Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Вычеты и их применения***

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

§ 9. Вычеты. Основная теорема о вычетах

1. Вычет относительно конечной точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вычетом функции $f(z)$ относительно конечной точки z_0*** *называется число, равное*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

где C – любой контур, удовлетворяющий условиям:

а) z_0 *лежит в области D, внутренней по отношению к C* (т.е. в области, которая остается слева при обходе контура C против часовой стрелки);

б) *в области D и на ее границе C нет особых точек функции $f(z)$, за исключением может быть точки z_0*.

Обозначают: $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$

Из определения $\Rightarrow$ если z_0 – правильная, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$

ТЕОРЕМА 1 (связь вычета функции относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности z_0).

Вычет функции $f(z)$ *относительно* $z_0 \in \mathbb{C}$ *равен коэффициенту* a_{-1} *разложения функции* $f(z)$ *в ряд Лорана по степеням* $z - z_0$ *в области* $0 < | z - z_0 | < R$ *(где* R *– такое число, что в области* $0 < |z - z_0| < R$ *функция* $f(z)$ *– аналитическая*).

СЛЕДСТВИЕ 2 (о вычете относительно устранимой особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если z_0 *– устранимая особая точка, то* $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$

ТЕОРЕМА 3 (вычисление вычета относительно полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если $z_0 \in \mathbb{C}$ *– полюс кратности* m *функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (1-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 5 (2-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$ *и* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, *где* $\varphi(z_0) \neq 0$. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

2. Вычет относительно ∞

Пусть ∞ – изолированная особая точка функции $f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вычетом функции $f(z)$ относительно ∞*** *называется число, равное*

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

где C – любой контур, такой, что в области, внешней по отношению к C , нет конечных особых точек функции $f(z)$.

Обозначают: $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$

ТЕОРЕМА 6 (связь вычета функции относительно ∞ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности ∞).

Вычет функции $f(z)$ относительно ∞ равен $-1 \cdot a_{-1}$, где a_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ (т.е. в области $|z| > R$).

ТЕОРЕМА 7 (вычисление вычета относительно устранимой особой точки ∞)

Если ∞ *– устранимая особая точка функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}[z^2 \cdot f'(z)]$$

ТЕОРЕМА 8 (вычисление вычета относительно полюса ∞)

Если ∞ *– полюс кратности* m *функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}[z^{m+2} \cdot f^{(m+1)}(z)]$$

Замечание. Вычисление вычета относительно ∞ можно свести к вычислению вычета относительно $z_0 = 0$ если сделать замену

$$z = \frac{1}{t}$$

3. Основная теорема о вычетах

ТЕОРЕМА 9 (основная теорема о вычетах).

Пусть а) *функция* $f(z)$ *аналитична в ограниченной односвязной области* D *за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots z_n$;

б) C *– замкнутый контур в* D, *внутри которого содержатся точки* $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Тогда

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

СЛЕДСТВИЕ 10.

Пусть функция $f(z)$ *аналитична в ограниченной односвязной области* D *за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots z_n$. *Тогда сумма всех вычетов функции* $f(z)$ *относительно ее особых точек, включая вычет относительно* ∞, *равна нулю*, т.е.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

4. Применение вычетов при вычислении интегралов

а) Вычисление контурных интегралов

ПРИМЕР 1. Найти $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)}$

ПРИМЕР 2. Найти $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{15} dz}{z^8+2}$

б) Вычисление интегралов типа $\int\limits_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$

Имеем: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Замена: $z = e^{\mathrm{ix}}$

Получим: $$\int\limits_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \oint\limits_{|z|=1} -\frac{i}{z} \cdot R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right) dz$$

ПРИМЕР 3. Найти $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$$

<u>в) Вычисление интегралов типа</u> $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx$

(где $m \ge n + 2$, $P_m(x) \ne 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

ТЕОРЕМА 11.

Пусть $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$,

где $P_n(x)$, $P_m(x)$ – *многочлены степени* n *и* m *соответственно, причем* $m \ge n + 2$, $P_m(x) \ne 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Тогда
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \quad ,$$

где z_1 , z_2 , … , z_m – *особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (*т.е.* $\mathrm{Im} z_\mathrm{k} > 0$)

ПРИМЕР 4. Найти $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

г) Вычисление интегралов типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$ **,** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$

ЛЕММА 12 (Жордана).

Пусть имеется семейство дуг полуокружностей

$$C_{\mathrm{R}} : |z| = \mathrm{R}\ ,\ \mathrm{Im} z \geq 0\ \ (\text{где}\ \ R \to +\infty)$$

Обозначим $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |f(z)|$.

Если $f(z)$ *аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек и*

$$\lim_{R \to +\infty} M(R) = 0,$$

то $$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0 \quad ,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 13.

Пусть 1) $f(z)$ *аналитична на вещественной оси*

2) $f(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости за исключением особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_m$;

3) $f(z)$ *удовлетворяет условиям леммы Жордана.*

Тогда для любого $\lambda > 0$ *интеграл*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot f(x)dx \qquad \text{– сходится}$$

и

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \ ,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *– особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (*т.е.* $\mathrm{Im} z_k > 0$).

СЛЕДСТВИЕ 14.

Пусть $f(z)$ *удовлетворяет условиям теоремы 13.*

Тогда
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{\mathrm{res}}\, e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{\mathrm{res}}\, e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

где z_1 , z_2 , … , z_m – *особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (т.е. $\mathrm{Im} z_k > 0$) .

ПРИМЕР 5. Найти $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+2x+10}$