О Г Л А В Л Е Н И Е

Глава 1. Ряды Фурье

1.1. ПОНЯТИЕ О ПРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В природе и технике мы часто встречаемся с периодическими функциями времени. Процессы, связанные с работой любой машины, любого механизма, процессы и явления, изучаемые в курсе физики, электротехнике дают нам примеры такого рода величин. В настоящее время периодические функции хорошо изучены и широко используются в различных областях техники.

Число $T \neq 0$ называется *периодом функции* $y = f(x)$ если для любого x из области определения функции числа $x-T$, $x+T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x \pm T) \tag{1.1}$$

Из этого определения следует, что если T – период функции, то ее периодом будет также kT, где k – любое целое число. Действительно,

$$f(x) = f(x \pm T) = f\big((x \pm T) \pm T\big) = \ldots = f(x \pm kT).$$

Поэтому, обычно, говоря о периоде функции, имеют в виду наименьшее положительное число, удовлетворяющее равенству (1.1).

Например, так как

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+2k\pi), \quad \cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+2k\pi),$$

то функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – периодические функции периода 2π. Аналогично, в силу равенств

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x+k\pi), \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg}(x+k\pi)$$

функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – периодические функции периода π.

Отметим некоторые свойства периодических функций.

1) *Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T является периодической функцией того же периода T.*

Так, например, функция $y = A\sin x + B\cos x$ – периодическая функция периода $T = 2\pi$.

2) *Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\dfrac{T}{a}$.*

Действительно, для любого x

$$f\left(a\left[x + \frac{T}{a}\right]\right) = f(ax+T) = f(ax). \tag{1.2}$$

Например, для функции $y=\sin\omega x$ имеем:

$$\sin\omega x=\sin(\omega x+2\pi)=\sin\left(\omega\left[x+\frac{2\pi}{\omega}\right]\right).$$

Следовательно, эта функция имеет период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ и, по предыдущему свойству, такой же период будет иметь функция $y=A\sin\omega x+B\cos\omega x$.

С геометрической точки зрения, умножение аргумента функции на число a означает сжатие при $a>1$ и растяжение при $a<1$ графика этой функции вдоль оси Ox.

3) *Если $f(x)$ – периодическая функция периода T, то любые два интеграла от этой функции, взятые по промежутку длины T, равны между собой (предполагается, что эти интегралы существуют):*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx \qquad (1.3)$$

Действительно,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{b+T} f(x)dx+\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx=\left|\begin{matrix} x=u+T, & x_н=b+T=u_н+T & \Rightarrow & u_н=b \\ dx=du, & x_в=a+T=u_в+T & \Rightarrow & u_в=a \end{matrix}\right|=$$

$$=\int_b^a f(u+T)du=\left|\begin{matrix} f(u+T)=f(u),\text{ т.к.} \\ f(u)-\text{периодическая} \end{matrix}\right|=\int_b^a f(u)du=\int_b^a f(x)dx.$$

Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\cancel{\int_a^b f(x)dx}+\int_b^{b+T} f(x)dx+\cancel{\int_b^a f(x)dx}=\int_b^{b+T} f(x)dx.$$

Дадим геометрическую иллюстрацию формулы (1.3). Построим график периодической функции. Для этого достаточно знать ее аналитическое выражение на отрезке $[0;T]$, построить график функции на этом отрезке и затем продолжить его вправо и влево по периодическому закону. При этом, площадь криволинейной трапеции с основанием $[0;T]$ будет равна площади криволинейной трапеции с основанием $[\alpha;\alpha+T]$ (см рис.1).

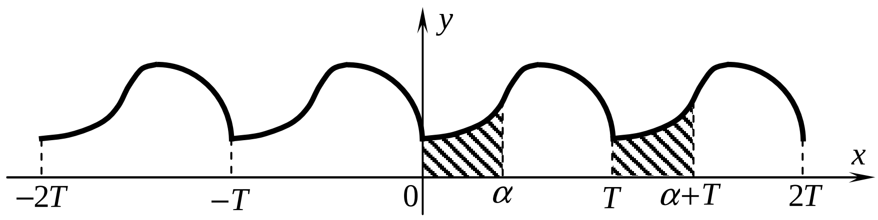


рис. 1

В частности, если $\alpha = -\dfrac{T}{2}$, то $\alpha + T = \dfrac{T}{2}$ и из (1.3) следует

$$\int_0^T f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \qquad (1.4)$$

1.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ

Простейшей тригонометрической функцией является функция $y = \sin x$. Рассмотрим функцию, которая получится если домножить эту функцию на постоянный множитель, а аргумент заменить на линейную функцию от x, т.е. функцию

$$y = A\sin(\omega x + \alpha). \qquad (1.5)$$

Это периодическая функция с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Имеем:

$$y = A\sin(\omega x + \alpha) = A(\sin\omega x \cdot \cos\alpha + \cos\omega x \cdot \sin\alpha) =$$
$$= (A\cos\alpha)\cdot\sin\omega x + (A\sin\alpha)\cdot\cos\omega x.$$

Обозначим $A\cos\alpha = b$, $A\sin\alpha = a$. Тогда

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и
$$y = a\cdot\sin\omega x + b\cdot\cos\omega x. \qquad (1.6)$$

Функция вида (1.5) или (1.6) называется *гармоникой* или *синусоидальной функцией*. При этом постоянная A называется *амплитудой*, выражение $(\omega x + \alpha)$ – *фазой*, α – *начальной фазой* (фаза при $x = 0$), ω – частотой (ω – целое положительное число, связанное с периодом соотношением $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$).

