξ и χ_n^2 независимы, то про случайную величину $\tau_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$ говорят, что она имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы **n**. Доказано, что плотность вероятности такой случайной величины вычисляется по формуле

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad x \in R$$

При больших значениях **n** распределение Стьюдента практически не отличается от **N(0,1).**

В Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции Стьюдента с **n** степенями свободы вычисляются встроенными функциями dt(x, n) и pt(x, n).

На рисунке 5 показан пример использования этих функций для построения соответствующих графиков.

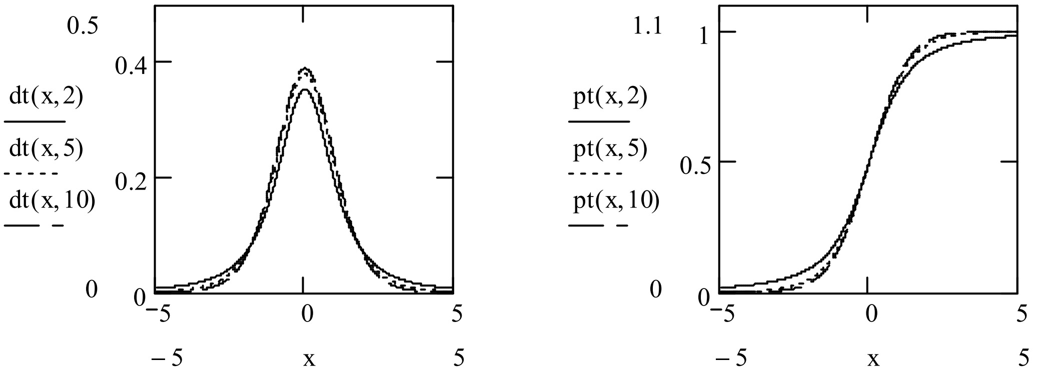


Рисунок 5. Графики плотности вероятностей и функций распределения при n=2,5,10.

6.Распределение Фишера

Пусть случайные величины χ_n^2 и χ_m^2 независимы и имеют распределение χ^2 с **n** и **m** степенями свободы. Тогда случайная величина $F_{n,m} = \dfrac{\chi_n^2 / n}{\chi_m^2 / m}$ имеет F-распределение с плотностью вероятности

$$p_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} \cdot \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{\left(1+\frac{nx}{m}\right)^{\frac{n+m}{2}}}, \qquad x > 0.$$

В Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции Фишера вычисляются встроенными функциями dF(x, n, m) и pF(x, n,m).

На рисунке 6 приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения для **n=2,5** и **m=5,2.**

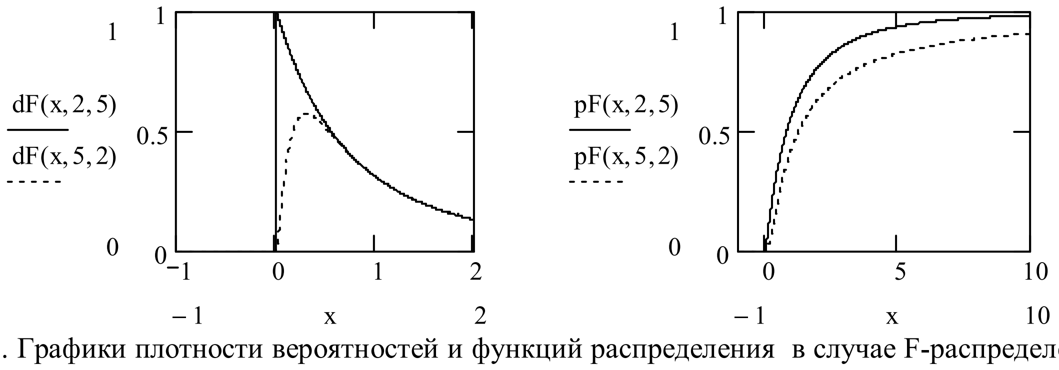


Рисунок 6. Графики плотности вероятностей и функций распределения в случае F-распределения для n=2,5 и m=5,2

