Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Комплексные числа. Последовательности комплексных чисел***

Лектор Рожкова С.В.

2018 г.

Глава. Теория функций комплексного переменного

§1. Комплексные числа (повторение)

1. Определение

Выражение вида $x + \mathrm{i}y$ (где $x,y \in \mathbb{R}$) называется ***комплексным числом*** (в алгебраической форме).

Обозначают: $\{ z = x + \mathrm{i}y \mid \forall x,y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{C}$.

Называют: x – ***действительная часть*** z (обозначают: $\mathrm{Re}z$)

y – ***мнимая часть*** z (обозначают: $\mathrm{Im}z$).

Если $x = 0$, то к.ч. называют ***чисто мнимым***.

Если $y = 0$, то $z = x$ – действительное число.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (говорят: *множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел*)

2. Арифметические действия над к.ч.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

а) **Сложение (вычитание) к.ч.:**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

б) **Умножение к.ч.:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Частный случай – возведение в степень n ($n \in \mathbb{N}$):

$$z^n = (x + iy)^n = (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot \ldots \cdot (x + iy)$$

в) **Деление к.ч:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$

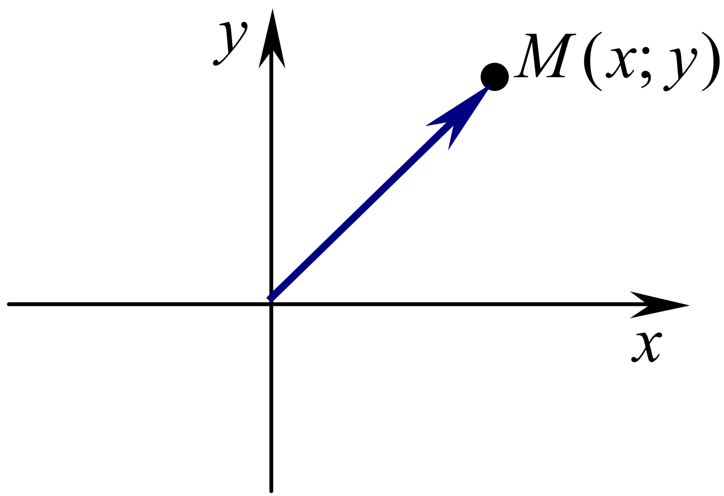
т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2},$$

где $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ – ***комплексно сопряженное*** к z_2

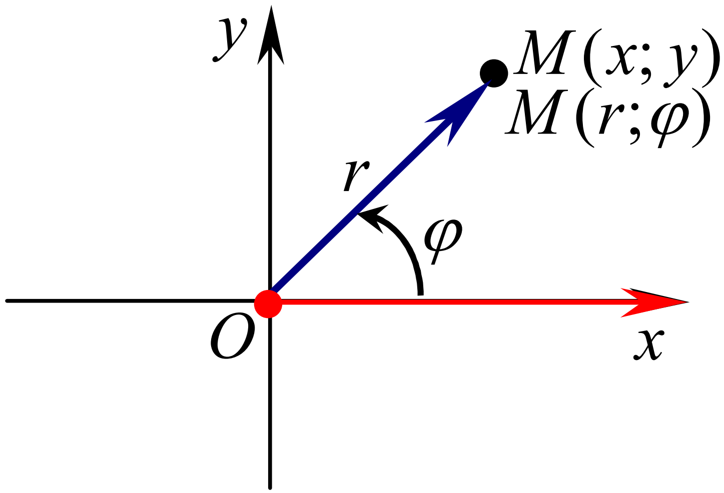
3. Геометрическая интерпретация к.ч.

Имеем: $z = x + \mathrm{i}y \quad \leftrightarrow \quad M(x\,;y)$



Комплексная плоскость

Пусть на комплексной плоскости введена полярная система координат



Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи к.ч.