График синусоидальной функции $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ получается из графика синусоиды $y = \sin x$ следующим образом:

1) растяжением по оси Oy с коэффициентом растяжения A;

2) сжатием графика $y = A\sin x$ по оси Ox с коэффициентом сжатия ω;

3) смещением полученного графика по оси Ox на величину $-\dfrac{\alpha}{\omega}$ (т.е. вправо при α отрицательном и влево при α положительном).

ПРИМЕР. Построим график функции $y = 2\sin(4x - 8)$. Здесь $A = 2$, $\omega = 4$, $\alpha = -8 < 0$.

1) Построим график функции $y = \sin x$.

2) Растянем этот график по оси Oy в 2 раза и получим график функции $y = 2\sin x$ (см. рис. 2).

3) Сжатием по оси Ox в 4 раза получим график функции $y = 2\sin 4x$ (см. рис. 3).

4) Сместим полученный график влево на $2 = \dfrac{8}{4}$ и получим искомый график (см. рис. 4).

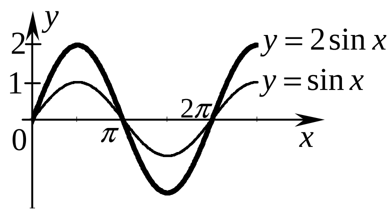


Рис. 2

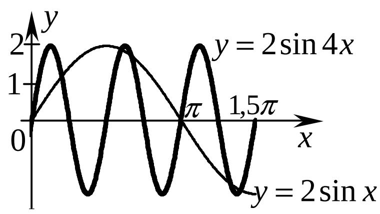


Рис. 3

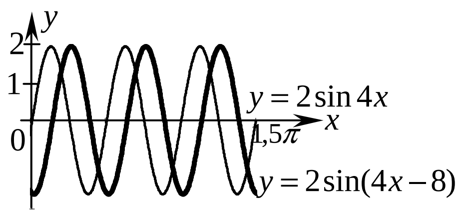


Рис. 4

Сложение гармоник одной частоты (одного периода) дает гармонику той же частоты. Действительно,

$$y_1 = A_1 \sin(\omega x + \alpha_1) = a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x,$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega x + \alpha_2) = a_2 \cos \omega x + b_2 \sin \omega x,$$

$$\Rightarrow \quad y = y_1 + y_2 = (a_1 + a_2)\cos \omega x + (b_1 + b_2)\sin \omega x.$$

Сложение гармоник с частотами, кратными ω, т.е. с частотами ω, 2ω, 3ω, … , $n\omega$ дает более сложную периодическую функцию, чем синусоидальная функция. Функция

$$f(x) = A_1 \sin(\omega x + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega x + \alpha_2) + \ldots + A_n \sin(n\omega x + \alpha_n) \quad (1.7)$$

называется *тригонометрическим полиномом* n*-го порядка*.

В (1.7) первая гармоника

$$A_1 \sin(\omega x + \alpha_1) = a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x$$

имеет период $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$, вторая гармоника

$$A_2 \sin(2\omega x + \alpha_2) = a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x$$

имеет период $T_2 = \dfrac{2\pi}{2\omega}$, ... , n-я гармоника

$$A_n \sin(n\omega x + \alpha_n) = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

имеет период $T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega}$. Период тригонометрического полинома (1.7) равен периоду первой гармоники. Действительно,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A_1 \sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha_1\right] + A_2 \sin\left[2\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha_2\right] +$$

$$+ A_3 \sin\left[3\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha_3\right] + \ldots + A_n \sin\left[n\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha_n\right] =$$

$$= A_1 \sin[(\omega x + 2\pi) + \alpha_1] + A_2 \sin[2(\omega x + 2\pi) + \alpha_2] + \ldots + A_n \sin[n(\omega x + 2\pi) + \alpha_n] =$$

$$= A_1 \sin(\omega x + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega x + \alpha_2) + \ldots + A_n \sin(n\omega x + \alpha_n) = f(x)$$

Таким образом, подбирая различные амплитуды A_i и начальные фазы α_i различных гармоник и увеличивая n, можно получить разнообразные периодические функции с периодом, равным периоду первой гармоники. При этом, совокупность величин A_i называется *амплитудным спектром*, а совокупность начальных фаз α_i – *фазовым спектром*.

Прибавим к сумме (1.7) постоянное слагаемое $\dfrac{a_0}{2}$, означающее сдвиг начала отсчета. Получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) + \ldots +$$

$$+ (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

Эта функция дает закон сложного периодического колебания с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. В частности,

1) если $T = 2\pi$, т.е. $\omega = 1$, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx);$$

2) если $T=2\ell$, т.е. $\omega=\frac{\pi}{\ell}$, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Теперь рассмотрим обратную задачу. Пусть $f(x)$ – периодическая функция ($T=2\pi$), описывающая некоторое колебательное движение. Естественно возникает вопрос о представлении этой функции в виде суммы простейших колебаний (гармоник). При этом заранее известно, что период функции должен быть целым кратным периоду любой гармоники, входящей в эту сумму. Тогда гармоники, сумма которых должна быть равна $f(x)$, имеют вид $A_n\sin(nx+\alpha)$, т.е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k\sin(kx+\alpha),$$

или
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

или
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{1.8}$$

Но оказалось, что если брать конечное число гармоник, то не всегда удается представить $f(x)$ в виде суммы (1.8). В общем случае такое представление возможно, только если число слагаемых бесконечно, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{1.9}$$

Функциональный ряд (1.9) называется *тригонометрическим рядом*, a_0, a_k, b_k – коэффициенты тригонометрического ряда.

