Математический анализ

Раздел: Операционное исчисление

Тема: ***Преобразование Лапласа. Свойства преобразования Лапласа***

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

Пусть $f(x)$ определена на $(a;b)$ (возможно $a=-\infty$ или(и) $b=+\infty$).

Интегральным преобразованием функции называется функция $F(u)$, определенная равенством

$$F(u)=\int_a^b K(x,u)\cdot f(x)dx,$$

где $K(x,u)$ – фиксированная функция, называемая ***ядром интегрального преобразования***.

Классификацию интегральных преобразований проводят по виду его ядра:

$$K(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega x}$$ – преобразование Фурье,

$$K(x,p)=e^{-px}$$ – преобразование Лапласа.

§ 11. Оригинал и изображение. Теорема обращения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть $f(t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. *Функция* $f(t)$ *называется* ***оригиналом***, *если*

1) $f(t)$ *и ее производная* $f'(t)$ *определены и непрерывны на* $\mathbb{R}$ *за исключением может быть отдельных точек разрыва* I *рода, число которых на любом интервале конечно*;

2) $f(t)=0,\ \forall t<0$;

3) $\left|f(t)\right|<Me^{s_0 t}$, *где* M, s_0 – const, $s_0\ge 0$ (s_0 *называют* ***порядком роста функции $f(t)$***).

ПРИМЕР. Единичная функция Хэвисайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Замечание.

Если для функции $\varphi(t)$ выполняются условия 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(t)\cdot\eta(t)$ будет являться оригиналом.

В дальнейшем будем писать $\sin t$, $\cos t$ и т. д. подразумевая $\sin t\cdot\eta(t)$, $\cos t\cdot\eta(t)$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $f(t)$ *– оригинал.* ***Изображением функции*** $\boldsymbol{f(t)}$ (***преобразованием Лапласа функции*** $\boldsymbol{f(t)}$) *называется фкп* $F(p)$ *, определяемая равенством*

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

ЗАПИСЫВАЮТ: $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$, $F(p)\risingdotseq f(t)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$.

ТЕОРЕМА 2.

Если $f(t)$ *– оригинал с показателем роста* s_0 *, то его изображение* $F(p)$ *является аналитической функцией в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p>s_0$.

ТЕОРЕМА 3 (обращения).

Пусть $f(t)$ *– оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда в любой точке непрерывности функции* $f(t)$ *имеет место равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(p) \cdot e^{pt} dp \qquad (1)$$

где C *– любая прямая* $\mathrm{Re}p = a > s_0$.

Замечание. Интеграл в (1) понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_C F(p) \cdot e^{pt} dp = \lim_{b \to +\infty} \int_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Принято писать:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

ТЕОРЕМА 4.

Пусть для функции $F(p)$ *выполнены условия*:

1) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\mathrm{Re}p > s_0$ (*где* s_0 – *некоторое неотрицательное число*);

2) $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ *в любой полуплоскости* $\mathrm{Re}p \geq a > s_0$;

3) *интеграл* $\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p)dp$ *сходится абсолютно*.

Тогда $F(p)$ *является изображением некоторой функции, которая может быть найдена по формуле* (1) .

§ 12. Свойства преобразования Лапласа

Будем обозначать: $f(t)$, $g(t)$, $x(t)$,… – оригиналы,
$F(p)$, $G(p)$, $X(p)$,… – их изображения.

1) Линейность изображения.

Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, то $\alpha f(t) + \beta g(t)$ – оригинал и

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2) Теорема подобия.

Справедливо утверждение: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0$

3) Теорема запаздывания (оригинала)

Справедливо утверждение: $f(t-\alpha) \risingdotseq \mathrm{e}^{-\alpha p}\cdot F(p)$

Замечание. Напомним, что

$$f(t) = f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} 0, & t<0; \\ f(t), & t\ge 0. \end{cases}$$

$$f(t-\alpha) = f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t-\alpha<0; \\ f(t-\alpha), & t-\alpha\ge 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t<\alpha; \\ f(t-\alpha), & t\ge \alpha. \end{cases}$$

4) Теорема смещения (запаздывания изображения).

