

# Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

---

Тема: *Особые точки*

---

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

## § 8. Особые точки

### 1. Изолированные особые точки

Точка  $z_0$ , в которой функция  $f(z)$  не является аналитической, называется **особой точкой функции  $f(z)$** .

Точку, не являющуюся особой для  $f(z)$ , называют **правильной точкой функции  $f(z)$** .

Точка  $z_0$  называется **изолированной особой точкой функции  $f(z)$** , если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции  $f(z)$ .

Изолированная особая точка  $z_0$  называется

а) **устранимой особой точкой**, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ , где  $c \in \mathbb{C}$ ;

б) **полюсом**, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ;

в) **существенно особой точкой**, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \nexists$

**Замечание.** Устранимую особую точку можно «устранить», доопределив (переопределив) функцию  $f(z)$  равенством

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$$

Новая функция в точке  $z_0$  будет аналитической.

## ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРА ОСОБОЙ ТОЧКИ С ВИДОМ РЯДА ЛОРАНА ФУНКЦИИ В ЕЕ ОКРЕСТНОСТИ

### 1) Устранимые особые точки

**ТЕОРЕМА 1** (вид ряда Лорана функции в окрестности ее устранимой особой точки).

*Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  является устранимой  $\Leftrightarrow$  ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

## 2) Полюсы

Точка  $z_0$  называется **нулем функции  $\varphi(z)$**  если  $\varphi(z_0) = 0$ .

Точка  $z_0$  называется **нулем кратности  $m$**  если

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z), \quad \text{где } g(z_0) \neq 0.$$

Ноль кратности 1 называется **простым**.

ТЕОРЕМА 2 (связь полюсов и нулей функций).

Точка  $z_0$  является нулем аналитической функции  $\varphi(z) \Leftrightarrow z_0$  — полюс функции

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кратность нуля  $z_0$  аналитической функции  $\varphi(z)$  называют **кратностью (порядком) полюса  $z_0$  функции**

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

Полюс кратности 1 называют **простым**.

**ТЕОРЕМА 3** (вид ряда Тейлора функции в окрестности нуля).

*Точка  $z_0$  является нулем кратности  $m$  аналитической функции  $\varphi(z) \Leftrightarrow$  ряд Тейлора функции  $\varphi(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержит первых  $m$  членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

**СЛЕДСТВИЕ 4** (связь кратности нуля с производными функции).

*Точка  $z_0$  является нулем кратности  $m$  аналитической функции  $\varphi(z) \Leftrightarrow$*

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \dots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0, \\ \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

**ТЕОРЕМА 5** (вид ряда Лорана функции в окрестности ее полюса)

*Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  является полюсом кратности  $m \Leftrightarrow$  главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  содержит только  $m$  членов, т.е. имеет вид*

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

**СЛЕДСТВИЕ 6** (вид функции, имеющей полюс в точке  $z_0$ )

*Точка  $z_0$  является полюсом кратности  $m$  функции  $f(z) \Leftrightarrow$*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

*где  $g(z)$  – аналитическая в точке  $z_0$  и  $g(z_0) \neq 0$ .*

### 3) Существенно особые точки

ТЕОРЕМА 7 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее существенно особой точки)

*Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  является существенно особой  $\Leftrightarrow$  главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  содержит бесконечное число членов.*

## 2. Характер точки $\infty$

Говорят, что функция  $f(z)$  **аналитична в окрестности точки  $\infty$** , если она аналитична в области  $|z| > R$  (где  $R$  – некоторое число).

**Точка  $\infty$  называется изолированной особой точкой функции  $f(z)$**  если  $f(z)$  не имеет особых точек в области  $|z| > R$  (где  $R$  – некоторое число).

Изолированная особая точка  $\infty$  называется

а) **устранимой особой точкой**, если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c$ , где  $c \in \mathbb{C}$ ;

б) **полюсом**, если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ;

в) **существенно особой точкой**, если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \nexists$ .



Говорят, что функция  $f(z)$  *разложима в ряд Лорана в окрестности точки  $\infty$* , если она разложима в ряд Лорана по степеням  $z$  в кольце  $R < |z| < +\infty$ , т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \quad R < |z| < +\infty$$

При этом

ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$  называют *правильной частью ряда Лорана функции в окрестности  $\infty$* ,

ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$  называют *главной частью ряда Лорана функции в окрестности  $\infty$* .

Для точки  $\infty$  справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 8** (вид ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки  $\infty$ )

*Изолированная особая точка  $\infty$  функции  $f(z)$  является*

*а) устранимой  $\Leftrightarrow$  ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $\infty$  не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

*б) полюсом кратности  $m \Leftrightarrow$  главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $\infty$  содержит только  $m$  членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

*в) существенно особой  $\Leftrightarrow$  главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $\infty$  содержит бесконечное число членов.*