Отметим несколько фактов, касающихся сходимости ряда (1.9). Имеем: $|a_k\cos kx|\le|a_k|$, $|b_k\sin kx|\le|b_k|$.

Поэтому, если ряд $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$ сходится, то и ряд (1.9) сходится на всей числовой оси, притом равномерно.

Кроме того, если ряд (1.9) равномерно сходится на $[-\pi;\pi]$, то в силу периодичности слагаемых, он будет равномерно сходиться на всей числовой прямой, а его сумма $f(x)$ будет функцией периодической (период 2π) и непрерывной (так как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция).

В дальнейшем будем решать задачу разложения сложного колебания на сумму простых гармоник. *Представление периодических функций в виде суммы гармоник, называется гармоническим анализом.*

1.3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Функция $f(x)$ заданная на $[a;b]$ называется *кусочно непрерывной на* $[a;b]$, если она имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода.

Скалярным произведением двух функций $f(x)$ *и* $\varphi(x)$, определенных и кусочно непрерывных на $[a;b]$ называется число, обозначаемое $(f(x),\varphi(x))$, и равное определенному интегралу от произведения этих функций по отрезку $[a;b]$, т.е.

$$(f(x),\varphi(x))=\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx.$$

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *ортогональными на* $[a;b]$ если их скалярное произведение равно нулю, т.е. если

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx=0$$

Нормой функции $f(x)$ *на* $[a;b]$ называется число, обозначаемое $\| f(x)\|$ и равное корню квадратному из интеграла $\int_a^b [f(x)]^2 dx$, т.е.

$$\| f(x)\|=\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}.$$

Если интеграл $\int_a^b [f(x)]^2 dx=1$, то функция $f(x)$ называется *нормированной на* $[a;b]$.

Пусть имеется последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots,$$
определенных и кусочно непрерывных на $[a;b]$, причем среди них нет функций, тождественно равных нулю.

Последовательность функций $\{f_i(x)\}$ называется *ортогональной на* $[a;b]$, если любые две различные функции этой системы ортогональны на $[a;b]$, т.е

$$\int_a^b f_i(x)\cdot f_j(x)dx=0,\quad i\neq j.$$

Последовательность функций $\{f_i(x)\}$ называется *нормированной на* $[a;b]$, если нормирована каждая функция этой последовательности, т.е.
$$\int_a^b [f_i(x)]^2dx=1,\quad \forall i.$$

Последовательность функций $\{f_i(x)\}$ называется *ортонормированной на* $[a;b]$, если она является ортогональной и нормированной, т.е.
$$\int_a^b f_i(x)\cdot f_j(x)dx=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j;\\ 1, & \text{если } i=j.\end{cases}$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему тригонометрических функций
$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \dots \tag{1.10}$$
общего периода $T=2\pi$. Покажем, что эта система функций ортогональна на $[-\pi;\pi]$. Имеем:

1) $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$; $\quad\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x+\cos(n+m)x]dx=0$, при $n\neq m$;

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]dx=0$, при $n\neq m$.

3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n-m)x+\sin(n+m)x]dx=0$, при $n\neq m$;

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx dx=0$.

Таким образом, система (1.10) тригонометрических функций действительно является ортогональной на $[-\pi; \pi]$.

Ортонормированной система (1.10) не будет, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \pi.$$

Учитывая последние равенства, получаем, что ортонормированной будет система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \qquad (1.11)$$

Заметим, что функции системы (1.10) (а также системы (1.11)) линейно независимы.

Аналогично можно показать, что на $[-\ell; \ell]$ система функций

$$1, \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \ldots, \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \ldots \quad (1.12)$$

является ортогональной, а система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \ldots, \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}{\sqrt{\ell}}, \ldots \quad (1.13)$$

является ортонормированной.

Ортогональную (ортонормированную) систему функций можно считать аналогом ортогонального (ортонормированного) базиса в конечномерном евклидовом пространстве. Как мы позднее убедимся, имеется класс функций, которые являются линейными комбинациями функций ортогональной (ортонормированной) системы, причем слагаемых в линейной комбинации может быть бесконечное число. Линейная комбинация с бесконечным числом слагаемых представляет собой ряд. Использование ряда как функции связано с вопросами сходимости этого ряда.

Рассмотрим разложение функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций (1.10).

1.4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ *на отрезке* $[-\pi;\pi]$ называется разложение этой функции по тригонометрической системе функций (1.10), т.е. ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+$$

$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1.14)$$

Членами ряда (1.14) являются кратные друг другу гармоники, расположенные в порядке возрастания их частот (нулевая гармоника берется с множителем $\frac{1}{2}$) Числа a_0, a_n, b_n – называются *коэффициентами тригонометрического ряда Фурье*.

Пусть ряд (1.14) равномерно сходится на $[-\pi;\pi]$ и его сумма равна $f(x)$. Равномерная сходимость допускает почленное интегрирование ряда. Воспользуемся этим, чтобы найти коэффициенты ряда.

1) Интегрируя почленно ряд (1.14) будем иметь:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=$$

$$=a_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx}_{0}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx}_{0}\right)=a_0\pi$$

(равенство нулю интегралов показано ранее, при доказательстве ортогональности системы (1.10)). Отсюда находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad \text{и} \quad \frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

Замечание. Свободный член ряда (1.14) представляет собой среднее значение функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$.