НАЗЫВАЮТ: r – ***модуль*** к.ч. z , φ – ***аргумент*** к.ч. z

ОБОЗНАЧАЮТ:

$|z|$ – модуль к.ч. z ;

$\arg z$ – главное значение аргумента (т.е. $\varphi \in [0;2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi;\pi]$);

$\operatorname{Arg} z$ – все значения аргумента (т.е $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда: 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$,

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

3) $z^n = [r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$
(где $n \in \mathbb{N}$)

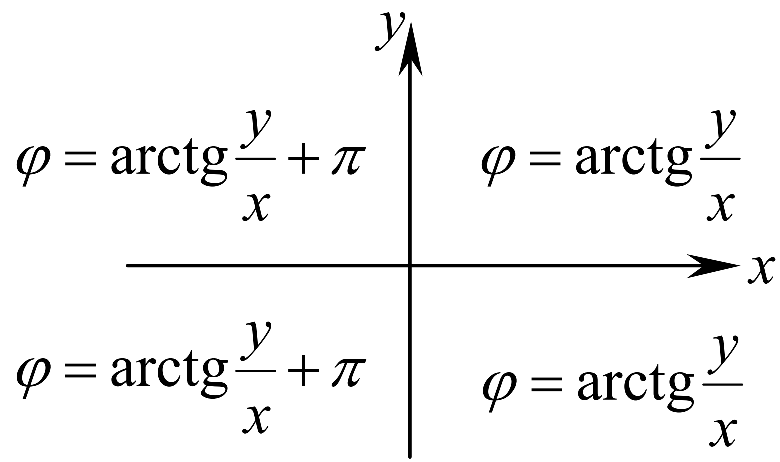
4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \{\omega_0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$, где

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = \overline{0; n-1}$$

4. Переход от алгебраической формы записи к.ч. к тригонометрической

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$.

Тогда $\quad |\, z \,| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\Rightarrow \quad \arg z = \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{åñëè } x > 0\,; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{åñëè } x < 0\,; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè } x = 0, \; y > 0\,; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè } x = 0, \; y < 0\,. \end{cases}$$

§2. Последовательности комплексных чисел

1. Определения и основные утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Последовательностью к.ч. называется перенумерованное множество комплексных чисел.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Последовательностью к.ч. называется функция, заданная на множестве натуральных чисел и имеющая множеством значений некоторое множество комплексных чисел*, т.е $z_n : \mathbb{N} \to Z$, где $Z \subseteq \mathbb{C}$.

Принято обозначать:

n (или k) – аргумент последовательности

z_n, w_n – значения функции

Записывают последовательность:

$\{ z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \}$ – развернутая запись;

$\{ z_n \}$ – короткая запись (где z_n – общий член)

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ *называется* ***пределом последовательности*** $\{ z_n \}$ *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ *такое*, *что*

$$|z_n - z_0| < \varepsilon , \ \ \forall n > N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0, \qquad z_n \to z_0$

Говорят: *последовательность* $\{z_n\}$ *сходится* (*стремиться*) *к* z_0.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (сходящейся к z_0)

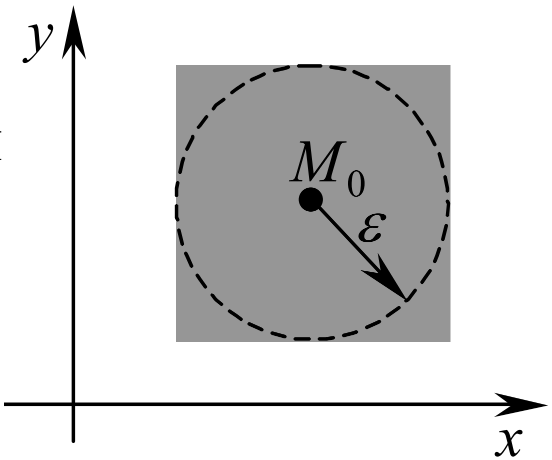
Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ К.Ч.

Имеем: $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \quad \leftrightarrow \quad M_0(x_0, y_0)$

ε-***окресностью числа*** z_0 называют открытый круг с центром в M_0 и радиуса ε .

