

Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Функции комплексного переменного.
Предел и непрерывность фкп*

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

§3. Функция комплексного переменного

1. Основные определения

Пусть D, E – множества комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $\forall z \in D$ поставлен в соответствие элемент $w \in E$ (один или несколько), то говорят, что на множестве D задана **функция** (**отображение**) с множеством значений E .

Записывают: $f: D \rightarrow E, \quad w = f(z)$
(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: D – **множество определения функции**
 $z (z \in D)$ – **аргумент (независимая переменная)**
 E – **множество значений**
 $w (w \in E)$ – **зависимая переменная (функция)**

Если $z \rightarrow w$, то функцию называют **однозначной**.

Если $z \rightarrow w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$, то функцию называют **многозначной**.

Пусть задана функция $w = f(z)$.

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y).$$

Таким образом, $f(z) \leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$.

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются соответственно **действительной** и **мнимой частью функции $f(z)$**

Обозначают: $\operatorname{Re}f(z)$ и $\operatorname{Im}f(z)$.

Т.к. $f(z)$ характеризуют 4 переменные (x, y, u, v) , то геометрическая интерпретация $f(z)$ невозможна.

Для геометрической иллюстрации $f(z)$ используют 2 экземпляра комплексных плоскостей: O_1xy и O_2uv ($D \subset O_1xy$, $E \subset O_2uv$).

Задание функции $f(z)$ устанавливает соответствие между двумя множествами D и E :

$$z \rightarrow w, \text{ где } z \in D, w \in E .$$

При этом устанавливается и обратное соответствие: $w \rightarrow z$.

Функция $z = \varphi(w)$ называется **обратной** к $f(z)$.

Если $f(z)$ и ее обратная $\varphi(w)$ – обе однозначны, то функция $f(z)$ называется **однолистной**.

2. Элементарные функции комплексного переменного

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой $w = f(z)$, где $f(z)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и комплексных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ Ф.К.П.

1) Степенная: $w = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$ ($\infty^n = \infty$);

б) однозначная, однолистная.

2) Корень n -степени ($n \in \mathbb{N}$): $w = \sqrt[n]{z}$

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$

б) многозначна $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0; \infty\}$.

3) Показательная функция: $w = e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

б) $e^z \big|_{z=x} = e^x$;

в) e^z – периодическая, $T = 2\pi i$.

4) Тригонометрические функции:

$$w = \cos z , w = \sin z , w = \operatorname{tg} z , w = \operatorname{ctg} z .$$

Свойства $w = \cos z$, $w = \sin z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\cos z \big|_{z=x} = \cos x$, $\sin z \big|_{z=x} = \sin x$;

в) периодические, $T = 2\pi$;

г) неограниченные;

д) $\cos z$ – четная, $\sin z$ – нечетная;

е) имеют только действительные нули

$$\cos z = 0 \text{ при } z = \pi/2 + \pi k ,$$

$$\sin z = 0 \text{ при } z = \pi k .$$

Свойства $w = \operatorname{tg}z$, $w = \operatorname{ctg}z$

а) $D(\operatorname{tg}z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$, $E(\operatorname{tg}z) = \mathbb{C}$,

$D(\operatorname{ctg}z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi k\}$, $E(\operatorname{ctg}z) = \mathbb{C}$;

б) $\operatorname{tg}z \big|_{z=x} = \operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}z \big|_{z=x} = \operatorname{ctg}x$;

в) периодические, $T = \pi$;

г) нечетные;

д) имеют только действительные нули

$$\operatorname{ctg}z = 0 \text{ при } z = \pi/2 + \pi k ,$$

$$\operatorname{tg}z = 0 \text{ при } z = \pi k .$$

б) Гиперболические функции: $\operatorname{ch}z$, $\operatorname{sh}z$, $\operatorname{th}z$, $\operatorname{cth}z$.