2) Умножим ряд (1.14) на $\cos mx$. При этом его равномерная сходимость не нарушается, так как $\cos mx$ – непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и, следовательно, ограничена на этом отрезке. Почленно интегрируя полученный ряд, будем иметь:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\cdot\cos mx + b_n\sin nx\cdot\cos mx)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx dx + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx dx}_{0} = \begin{cases} a_n\cdot 0, & \text{при } n\neq m; \\ a_n\cdot\pi, & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Следовательно, $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\pi,$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx.$$

3) Аналогично, умножая ряд (1.14) на $\sin mx$ и почленно интегрируя, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\cdot\sin mx + b_n\sin nx\cdot\sin mx)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mx dx}_{0} + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx dx = \begin{cases} b_n\cdot 0, & \text{при } n\neq m; \\ b_n\cdot\pi, & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Следовательно, $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = b_n\pi,$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx.$$

Таким образом, получили:

$$\left.\begin{aligned} & a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx \quad (n = 0,1,2,\ldots), \\ \text{и} \quad & b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx \quad (n = 1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \quad (1.15)$$

Найти ряд Фурье для функции $f(x)$ – значит найти коэффициенты по формулам (1.15) и записать тригонометрический ряд (1.14) с этими коэффициентами.

Каким же условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ее можно было разложить в тригонометрический ряд Фурье?

Функция $f(x)$ называется кусочно монотонной на $[a;\, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция монотонна, т.е. либо возрастает, либо убывает, либо является постоянной.

Если непрерывная (или кусочно непрерывная) функция $f(x)$ на $[a;\, b]$ монотонна или кусочно монотонна, то в любой внутренней точке $c \in [a;\, b]$ она имеет левый и правый предел, т.е. существуют

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0).$$

ТЕОРЕМА (Дирихле). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на* $[-\pi;\, \pi]$ *и удовлетворяет на этом отрезке условиям:*

1) $f(x)$ *непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода (т.е. кусочно непрерывна);*

2) $f(x)$ *монотонна или имеет конечное число точек экстремумов (т.е. кусочно монотонна).*

Тогда $f(x)$ *разлагается на отрезке* $[-\pi;\, \pi]$ *в тригонометрический ряд Фурье. Т.е. тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[-\pi;\, \pi]$ *и его суммой является функция* $S(x)$*, определенная на этом отрезке следующим образом:*

1) $S(x) = f(x)$ *во всех точках* $x \in [-\pi;\, \pi]$*, в которых* $f(x)$ *– непрерывна;*

2) $S(x_k) = \dfrac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2}$*, если* $x_k \in [-\pi;\, \pi]$ *и* x_k *– точка разрыва первого рода функции* $f(x)$*. Т.е. в точках разрыва функции* $f(x)$ *функция* $S(x)$ *равна среднему арифметическому односторонних пределов* $f(x)$ *в этой точке.*

3) $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2}$*. Т.е. на границах отрезка* $[-\pi;\, \pi]$ *функция* $S(x)$ *равна среднему арифметическому левого предела функции* $f(x)$ *в точке* $x = \pi$ *и правого предела функции* $f(x)$ *в точке* $x = -\pi$*.*

Причем, на любом отрезке $[a;\, b] \subset [-\pi;\, \pi]$*, не содержащем точек разрыва функции* $f(x)$ *тригонометрический ряд Фурье сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Условия 1) и 2) теоремы Дирихле называются *условиями Дирихле*.

Теорема Дирихле дает достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\, \pi]$. Существуют и другие достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье. Но для решения практических задач обычно достаточно теоремы Дирихле, так как условиям Дирихле удовлетворяет большой класс функций.

Пусть функция $f(x)$ – периодическая, с периодом $T = 2\pi$, разлагающаяся в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\, \pi]$. Тогда это разложение имеет место для всех $x \in (-\infty;\, +\infty)$. Это очевидным образом вытекает из следующих утверждений: 1) $\cos nx$ и $\sin nx$ определены для всех $x \in (-\infty;\, +\infty)$ и, следовательно, тригонометрический ряд Фурье определен для всех $x \in (-\infty;\, +\infty)$; 2) сумма $S(x)$ тригонометрического ряда (1.14) является функцией периодической с периодом $T = 2\pi$; 3) $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\, \pi]$ и, следовательно, и в остальных точках непрерывности $f(x)$ (т.к. обе функции периодические с периодом $T = 2\pi$).

1.5. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим симметричный интеграл

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\ell} f(x)dx,$$

где $f(x)$ – непрерывная или кусочно непрерывная на $[-\ell;\, \ell]$. Сделаем замену в первом интеграле. Полагаем $x = -t$. Тогда

$$dx = -dt,$$

$$x_н = -\ell = -t_н \quad \Rightarrow \quad t_н = \ell,$$

$$x_в = 0 = -t_в \quad \Rightarrow \quad t_в = 0;$$

и $$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = -\int_{\ell}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\ell} f(x)dx = \int_{0}^{\ell} f(-x)dx + \int_{0}^{\ell} f(x)dx.$$

Следовательно, если $f(x)$ – четная функция, то $f(-x)=f(x)$ (т.е. график четной функции симметричен относительно оси Oy) и

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{0}^{\ell} \underbrace{f(-x)}_{f(x)}dx + \int_{0}^{\ell} f(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx .$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $f(-x)=-f(x)$ (т.е. график нечетной функции симметричен относительно начала координат) и

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{0}^{\ell} \underbrace{f(-x)}_{-f(x)}dx + \int_{0}^{\ell} f(x)dx = 0 .$$

Т.е. симметричный интеграл от четной функции равен удвоенному интегралу по половинному промежутку интегрирования, а симметричный интеграл от нечетной функции равен нулю.