7. Распределение Парето

Это распределение часто используется для экономических исследований плотность вероятностей для случайной величины при этом распределении имеет вид

$$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} < \mathbf{a}, \\ \rho \mathbf{a}^{\rho} \mathbf{x}^{-(\rho+1)}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{a}, \end{cases}$$

где **a>0, ρ>0**.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий пример определения и построения графиков (рисунок 7) плотности вероятностей и функций распределения Парето. Поскольку в Mathcad нет встроенных функций для этого распределения, они определяются исходя из соглашения об именах для имеющихся статистических функций, как функции переменной **x** и параметров **a** и ρ: dP(x,p,a) и pP(x,p,a) - соответственно для плотности вероятностей и функции распределения Парето (параметр ρ обозначен как **p**).

$$dP(x,p,a) := \left| \begin{array}{l} p \cdot a^{p} \cdot x^{-(p+1)} \ \text{ if } x \geq a \\ 0 \ \text{ if } x < a \end{array} \right. \qquad pP(x,p,a) := \left| \begin{array}{l} 0 \ \text{ if } x < a \\ \displaystyle\int_a^x p \cdot a^{p} \cdot t^{-(p+1)}\, dt \ \text{ if } x \geq a \end{array} \right.$$

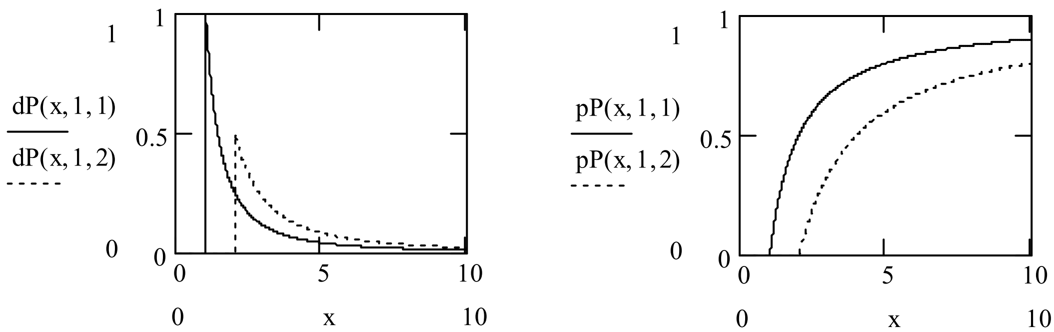


Рисунок 7. Графики плотности вероятностей и функций распределения в случае распределения Парето.

8. Логистическое распределение

Это еще одно распределение, широко применяемое в экономических исследованиях. Оно имеет следующую функцию распределения:

$$\mathbf{F}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \mathbf{exp}(-\dfrac{\mathbf{x} - \alpha}{\beta})}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R},$$

где α и β - параметры распределения.

Плотность распределения вероятностей для логистического распределения вычисляется по формуле:

$$\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\beta} \cdot \frac{\mathbf{exp}(-\dfrac{\mathbf{x} - \alpha}{\beta})}{\mathbf{1} + \mathbf{exp}(-\dfrac{\mathbf{x} - \alpha}{\beta})^{\mathbf{2}}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

По своим свойствам логистическое распределение очень похоже на нормальное.

В среде Mathcad значения в точке **x** плотности распределения и функции распределения для логистического распределения вычисляются встроенными функциями соответственно dlogis(x,α,β) и plogis(x,α,β).

Графики плотности вероятностей и функций распределения для **α=0, β=1, 2** показаны на рисунке 8.