Свойства $w = \operatorname{ch}z$, $w = \operatorname{sh}z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\operatorname{ch}z|_{z=x} = \operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}z|_{z=x} = \operatorname{sh}x$;

в) периодические, $T = 2\pi i$;

г) $\operatorname{ch}z$ – четная, $\operatorname{sh}z$ – нечетная;

д) справедливы равенства (доказать самостоятельно):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch}z_1 \cdot \operatorname{ch}z_2 + \operatorname{sh}z_1 \cdot \operatorname{sh}z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z ;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh}z_1 \cdot \operatorname{ch}z_2 + \operatorname{ch}z_1 \cdot \operatorname{sh}z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh}2z = 2\operatorname{sh}z \cdot \operatorname{ch}z ;$$

$$\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{cos}y + i \cdot \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sin}y ;$$

$$\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{cos}y + i \cdot \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sin}y .$$

Свойства $w = \operatorname{th}z$, $w = \operatorname{cth}z$

а) $D(\operatorname{th}z) = \mathbb{C} \setminus \{(\pi/2 + \pi k)i\}$, $E(\operatorname{th}z) = \mathbb{C}$,

$$D(\operatorname{cth}z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi k i\} , E(\operatorname{cth}z) = \mathbb{C} ;$$

б) $\operatorname{th}z \Big|_{z=x} = \operatorname{th}x$, $\operatorname{cth}z \Big|_{z=x} = \operatorname{cth}x$;

в) периодические, $T = \pi i$;

г) нечетные.

7) Натуральный логарифм: $w = \operatorname{Ln}z$:

$$\operatorname{Ln}z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg}z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{arg}z + i \cdot 2\pi k .$$

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Функция $\ln z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{arg}z$ называется ***главным значением логарифма***.

8) Обратные тригонометрические:

$\text{Arcsin} z$, $\text{Arccos} z$, $\text{Arctg} z$, $\text{Arcctg} z$.

$$\text{Arcsin} z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \text{Arccos} z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\text{Arctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right), \quad \text{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \left(\frac{iz - 1}{iz + 1} \right). \quad (z \neq \pm i)$$

9) Общая степенная: $w = z^\mu$, где $\mu \in \mathbb{C}$.

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулой

$$w = z^\mu \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mu \cdot \text{Ln} z} .$$

Функция $w = e^{\mu \cdot \text{Ln} z}$ называется **главным значением общей степенной функции**.

10) Общая показательная: $w = a^z$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Многозначная функция, определенная на \mathbb{C} формулой

$$w = a^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \cdot \text{Ln} a} .$$

Функция $w = e^{z \cdot \text{Ln} a}$ называется **главным значением общей показательной функции**.

§4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

1. Предел функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, кроме, может быть, самой точки z_0 .

$U^*(z_0, \delta) = U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ – **проколота окрестность точки** z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε - δ).

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом функции $f(z)$ при z стремящемся к z_0** (пределом функции $f(z)$ в точке z_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что если $z \in U^*(z_0, \delta)$, то $f(z) \in U(w_0, \varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом функции $f(z)$ при z стремящемся к z_0** , если для любой последовательности $\{z_n\}$ значений аргумента, стремящейся к z_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к w_0 .

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Обозначают: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, $f(z) \rightarrow w_0$, и́дè $z \rightarrow z_0$

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Из определения 2 и теоремы 1 §2 получаем, что справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 2. *Число $w_0 = u_0 + iv_0$ является пределом функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ при $z \rightarrow z_0$ \Leftrightarrow*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{è} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0$$

Из теоремы 2 следует, что на пределы ф.к.п. переносятся все свойства пределов функций нескольких переменных.

2. Непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке z_0** если справедливо равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке ε - δ).

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке z_0** если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

если $z \in U(z_0, \delta)$ (т.е. $|z - z_0| < \delta$),

то $f(z) \in U(f(z_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

Функция, непрерывная в каждой точке множества $G \subseteq \mathbb{C}$, называется **непрерывной на множестве G** .

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Из теоремы 2 получаем, что справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 3. *Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Из теоремы 3 следует, что на непрерывные ф.к.п. переносятся все свойства непрерывных функций нескольких переменных.

В частности, для ф.к.п. будет справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (аналог теоремы Вейерштрасса для ф.к.п.)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D – замкнутое и ограниченное, $f(z)$ – непрерывна на D .

Тогда 1) $f(z)$ ограничена на D , т.е. $\exists M > 0$ такое, что

$$|f(z)| < M, \forall z \in D;$$

2) модуль функции $f(z)$ достигает в D наибольшего и наименьшего значения