Отметим также следующие два свойства четных и нечетных функций:

1) произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная;

2) произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная.

Пусть $f(x)$ – четная функция, заданная на $[-\pi;\pi]$ и разлагающаяся на этом отрезке в тригонометрический ряд Фурье. Используя полученные выше результаты, получаем, что коэффициенты этого ряда будут иметь вид:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx, \quad b_n = 0 \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, заданная на $[-\pi;\pi]$ и разлагающаяся на этом отрезке в тригонометрический ряд Фурье, то коэффициенты этого ряда будут иметь вид:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Следовательно, тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$ будет иметь вид

а) для четной функции: $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (1.16)$$

б) для нечетной функции: $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (1.17)$$

Ряд (1.16) не содержит синусов кратных углов, т.е. в ряд Фурье четной функции входят только четные функции и свободный член. Ряд (1.17) не содержит косинусов кратных углов, т.е. в ряд Фурье нечетной функции входят только нечетные функции.

Ряды (1.16) и (1.17) являются частями полного ряда Фурье и называются *неполными тригонометрическими рядами Фурье*. Если функция $f(x)$ разлагается в неполный тригонометрический ряд (1.16) (или (1.17)), то говорят, что она *разлагается в тригонометрический ряд Фурье по косинусам* (или *по синусам*).

1.6. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ НА $[-\ell;\ell]$

Пусть функция $f(x)$ задана на $[-\ell;\ell]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле. Сделаем замену переменной, положив $x=\omega t$, где ω подберем так, чтобы получившаяся функция $f(x)=f(\omega t)$ аргумента t была определена на $[-\pi;\pi]$. Следовательно, считаем, что $\ell=\omega\pi$,

$$\Rightarrow \quad \omega=\frac{\ell}{\pi}, \quad x=\omega t=\frac{\ell}{\pi}t.$$

Получившуюся в результате замены функцию $f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$ можно разложить на $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)dt, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\cdot\cos nt\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\cdot\sin nt\,dt.$$

Сделаем обратную замену $t=\frac{\pi}{\ell}x$,

$$\Rightarrow \quad dt=\frac{\pi}{\ell}dx, \quad x_н=-\ell, \quad x_в=\ell.$$

Получим:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right], \qquad (1.18)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx, \\ b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx. \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

Ряд (1.18) – ряд Фурье по основной тригонометрической системе функций

$$\frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right),\ldots,\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ldots \qquad (1.20)$$

Таки образом, мы получили, что если функция задана на $[-\ell;\, \ell]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, то она может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье (1.18) по тригонометрической системе функций (1.20).

Легко также показать, что для четной функции $f(x)$, заданной на $[-\ell;\, \ell]$ тригонометрический ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

где $$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx,\ \ b_n = 0; \qquad (1.21)$$

а для нечетной –

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

где $$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx,\ \ a_0 = a_n = 0. \qquad (1.22)$$

Замечание. В некоторых задачах требуется разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье по системе функций (1.20) не на отрезке $[-\ell;\, \ell]$, а на отрезке $[0;\, 2\ell]$. В этом случае необходимо просто изменить пределы интегрирования в формулах (1.19) ((1.15), если $\ell = \pi$), т.е. в этом случае

$$\left.\begin{aligned} a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx,\\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.\end{aligned}\right\}\quad(1.23)$$

или, если $\ell=\pi$,

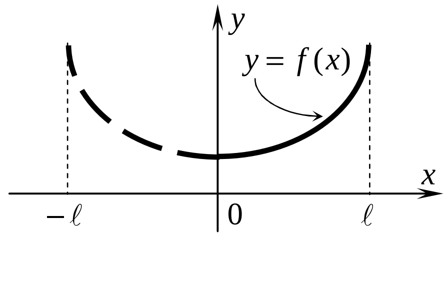
$$\left.\begin{aligned} a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos nxdx,\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nxdx.\end{aligned}\right\}\quad(1.24)$$

Действительно, сумма тригонометрического ряда Фурье – периодическая, с периодом $T=2\ell$ (или $T=2\pi$), функция, являющаяся периодическим продолжением заданной функции $f(x)$. А для периодической функции справедливо равенство (1.4).

1.7. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА $[0;\ell]$

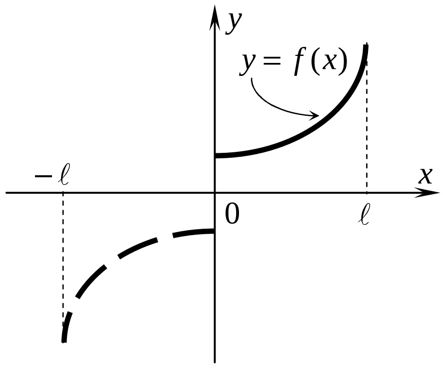
Пусть функция $f(x)$ задана на $[0;\ell]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле. Такую функцию тоже можно разложить в ряд Фурье. Для этого функцию $f(x)$ нужно доопределить на промежуток $[-\ell;0)$ и полученную функцию разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\ell;\ell]$. При этом полученный ряд следует рассматривать только на отрезке $[0;\ell]$, на котором функция задана. Доопределять функцию можно как угодно, но для удобства вычислений, функцию обычно доопределяют четным или нечетным образом. Действительно,

1) Продолжим $f(x)$ на $[-\ell;0)$ четным образом, т.е. построим новую четную функцию $f_1(x)$, совпадающую на $[0;\ell]$ с функцией $f(x)$. Следовательно, график этой функции симметричен относительно оси Oy и на отрезке $[0;\ell]$ совпадает с графиком $f(x)$. По формулам (1.21) найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $f_1(x)$ и запишем сам ряд Фурье. Сумма



$S_1(x)$ ряда Фурье для $f_1(x)$ – периодическая функция, с периодом $T=2\ell$. Она будет совпадать с функцией $f(x)$ на $[0;\ell]$ во всех точках непрерывности.

