Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Ряды в комплексной плоскости (степенные и ряды Лорана)***

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

3. Степенные ряды

Степенным комплексным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Числа a_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Частный случай комплексного степенного ряда – ряд по степеням z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (1)$$

Будем изучать ряд $\sum a_n z^n$, т.к. результаты на общий случай переносятся заменой $z = z - z_0$.

Степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится хотя бы в одной точке (точке $z = 0$).

ТЕОРЕМА 6 (Абеля для комплексных степенных рядов).

1) *Если степенной ряд* $\sum a_n z^n$ *сходится в точке* $z_1 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* z, *удовлетворяющей условию* $|z| < |z_1|$;

2) *Если степенной ряд* $\sum a_n z^n$ *расходится в точке* z_2, *то он расходится в любой точке* z, *удовлетворяющей условию*

$$|z| > |z_2| .$$

Из теоремы 6 $\Rightarrow$ $\exists$ R>0 такое, что ряд $\sum a_n z^n$ сходится (абсолютно) при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называют ***радиусом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$,

круг $|z| < R$ называют ***кругом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$.

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда $\sum |a_n z^n|$ находим:

$$R = \frac{1}{\ell}\ , \text{ где } \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad (2)$$

Замечания.

1) Формулы (2) справедливы, если ряд $\sum a_n z^n$ – «полный» (т.е. присутствуют все степени z).
2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей комплексной плоскости)
3) Для ряда $\sum a_n (z - z_0)^n$ круг сходимости имеет вид:

$$|z - z_0| < R\ .$$

Если ряд $\sum a_n (z - z_0)^n$ – «полный», то формулы (2) для него тоже справедливы.

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1) Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, целиком лежащем в круге сходимости.

2) Сумма степенного ряда является функцией аналитической.

3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Получающиеся при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный.

4) Степенной ряд можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в его круге сходимости.

4. Разложение фкп в степенной ряд

Напомним: *говорят, что функция* $f(x)$ *разложима в ряд, если* $\exists$ *функциональный ряд* $\sum f_n(x)$, *суммой которого является* $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $f(z)$ – *аналитическая в окрестности точки* z_0. ***Рядом Тейлора функции*** $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 (*по степеням* $z - z_0$) *называется степенной ряд вида*

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ТЕОРЕМА 7 (о разложении фкп в степенной ряд).

Если функция $f(z)$ *аналитична в круге* $|z - z_0| < R$, *то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in G = \{|z - z_0| < R\}$$

Разложения, полученные ранее для функций

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \ln(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

5. Ряд Лорана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \overset{опр}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (3)$$

называется ***рядом Лорана*** (*по степеням* $z-z_0$, *в окрестности точки* z_0).

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *называется* ***правильной частью ряда Лорана***,

Ряд $$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

называется ***главной частью ряда Лорана***.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ряд Лорана сходится в кольце

$$r < | z - z_0 | < R ,$$

где

$$\left. \begin{aligned} & R = \frac{1}{\ell}, \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |} \\ & r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \quad \text{или} \quad r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| b_n |} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

<u>Замечания.</u>

1) Формулы (4) справедливы, если ряд Лорана – «полный» (т.е. присутствуют все степени $z - z_0$).
2) Допускается $r = 0$ (ряд сходится в проколотой окрестности точки z_0) и $R = +\infty$ (ряд сходится во внешности круга $|z - z_0 | > r$).
3) Если $r \geq R$, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Из свойств функциональных рядов $\Rightarrow$

ТЕОРЕМА 8 (о сумме ряда Лорана).

Сумма ряда Лорана аналитична в кольце его сходимости.

ТЕОРЕМА 9 (о разложении функции в ряд Лорана).

