

Математический анализ

Раздел: Операционное исчисление

Тема: *Применение преобразования
Лапласа*

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

§14. Применение преобразования Лапласа

Метод решение задач математического анализа и других разделов математики с помощью преобразования Лапласа, называют *операционным исчислением*.

1. Интегрирование ЛДУ с постоянными коэффициентами

ПРИМЕР 1. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + y' = \cos t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

Замечание. Требование, чтобы начальные условия задачи Коши были заданы в точке $t_0 = 0$ не является существенным.

Если $t_0 \neq 0$, то достаточно ввести новую переменную по формуле $u = t - t_0$. Это изменит правую часть уравнения и начальные условия приобретут необходимый вид.

ПРИМЕР 2. Найти решение задачи Коши:

$$y'' - y' = -2t, \quad y(2) = 8, \quad y'(2) = 6$$

В случае, если изображение для правой части $f(t)$ найти сложно, решение задачи

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= f(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно выразить через решение задачи

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= 1, \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

А именно:

если $y(t)$ – решение уравнения (1), $y(t) \doteq Y(p)$;
 $y_1(t)$ – решение уравнения (2), $y_1(t) \doteq Y_1(p)$;
 $f(t) \doteq F(p)$;

то
$$Y(p) = p \cdot Y_1(p) \cdot F(p)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(0) \cdot f(t) + y_1'(t) * f(t) = \int_0^t y_1'(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

Замечание. Требование, чтобы начальные условия задачи Коши были нулевыми, не является существенным.

Если начальные условия ненулевые, т.е. имеют вид:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

то достаточно ввести новую функцию $z(t)$ по формуле

$$z(t) = y(t) - y_0 - y_1 \cdot t - y_2 \cdot \frac{t^2}{2!} - y_3 \cdot \frac{t^3}{3!} - \dots - y_{n-1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Новое уравнение будет иметь начальные условия необходимого вида.

2. Интегрирование систем ЛДУ с постоянными коэффициентами

ПРИМЕР 2. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t; \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 0.$$

3. Решение интегральных уравнений типа свертки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_0^x y(t) \cdot k(x-t) dt$$

где $f(x)$, $k(x)$ – известные функции, $y(x)$ – неизвестная функция, называется **интегральным уравнением типа свертки**.

Пусть $y(x)$, $f(x)$, $k(x)$ – оригиналы,
 $y(t) \doteq Y(p)$, $f(t) \doteq F(p)$, $k(t) \doteq K(p)$.

Тогда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.$$