2) Доопределим $f(x)$ на $[-\ell;0)$ нечетным образом, т.е. построим новую нечетную функцию $f_2(x)$, совпадающую на $[0;\ell]$ с функцией $f(x)$. График такой функции симметричен относительно начала координат и на отрезке $[0;\ell]$ совпадает с графиком $f(x)$. По формулам (1.22) найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $f_2(x)$ и запишем сам ряд Фурье. Сумма $S_2(x)$ ряда Фурье для $f_2(x)$ – периодическая функция с периодом $T=2\ell$. Она будет совпадать с функцией $f(x)$ на $[0;\ell]$ во всех точках непрерывности.

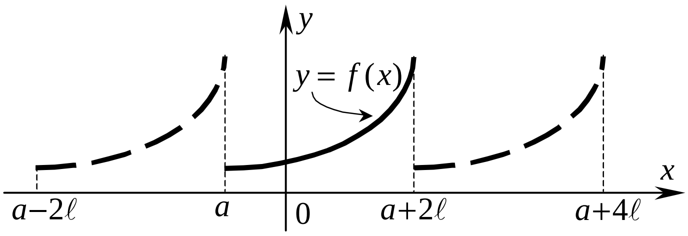


Замечания. 1) Аналогично можно разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке $[0;\pi]$.

2) Так как разложение функции $f(x)$ на $[0;\ell]$ предполагает ее продолжение на отрезок $[-\ell;0]$ произвольным образом, то и ряд Фурье для $f(x)$ не будет единственным.

1.8. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА $[a;a+2\ell]$

Пусть функция $f(x)$ задана на произвольном отрезке $[a;a+2\ell]$ длины 2ℓ и удовлетворяет на нем условиям Дирихле. Тогда эта



функция может быть разложена в ряд Фурье. Для этого функцию нужно периодически (с периодом 2ℓ) продолжить на всю числовую прямую и полученную функцию разложить в ряд Фурье, который следует рассматривать только на отрезке $[a;\, a+2\ell]$. В силу свойства (1.3) периодических функций имеем

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{0}^{2\ell} f(x)dx = \int_{a}^{a+2\ell} f(x)dx.$$

Поэтому коэффициенты Фурье для полученного продолжения функции $f(x)$ можно найти по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+2\ell} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+2\ell} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\ b_n = \frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+2\ell} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \end{aligned}\right\} \qquad (1.25)$$

1.9. РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\ell;\, \ell]$ удовлетворяет условиям Дирихле и ряд Фурье этой функции имеет вид (1.18)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right],$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются по формулам (1.19).

Обозначим $\frac{\pi}{\ell} = \omega$ и тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right].$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = -i\cdot\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2},$$

получим

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = -i\cdot\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2}.$$

Преобразуем слагаемые ряда Фурье:

$$a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) = a_n\cdot\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} - b_n i\cdot\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2} =$$

$$= e^{in\omega x}\cdot\frac{a_n - b_n i}{2} + e^{-in\omega x}\cdot\frac{a_n + b_n i}{2}.$$

Обозначим

$$\frac{a_0}{2}=c_0, \quad \frac{a_n-b_n i}{2}=c_n, \quad \frac{a_n+b_n i}{2}=c_{-n} \tag{1.26}$$

Тогда ряд Фурье примет вид:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{in\omega x}+c_{-n}e^{-in\omega x}\right]=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{in\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\omega x},$$

или

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x}. \tag{1.27}$$

Выражение (1.27) называется *комплексной формой ряда Фурье функции* $f(x)$ *на* $[-\ell;\ell]$.

Комплексные коэффициенты c_n можно найти, не вычисляя a_0, a_n, b_n. Действительно,

$$c_n=\frac{a_n-b_n i}{2}=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\cos n\omega x dx-\frac{i}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\sin n\omega x dx=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot(\cos n\omega x-i\sin n\omega x)dx=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot e^{-in\omega x}dx.$$

Аналогично

$$c_{-n}=\frac{a_n+b_n i}{2}=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\cos n\omega x dx+\frac{i}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\sin n\omega x dx=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot(\cos n\omega x+i\sin n\omega x)dx=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot e^{in\omega x}dx.$$

Итак, при любом $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ будем иметь:

$$c_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot e^{-in\omega x}dx. \tag{1.28}$$

Если функция $f(x)$ задана на $[-\pi;\pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, то $\omega=\dfrac{\pi}{\ell}=1$ и ряд Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}, \text{ где } c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx. \tag{1.29}$$

Комплексная форма ряда Фурье функции $f(x)$ обладает по сравнению с обыкновенным рядом Фурье преимуществом краткости и единообразия формул для определения коэффициентов. Кроме того, данная форма позволяет легко перейти к понятию интеграла Фурье.

