

Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Интегрирование функций комплексного
переменного*

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

§ 6. Интегрирование функций комплексного переменного

1. Интеграл от фкп

Пусть (AB) – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в комплексной плоскости \mathbb{C} .

Выберем на (AB) направление:

- а) A – начало, B – конец, если (AB) не замкнутая;
- б) против часовой стрелки, если (AB) – замкнутая.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная на (AB) .

1. Разобьем кривую (AB) произвольным образом на n частей точками $z_0=A, z_1, \dots, z_n=B$ в направлении от A к B .
2. На каждой дуге $(z_{i-1}z_i)$ выберем произвольную точку ζ_i и вычислим произведение $f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i$, где $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Сумму
$$I_n(z_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $f(z)$ по кривой (AB) (соответствующей данному разбиению кривой (AB) и данному выбору точек ζ_i).

Пусть
$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta z_i|,$$

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(z_i, \zeta_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой (AB) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек ζ_i выполняется неравенство

$$|I_n(z_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(z_i, \zeta_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **интегралом от функции $f(z)$ по кривой (AB)** .

Обозначают:
$$\int_{(AB)} f(z) dz, \quad \oint_{(AB)} f(z) dz$$

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ОТ ФКП

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. *Интеграл от фки зависит от направления движения по кривой. При изменении направления движения по кривой (AB) интеграл меняет знак, т.е.*

$$\int_{(AB)} f(z)dz = - \int_{(BA)} f(z)dz$$

2. *Если кривая (AB) замкнута, то интеграл не зависит выбора начальной точки A , а зависит от направления обхода кривой.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.*

$$\int_{(AB)} c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_{(AB)} f(z) dz.$$

4. *Интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int_{(AB)} [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_{(AB)} f_1(z) dz \pm \int_{(AB)} f_2(z) dz$$

5. *Если кривая (AB) разбита точкой K на две части (AK) и (KB), то*

$$\int_{(AB)} f(z) dz = \int_{(AK)} f(z) dz + \int_{(KB)} f(z) dz$$

(свойство аддитивности интеграла от фкп).

$$6. \left| \int_{(AB)} f(z) dz \right| \leq \int_{(AB)} |f(z)| d\ell.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7. Если во всех точках кривой (AB) выполняется неравенство $|f(z)| < M$, то

$$\left| \int_{(AB)} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell,$$

где ℓ – длина кривой (AB) .

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФКП

ТЕОРЕМА 1 (существования интеграла от фкп).

Если (ℓ) – гладкая кривая, и функция $f(z)$ непрерывна на (ℓ) , то $f(z)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \left[\int_{(\ell)} u(x, y) dx - v(x, y) dy \right] + i \left[\int_{(\ell)} v(x, y) dx + u(x, y) dy \right] \quad (1)$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительная и мнимая часть функции $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

ТЕОРЕМА 2.

Если гладкая кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{где } \alpha \leq t \leq \beta \quad (A \leftrightarrow \alpha, B \leftrightarrow \beta),$$

и функция $f(z)$ интегрируема по кривой (ℓ) , то справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt ,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$ – комплексная форма параметрических уравнений кривой (ℓ) ,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2. Интегрирование аналитических фкп

Напомним:

ТЕОРЕМА. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл $\int_{(\ell)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

3) справедливы равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$;

4) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz .$$

Для плоской кривой и функций двух переменных получим:

ТЕОРЕМА. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxy$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл
$$\int_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависит от линии интегрирования;

2)
$$\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy = 0 \quad \forall (\ell) \subset D;$$

3) справедливы равенства
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

4) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.
$$du = Pdx + Qdy.$$

ТЕОРЕМА 3 (Коши, для односвязной области).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру (ℓ) , целиком лежащему в D , равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЯ.

- 1) Порядком связности области называется число связных частей, на которые разбивается ее граница.
- 2) Утверждение, обратное теореме 3, тоже справедливо. А именно:

Если $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $(\ell) \subset D$ выполняется условие

$$\oint_{(\ell)} f(z) dz = 0 ,$$

то $f(z)$ аналитична в D (теорема Морера).

ТЕОРЕМА 4 (о независимости интеграла от аналитической функции от формы кривой).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то $\forall A, B \in D$ интеграл

$$\int_{(AB)} f(z) dz$$

не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B .

Пусть G – $(n+1)$ -связная область, $(l), (l_1), \dots, (l_n)$ – ее границы.

(l) – внешняя граница G ,

$(l_1), \dots, (l_n)$ – внутренние границы G .

ТЕОРЕМА 5 (Коши для многосвязной области).

Пусть кривые $(l), (l_1), \dots, (l_n)$ – кусочно-гладкие, не пересекающиеся и ни одна из областей, ограниченных (l_j) не содержит кривой (l_j) .

Если $f(z)$ аналитична в области G и на ее границах, то

$$\oint_{+(l)} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{+(l_k)} f(z) dz .$$

3. Первообразная аналитической функции Неопределенный интеграл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $F(z)$ называется **первообразной функции** $f(z)$ на множестве D , если $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$.

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D , $z_0, z \in D$.

Тогда интеграл $\int_{z_0}^z f(z) dz$

не зависит от формы кривой, соединяющей z_0 и z .

\Rightarrow Если z_0 фиксировано, то $\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z)$

ТЕОРЕМА 6 (о существовании первообразной).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

Тогда $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$

является первообразной функции $f(z)$ в D .

ТЕОРЕМА 7 (о количестве первообразных).

Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 7.

Если $f(z)$ аналитическая и $f'(z) = 0$ в некоторой области D , то в этой области $f(z) = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество всех первообразных функции $f(z)$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(z)$ и обозначают

$$\int f(z)dz$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 6 и 7.

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее неопределенный интеграл может быть записан в виде

$$\int f(z)dz = \int_{z_0}^z f(z)dz + C$$

где C – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{C}$), а интеграл берется вдоль любой кривой в D , соединяющей точки z_0 и z .

ТЕОРЕМА 8 (формула Ньютона – Лейбница для интеграла от аналитической функции).

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от $f(z)$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки z_1 и z_2 , и справедлива формула:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

4. Интегральная формула Коши

ТЕОРЕМА 9 (интегральная формула Коши).

Пусть D – односвязная область, ограниченная кусочно-гладким контуром C ;

$\bar{D} = D \cup C$ – замыкание области D ;

$f(z)$ аналитична в замкнутой области \bar{D}

Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (2)$$

*Формула (2) называется **интегральной формулой Коши** .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть (ℓ) – кусочно-гладкая кривая ;
 $f(z)$ – непрерывна на (ℓ) .

Рассмотрим интеграл
$$\int_{\ell} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad (z \notin \ell)$$

Интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(t)dt}{t-z} = F(z)$$

где z – любая точка $\notin (\ell)$, называется **интегралом типа Коши**.

ТЕОРЕМА 10 (об аналитичности интеграла типа Коши).

Функция $F(z)$, определенная интегралом типа Коши, аналитична в любой конечной точке $z \notin (\ell)$.

Кроме того, она имеет производные любого порядка, причем справедлива формула

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 10 (теорема о производных высших порядков аналитической функции).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ее кусочно-гладкой границе C .

Тогда $f(z)$ имеет в D производные любого порядка, причем для них справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

где z_0 – любая точка области D .