Обозначают: $\mathrm{U}(z_0, \varepsilon)$



$\Rightarrow$ если $z = x + \mathrm{i}y \in \mathrm{U}(z_0, \varepsilon)$, то $|M_0M| < \varepsilon$ (где $M(x, y)$)

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |z - z_0| < \varepsilon$$

Таким образом $\mathrm{U}(z_0, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$ (алгебраическое определение ε-окрестности точки z_0)

Если $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε-окрестности точки z_0 находятся все члены последовательности $\{z_n\}$, за исключением может быть конечного их числа*. (Геометрическая интерпретация предела последовательности комплексных чисел).

$\Rightarrow z_0$ – точка «сгущения» последовательности $\{ z_n \}$.

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.

Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{x_n\}$, $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи сходимости последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$).

Последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$ сходится к $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ $\Leftrightarrow$ сходятся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из теоремы 1 следует, что часть свойств последовательностей действительных чисел остаются справедливыми для последовательностей к.ч.

А именно, справедливы следующие утверждения:

1) *Отбрасывание* (*добавление*) *конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость*.

2) *Последовательность может иметь не более одного предела*

3) *Если* $\{ z_n \} \to z_0$, *то* $\{ | z_n | \} \to | z_0 |$.

4) *Сходящаяся последовательность ограничена*.

5) *Пусть* $\{ z_{\text{n}} \}$ *и* $\{ w_{\text{n}} \}$ *– сходящиеся последовательности и*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w_0 .$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0 ;$$

$$b) \quad \lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0 ;$$

$$c) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_n}{w_n} \right) = \frac{z_0}{w_0} \quad (w_0 \neq 0).$$

6) *Если* $\{z_{\text{n}}\}$ *сходится к* z_0*, то* $\forall c \in \mathbb{C}$ *последовательность* $\{cz_{\text{n}}\}$ *тоже сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} (cz_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} z_n = cz_0 .$$

(Следствие свойства 5(*b*))

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{r_n \cdot (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)\}$.
Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{r_n\}$, $\{\varphi_n\}$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие сходимости последовательности к.ч.).

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Тогда последовательность $\{z_n\}=\{r_n \cdot (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)\}$ – *сходится*, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Утверждение обратное теореме 2 неверно.

Например: $$\{z_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} i\right\} \to 0,$$

но $$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\left(\cos\frac{(-1)^n \cdot \pi}{2} + i\sin\frac{(-1)^n \cdot \pi}{2}\right)\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot \pi}{2} \quad - \quad \nexists.$$

ПРИМЕР. С помощью теоремы 2, найти предел последовательности

$$z_n = \left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}, \quad \text{где } z = x + \mathrm{i}y .$$

2. Неалгебраические операции с комплексными числами

1) Если $x \in \mathbb{R}$, то

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}.$$

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$. **Полагаем:**

$$e^{z} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}.$$

$\Rightarrow$ по определению

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\cdot(\cos y + \mathrm{i}\sin y). \qquad (1)$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$,

2) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^{z}}$.

Замечание. Из (1), при $x = 0$, получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y .$$

$$\Rightarrow\ z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi},\ \ \forall z\in\mathbb{C} .$$

Представление комплексного числа в виде $z = r\cdot e^{i\varphi}$ (где r – модуль к.ч., φ – аргумент к.ч.), называется ***показательной формой записи*** к.ч.

2) Если $\forall y \in \mathbb{R}$, то $e^{iy} = \cos y + i \sin y$,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \qquad (2)$$

Формулы (2) называются ***формулами Эйлера***.

Пусть $z = x + iy$. **Полагаем**:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

3) Если $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$. **Полагаем:**

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

$$\cos(\mathrm{i}z) = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch}(\mathrm{i}z) = \cos z;$$

$$\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \sin z;$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \cdot \sin z$$

4) Пусть $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* w *назовем* ***натуральным логарифмом числа z***, *если* $e^w = z$.