1.10. АМПЛИТУДНЫЙ И ФАЗОВЫЙ СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ – периодическая, с периодом $T = 2\ell$, представлена рядом Фурье (1.18):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right].$$

Применим преобразование

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi),$$

где
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi,$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b} \qquad \text{или} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Обозначим $\frac{\pi}{\ell} = \omega$. Тогда

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,\sin(n\omega x + \varphi_n)$$

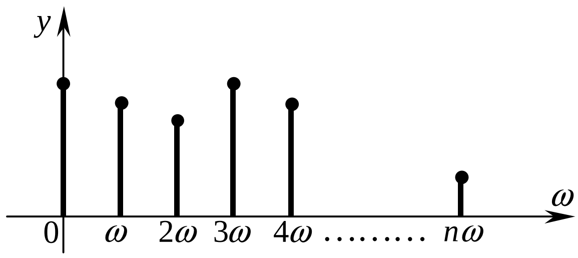
и ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n),$$

где $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Первое слагаемое $A_1\sin(n\omega x + \varphi_1)$ называют *основной гармоникой*, остальные слагаемые $A_n\sin(n\omega x + \varphi_n)$ ($n = 2,3,\ldots$) – *верхними гармониками*; A_n – *амплитуда* n*-гармоники*, φ_n – *фаза* n*-гармоники*. Совокупность величин A_n называется *амплитудным спектром*, а совокупность величин φ_n – *фазовым спектром* периодический функции $f(x)$.

Амплитудный спектр можно изобразить графически вертикальными отрезками длины A_n: по оси Ox отмечаем значения частот

$\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, n\omega, \ldots,$ по оси Oy – соответствующие значения амплитуд $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$. При этом считаем, что постоянной составляющей периодического колебания A_0 соответствует частота $\omega = 0$.



Аналогично изображается фазовый спектр.

Поскольку периодическая функция представляется бесконечной суммой гармоник с кратными частотами, то ее спектр носит дискретный характер.

Для многих практических приложений достаточно знать лишь амплитудный спектр функции. Изучая амплитудный спектр ряда Фурье периодического колебания, легко найти те значения частот, которым соответствуют большие значения A_n, т.е. те частоты, которым соответствуют гармоники с относительно большой ролью в образовании периодического процесса.

Пусть периодическая функция периода $T = 2\ell$ представлена рядом Фурье в комплексной форме (1.27):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

где коэффициенты c_n определяются по формулам (1.28):

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot e^{-in\omega x} dx.$$

В электротехнике и радиотехнике принята следующая терминология: $\omega = \dfrac{\pi}{\ell}$ называется *основной частотой*; $\omega_n = n\omega = \dfrac{n\pi}{\ell}$ называются *спектральными* или *волновыми числами функции* $f(x)$; выражения $e^{-in\omega x} = e^{-i\omega_n x}$ называются *гармониками*. Совокупность волновых чисел называется *спектром*. Если отмечать эти числа на числовой прямой, то получим совокупность отдельных точек. Такую совокупность точек называют *дискретной*, а соответствующий спектр – *дискретный*. Коэффициенты c_n, определяемые по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-in\omega x}dx,$$

называются *комплексными амплитудами*.

В некоторых трудах по электротехнике и радиотехнике совокупность модулей амплитуд $|c_n|$ тоже называют *спектром функции* $f(x)$. Коэффициенты c_n разложения функции в комплексный ряд Фурье являются комплексно сопряженными числами (см. (1.26)):

$$c_n = \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}.$$

Поэтому для модулей этих чисел имеем:

$$|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}|a_n \pm b_n i| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n, \tag{1.30}$$

т.е. спектры $|c_n|$ и A_n отличаются лишь масштабом вертикальных линий.

Так как

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-in\omega x}dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-i\omega_n x}dx,$$

то коэффициенты c_n можно считать функцией от частоты ω_n, т.е. $c_n = C(\omega_n)$. *Спектральной функцией* или *спектральной плотностью* $S(\omega_n)$ функции $f(\omega)$ называется отношение $C(\omega_n)$ к приращению частоты $\Delta\omega_n = \frac{\pi(n+1)}{\ell} - \frac{\pi n}{\ell} = \frac{\pi}{\ell}$, т.е.

$$S(\omega_n) = \frac{C(\omega_n)}{\Delta\omega_n} = \frac{C(\omega_n)}{\pi/\ell} = \left(\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-i\omega_n x}dx\right)\cdot\frac{\ell}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-i\omega_n x}dx \tag{1.31}$$

Величины $S(\omega_n)$ – комплексные и для них можно найти модули и аргументы. Величины $|S(\omega_n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-i\omega_n x}dx\right|$ называются *амплитудным спектром*, а $\Phi(\omega_n) = -\arg S(\omega_n)$ – *фазовым спектром* функции $f(x)$.

Так как $C(\omega_n)=\dfrac{\pi}{\ell}S(\omega_n)$, то в точках непрерывности кусочно-гладкой функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(x)=\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S(\omega_n)\cdot e^{i\omega_n x}.$$

В частности, при $\ell=\pi$ имеем:

$$\omega=\frac{\ell}{\pi}=1,\quad \omega_n=n,\quad \Delta\omega_n=1,\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx,$$

и

$$C(\omega_n=n)=\frac{\pi}{\ell}S(\omega_n)=S(n)$$

$$\Rightarrow\quad |S(n)|=|c_n| \text{ – амплитудный спектр,}$$

$$\Phi(n)=-\arg c_n \text{ – фазовый спектр}$$

и

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S(n)\cdot e^{inx}.$$

Глава 2. Решение типовых задач

Как правило, в ряд Фурье требуется разложить периодическую функцию, являющуюся периодическим продолжением заданной на отрезке функции. При этом, рекомендуется придерживаться следующей схемы действий:

1) построить график заданной функции $f(x)$, найти ее периодическое продолжение $\overline{f}(x)$ на всю ось Ox;
2) установить период функции $\overline{f}(x)$;
3) выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида;
4) проверить, удовлетворяет ли функция $f(x)$ условиям Дирихле;
5) вычислить коэффициенты ряда Фурье;
6) записать ряд Фурье;
7) записать сумму полученного ряда.