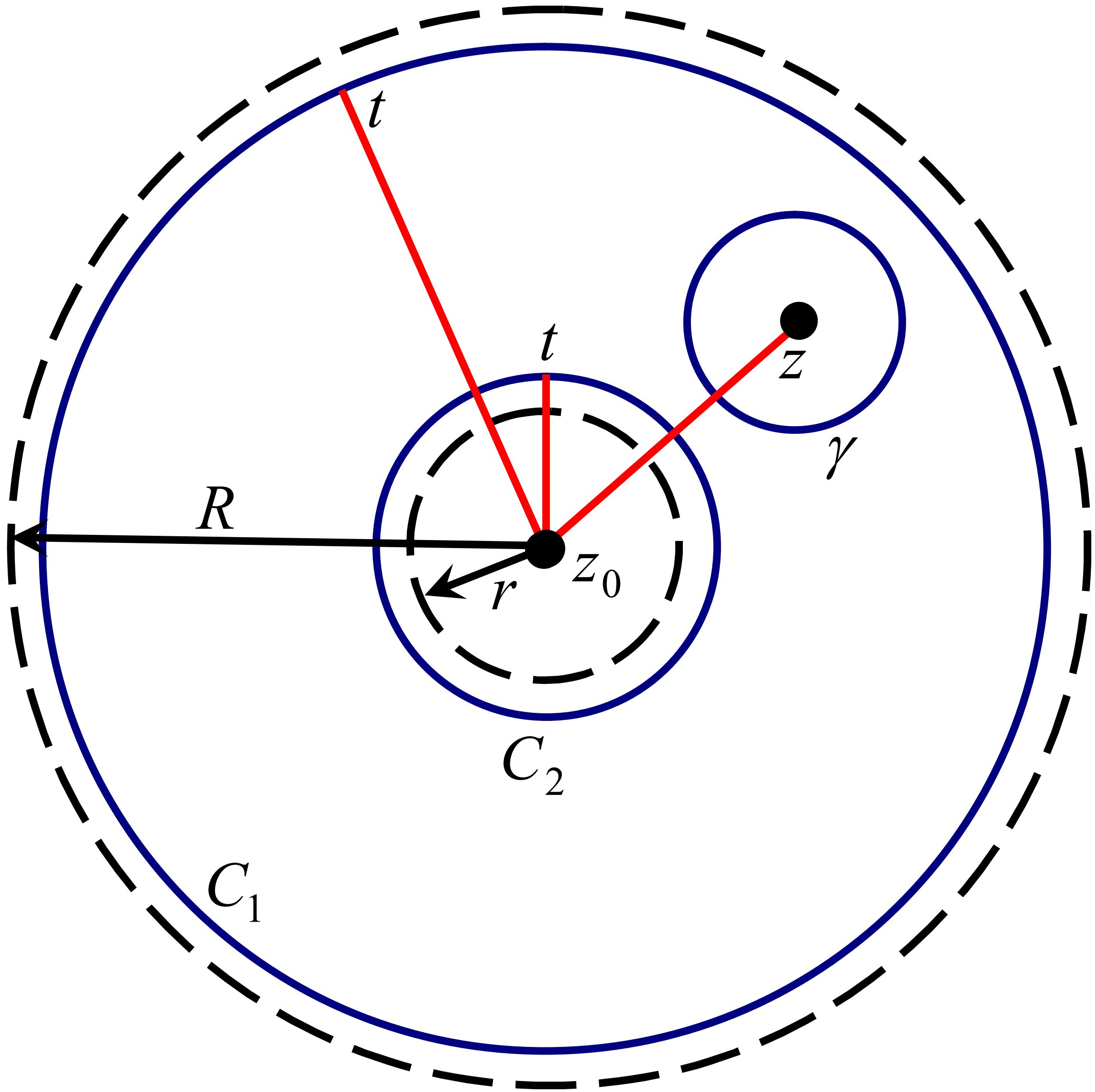
Всякая функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть представлена в этом кольце в виде суммы ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}},$$

C – любая окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Ряд Лорана, о котором идет речь в теореме 9, называется ***рядом Лорана функции*** $f(z)$ ***в окрестности точки*** z_0 (по степеням $z - z_0$).



t
t
z
γ
R
z0
r
C2
C1