Замечание. Натуральный логарифм числа z определен неоднозначно.

Все значения натурального логарифма z обозначают $\mathrm{Ln}z$.

Если $z = x + iy = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\mathrm{Ln}z = \ln r + i \cdot \mathrm{Arg}z = \ln r + i\varphi + i \cdot 2\pi k .$$

Число $\ln r + i\varphi = \ln|z| + i \cdot \arg z$ называется ***главным значением логарифма*** числа z и обозначают $\ln z$.

Справедливы **равенства множеств**

1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$,

2) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\, z - \mathrm{Ln}\, z = 2\pi k i$

5) Аналогично, как обратные к соответствующим операциям, вводятся операции

$$\operatorname{Arcsin}z\,,\ \operatorname{Arccos}z\,,\ \operatorname{Arctg}z\,,\ \operatorname{Arcctg}z\,,$$

$$\operatorname{Arcsh}z\,,\ \operatorname{Arcch}z\,,\ \operatorname{Arcth}z\,,\ \operatorname{Arccth}z\,.$$

При этом получим равенства (доказать самостоятельно):

$$\operatorname{Arcsin}z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\qquad \operatorname{Arccos}z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),\qquad \operatorname{Arcctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{iz-1}{iz+1}\right),$$

$$\operatorname{Arcsh}z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),\qquad \operatorname{Arcch}z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth}z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\qquad \operatorname{Arccth}z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

3.Бесконечно большие последовательности к.ч.

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность* $\{z_n\}$ *называют* ***бесконечно большой****, если* $\forall M>0 \;\; \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|z_{\mathrm{n}}| > M, \quad \forall n>N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ Б.Б. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Дополним множество $\mathbb{C}$ элементом, обозначаемым ∞ .

∞ называют ***бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости*** и полагают:

$$\frac{1}{0} = \infty, \qquad \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$z \cdot \infty = \infty, \;\; \forall z \neq 0; \qquad z \pm \infty = \infty, \;\; \forall z\in\mathbb{C} .$$

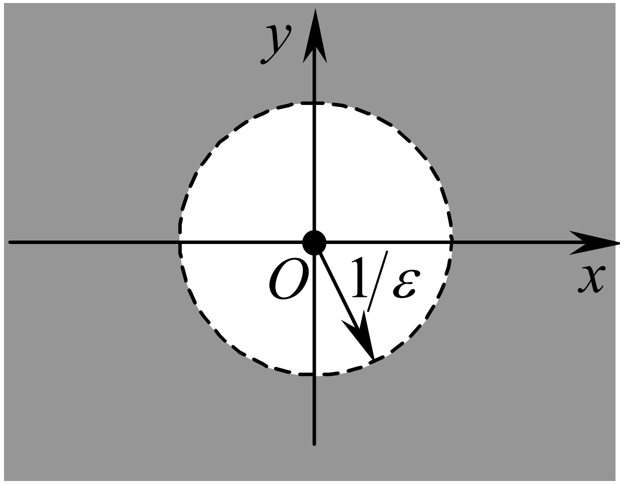
Выражения $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty \pm \infty$ не определены.

Комплексную плоскость, дополненную символом ∞ , называют ***расширенной комплексной плоскостью*** и обозначают $\overline{\mathbb{C}}$.

ε-окресностью точки ∞ называют множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

т.е. ε-окресность точки ∞ – область, вне круга с центром в точке O и радиуса $1/\varepsilon$.



Обозначают: U(∞, ε)

Если $\{z_n\}$ – б.б. последовательность, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности* $\{ z_n \}$, *за исключением может быть конечного их числа*.

(Геометрическая интерпретация б.б. последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, $\quad z_n \to \infty$

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.

Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{x_n\}$, $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 3 (о связи б.б. последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$).

Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *– б.б. последовательности, то последовательность* $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$ *тоже является б.б.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно.

Замечание. Утверждение, обратное теореме 3, неверно.