Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Дифференцирование функций комплексного переменного***

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

§5. Дифференцирование функции комплексного переменного

1. Производная функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция,
$f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности.
Придадим z_0 приращение Δz такое, что $z_0 + \Delta z \in D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Производной функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 *называется*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

(*если он существует и конечен*).

Обозначают: $w'(z_0)$, $\dfrac{dw(z_0)}{dz}$, $f'(z_0)$, $\dfrac{df(z_0)}{dz}$.

Зависимость $z \to f'(z)$ является функцией. Ее называют ***производной функции f(z)*** и обозначают:

$$w'(z), \quad \frac{dw(z)}{dz}, \quad f'(z), \quad \frac{df(z)}{dz}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $w = f(z)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** z_0 *, если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно* Δz *части и бесконечно малой более высокого порядка чем* Δz , т.е.

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z \quad , \qquad (1)$$

где A *– комплексное число*, $\alpha = \alpha(z_0, \Delta z)$ *– бесконечно малая при* $\Delta z \to 0$.

Замечание. (1) *можно записать в виде*

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \beta(\Delta z) \quad ,$$

где $\beta(\Delta z)$ *– б.м. более высокого порядка чем* Δz.

Слагаемое $A \cdot \Delta z$ *в выражении* (1) *называют* ***дифференциалом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 и обозначают: $dw(z_0)$, $df(z_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $w = f(z)$ *дифференцируема в точке* $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0)$.

При этом для ее дифференциала в точке z_0 *справедливо равенство* $dw(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z$. (2)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2. (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)

Функция $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0 \Leftrightarrow$ 1) $u(x,y)$ и $v(x,y)$ *дифференцируемы в* $M_0(x_0,y_0)$

2) *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *выполняются условия Коши – Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Замечание. Если $f'(z_0)$ существует, то $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Имеем: $w = f(z) = \varphi(z, \bar{z})$

ТЕОРЕМА 3. (об условии, эквивалентном условиям Коши – Римана)

Условия Коши – Римана эквивалентны условию $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция элементарная, то для нее условия Коши – Римана выполняются и производная находится по обычным правилам.*

2. Аналитические функции

Областью *на комплексной плоскости называют открытое и связное множество*.

(т.е. множество, каждая точка которого – внутренняя и любые две точки которого можно соединить линией, целиком лежащей в этом множестве).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция $f(z)$ называется* ***аналитической в точке z_0*** *если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки z_0*.

Аналитические функции называют также *регулярными*, *голоморфными*, *моногенными*, *правильными*

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1) *Если функция* $f(z)$ *аналитическая в окрестности точки* z_0, *то* $f(z)$ *непрерывна в этой окрестности*.

2) *Если функции* $f(z)$ *и* $\varphi(z)$ *аналитичны в области* D, *то* $f(z)\pm\varphi(z)$ *и* $f(z)\cdot\varphi(z)$ *тоже аналитичны в этой области*.

Кроме того, их частное

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

аналитично всюду в области D, *где* $\varphi(z)\neq 0$.

3) *Если функция* $f(z)$: $D\to E$ *– аналитична в области* D,

$\varphi(z)$: $E\to G$ *– аналитична в области* E,

то функция $\varphi(f(z))$ *– аналитична в* D.

4) *Если в окрестности точки* z_0 *определена аналитическая функция* $f(z)$ *такая, что* $f'(z_0)\neq 0$, *то в некоторой окрестности точки* $w_0 = f(z_0)$ *определена единственная обратная функция* $z = \varphi(w)$, *которая будет аналитической в этой окрестности и для которой справедливо равенство*

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

5) *Пусть* $f(z)$ – *аналитическая в области* D. *Тогда*:

а) *если* $f(z) \neq \text{const}$ *в* D, *то* $|f(z)|$ *не достигает в* D *своего наименьшего значения*;

б) *если* $f(z) \neq 0$ *в* D, *то* $|f(z)|$ *не достигает в* D *своего наибольшего значения*;

в) *если* $f(z) \neq 0$ *в* D *и* $f(z)$ *непрерывна на границе области* D, *то* $|f(z)|$ *достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе области* D.

(принцип максимума модуля)

6) *Если* $f(z)\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *и* $f(z)$ *– ограниченная и аналитическая на всей комплексной плоскости, то* $f(z)=\mathrm{const}$.

(теорема Лиувилля)

7) *Если* $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ *– аналитическая в области* D , *то функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *являются гармоническими*

Функция $\varphi(x,y)$ называется ***гармонической***, если она удовлетворяет уравнению Лапласса

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана называются ***сопряженной парой гармонических функций*** (порядок функций в паре существенен!)

8) *Если* $f(z)$ *– аналитическая в области* D, *то действительная (мнимая) часть определяет ее с точностью до константы*.

9) *Пусть* $f(z)$ – *аналитическая в области* D , $z_0 \in D$ *и* $f'(z_0) \neq 0$. *Тогда все бесконечно малые дуги, выходящие из точки* z_0 *при отображении* $f(z)$ *поворачиваются на один и тот же угол, равный* $\arg f'(z_0)$, *и получают одно и то же растяжение, равное* $|f'(z_0)|$.

(геометрический смысл производной аналитической функции)