Справедливо утверждение: $F(p-\alpha) \risingdotseq e^{\alpha t}\cdot f(t)$.

5) Дифференцирование оригинала

ТЕОРЕМА 1.

Если $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ *– оригиналы, то*

$$f'(t) \risingdotseq p\cdot F(p) - f(0) \ ,$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2\cdot F(p) - p\cdot f(0) - f'(0) \ ,$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3\cdot F(p) - p^2\cdot f(0) - p\cdot f'(0) - f''(0) \ ,$$

…………………………………..

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^{(\mathrm{n})}\cdot F(p) - p^{(\mathrm{n}-1)}\cdot f(0) - p^{(\mathrm{n}-2)}\cdot f'(0) - \ldots - p\cdot f^{(\mathrm{n}-2)}(0) - f^{(\mathrm{n}-1)}(0) \ ,$$

где $\quad f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$

6) Дифференцирование изображения

Справедливо утверждение:

$$F'(p) \risingdotseq -t \cdot f(t) \,,$$

$$F''(p) \risingdotseq t^2 \cdot f(t) \,,$$

$$F'''(p) \risingdotseq -t^3 \cdot f(t) \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^{(n)} \cdot t^n \cdot f(t) \,.$$

7) Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал, то

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt$$

тоже является оригиналом и справедливо утверждение:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

8) Интегрирование изображения

ТЕОРЕМА 2 (об интегрировании изображения).

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$,

$$\int_p^{\infty} F(p)dp \text{ – сходится абсолютно}$$

(*путь интегрирования предполагается целиком лежащим в области аналитичности* $F(p)$)

Тогда функция $\dfrac{f(t)}{t}$ *является оригиналом и*

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(p)dp$$

9) Умножение изображений

ТЕОРЕМА 3 (Бореля, об умножении изображений).

Пусть $f(t)$, $g(t)$ – *оригиналы,*

$$f(t) \risingdotseq F(p)\ ,\quad g(t) \risingdotseq G(p)\ .$$

Тогда функция $$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

тоже является оригиналом и $\varphi(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы. *Интеграл*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

называется ***свeрткой функций*** $f(t)$ и $g(t)$.

ОБОЗНАЧАЮТ: $f(t) * g(t)$.

Очевидно, что $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 4 (формула Дюамеля).

Справедлива формула: $f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) \doteqdot p \cdot F(p) \cdot G(p)$.

Т.е.

$$\int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t) \doteqdot p \cdot F(p) \cdot G(p) .$$

§13. Теоремы разложения

По теореме обращения (теорема 3 в §9)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (вторая теорема разложения).

Пусть функция $F(p)$ *удовлетворяет условиям*:

1) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p > s_0$ (*где* s_0 – *некоторое неотрицательное число*);
2) *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p < s_0$ *функция* $F(p)$ *имеет только конечное число полюсов* $p_1, p_2, \dots, p_n$;
3) $M(R) = \max\limits_{p \in C_R} \left| F(p) \right| \to 0$ *при* $R \to \infty$

   (*где* C_R – *дуга окружности* $|\,z\,| = R$, *лежащая в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p < s_0$);
4) *интеграл* $\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt}\, dp$ *сходится абсолютно для* $\forall a > s_0$.

Тогда оригиналом для функции $F(p)$ *является функция* $f(t) \cdot \eta(t)$, *где*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} [F(p) \cdot e^{pt}]$$

Замечание. Условиям теоремы 1 удовлетворяют в частности функции вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

где $Q_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m < n$.

Другой способ найти оригинал $f(t)$ для изображений вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

– разложить дробь на сумму простейших и найти $f(t)$ как сумму оригиналов получившихся слагаемых.

Найти оригиналы для простейших дробей можно с помощью таблицы изображений и теоремы смещения (для простейших I , II и III типа) или теоремы умножения изображений (для простейших IV типа) .

ТЕОРЕМА 2 (первая теорема разложения)

Если функция $F(p)$ *аналитична в окрестности* ∞ *и ее ряд Лорана в окрестности* ∞ *имеет вид*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$$

то оригиналом для функции $F(p)$ *является функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}$$