При решении задач следует также помнить:

$$\left.\begin{array}{c}\cos n\pi=(-1)^n,\ \ \sin n\pi=0,\ \ (\forall n=0,1,2,\ldots)\\ \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2k+1;\\ (-1)^k, & n=2k;\end{cases}\quad \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2k;\\ (-1)^k, & n=2k+1;\end{cases}\\ (\forall k=0,1,2,\ldots)\end{array}\right\}\quad(1.32)$$

ПРИМЕР 1. Функцию $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0;\\ 2x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ разложить в ряд Фурье на $(-\pi;\pi)$. Построить график суммы полученного ряда. С помощью разложения найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

РЕШЕНИЕ

Построим график функции $f(x)$ и ее периодического продолжения $\overline{f}(x)$.

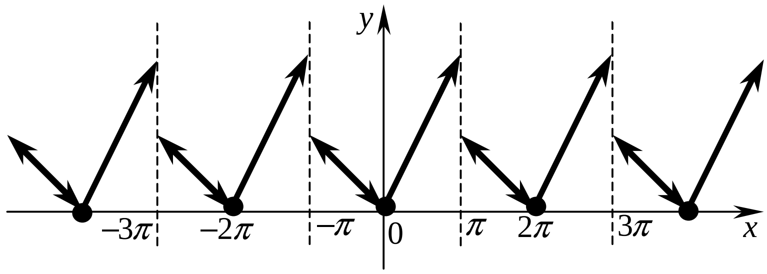


График функции не симметричен относительно оси Oy или начала координат. Следовательно, функция общего вида. Периодическое продолжение имеет период $T=2\pi$.

На интервале $(-\pi;\pi)$ функция непрерывна и кусочно монотонна. Следовательно, на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция удовлетворяет условиям Дирихле и может быть представлена рядом Фурье.

Коэффициенты ряда Фурье находим по формулам (1.15):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}-xdx+\int\limits_{0}^{\pi}2xdx\right)\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}+x^2\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{3\pi}{2},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_0}{2}=\frac{3\pi}{4};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}-x\cdot\cos nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}2x\cdot\cos nxdx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos nxdx, & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{-\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}}_{0}+\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx+\underbrace{\frac{2x}{n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi}}_{0}-2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{2\cos nx}{n^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}[1-\cos \pi n]+\frac{2}{n^2}[\cos n\pi-1]\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^2}\cos n\pi\right)=\frac{3}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k;\\ \dfrac{-6}{\pi n^2}, & n=2k-1.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\cdot\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}2x\cdot\sin nx dx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx\\ dv=\sin nx dx, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx-\frac{2x}{n}\cos nx\Bigg|_{0}^{\pi}+2\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}}_{0}-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\underbrace{\frac{2\sin nx}{n^2}\Bigg|_{0}^{\pi}}_{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos nx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Записываем ряд Фурье функции $f(x)$ по формуле (1.14):

$$\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)=$$

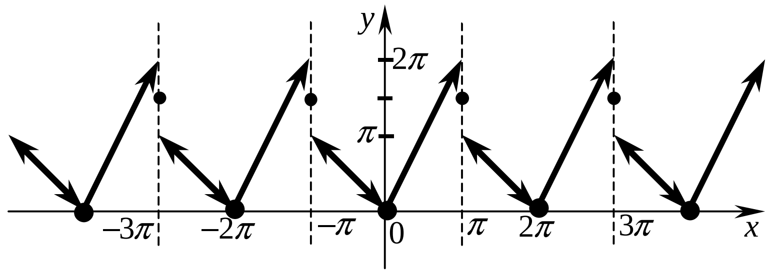
$$=\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{6\cos x}{\pi\cdot 1^2}+\frac{\sin x}{1}\right)+\left(0-\frac{\sin 2x}{2}\right)+\left(-\frac{6\cos 3x}{\pi\cdot 3^2}+\frac{\sin 3x}{3}\right)+\ldots$$

Сумма полученного ряда на отрезке $[-\pi;\pi]$ принимает значения функции $f(x)$ в точках непрерывности этой функции и значение $\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ на концах отрезка. На остальной части числовой прямой она принимает значения периодического продолжения $\overline{f}(x)$ функции

$f(x)$ в точках непрерывности функции $\overline{f}(x)$ и значение $\dfrac{3\pi}{2}$ в точках разрыва функции $\overline{f}(x)$. Т.е.

$$S(x)=\begin{cases} \overline{f}(x), & x\neq(2k-1)\pi; \\ \dfrac{\overline{f}\big((2k-1)\pi-0\big)+\overline{f}\big((2k-1)\pi+0\big)}{2}=\dfrac{3\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi \end{cases}$$

(где $k\in\mathbb{Z}$). График функции $S(x)$ имеет вид:



Найдем значение суммы ряда $S(x)$ в точке $x=0$. Эта точка является точкой непрерывности функции $f(x)$. Поэтому,

$$S(0)=f(0)=0.$$

Но с другой стороны,

$$S(0)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]\underbrace{\cos(0\cdot x)}_{1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\underbrace{\sin(0\cdot x)}_{0}\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right)$$

Следовательно,

$$0=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3\pi}{4}=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, используя разложение функций в ряд Фурье, можно находить точные суммы некоторых сходящихся числовых рядов.