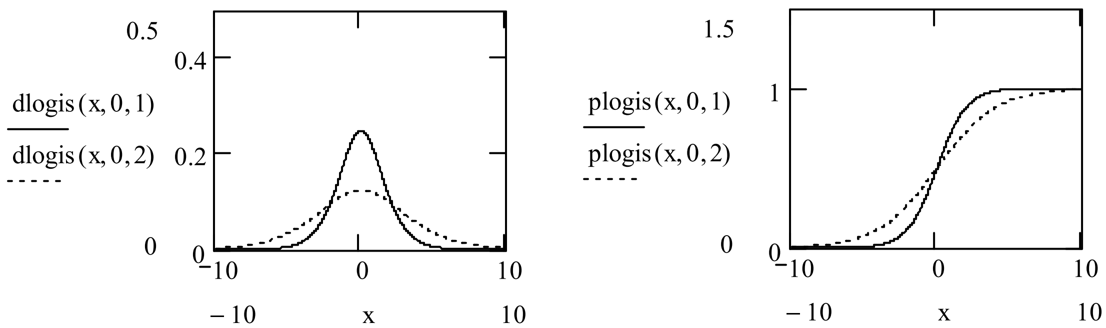


Рисунок 8. Графики плотности вероятностей и функций распределения в случае логистического распределения.

ЗАДАНИЕ

Построить графики плотности распределения и функции распределения для экспоненциального, нормального, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, Парето и логистического распределений. Найти вероятность того, что значение случайной величины ξ попадет в заданный интервал **[a, b].** Исследовать поведение $\mathbf{p_\xi(x)}$ и $\mathbf{F_\xi(x)}$ при заданном изменении параметров распределений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Построить графики плотности распределения и функции распределения для показательного распределения с параметром λ, равным **N**. Здесь **N** – номер варианта.
2. Построить графики плотности распределения и функции распределения в случае нормального закона распределения случайной величины. Параметры распределения задаются преподавателем.
3. Построить графики плотности распределения и функции распределения χ^2 с указанным числом степеней свободы **k=N**. Здесь **N** – номер варианта. При построении в тех же осях для сравнения построить графики стандартного нормального распределения.
4. Построить графики плотности распределения и функции распределения Стьюдента с указанным числом степеней свободы, равным **k=N**. Здесь **N** – номер варианта. В тех же осях для сравнения построить графики стандартного нормального распределения.
5. Построить графики плотности распределения и функции распределения Фишера для указанных в Таблице 1 значений **n** и **m**.
6. Построить графики плотности распределения и функции распределения Парето для указанных в Таблице 2 значений α и ρ.
7. Построить графики плотности распределения и функции распределения для логистического распределения при значениях параметров α=α и β=ρ. Значения α и ρ берутся из Таблицы 2.
8. В пп. 1÷7 для указанных преподавателем значений **a** и **b** найти вероятность того, что значение случайной величины ξ попадет в заданный интервал **[a, b].**

9. В пп. 1÷7 построить $\mathbf{p}_\xi(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}_\xi\ (\mathbf{x})$ для 5 различных значений параметров распределений.

Таблица 1.

N	n	m
1	6	4
2	7	4
3	8	4
4	9	4
5	10	4
6	9	5
7	8	5
8	7	5
9	6	3
10	5	3
11	4	2
12	5	2
13	6	3
14	7	4
15	8	4
16	9	5
17	10	5
18	9	5
20	7	5

Таблица 2.

N	α	ρ
1	1	1
2	1.5	1
3	1.6	1
4	1.7	1
5	1.8	1
6	1.9	1
7	2.0	1.5
8	2.1	1.5
9	2.2	1.5
10	2.3	1.5
11	2.1	2
12	2.5	2
13	2.6	2
14	2.7	2
15	2.8	2
16	2.9	2
17	3	2.5
18	3.1	2.5

19	3.2	2.5
20	3.3	2.5

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Рабочий документ Mathcad для всех указанных распределений с комментариями.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется непрерывной случайной величиной?
2. Чему равна вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение меньшее x?
3. При каких условиях случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение?
4. Когда распределение Стьюдента не отличается от нормального распределения?