Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Тригонометрические ряды Фурье***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§38. Тригонометрические ряды Фурье

1. Разложение функции в тригонометрический ряд

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos\omega_1 x + b_1 \sin\omega_1 x) + (a_2 \cos\omega_2 x + b_2 \sin\omega_2 x) + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x) \qquad \textbf{(1)}$$

где a_0 , a_n , b_n $(n = 1,2,\ldots)$ – *числа* (***коэффициенты ряда*** (1)),

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n \in \mathbb{N},\ \ell > 0)$$

Замечание. Свободный член ряда (1) записан в виде дроби для единообразия последующих формул.

Справедливы утверждения:

1) Если $S(x)$ – сумма ряда (1), то $S(x)$ – периодическая, с периодом $T = 2\ell$.
2) Если ряд (1) сходится на отрезке, длиной 2ℓ , то он сходится на всей числовой оси.

   В общем случае область сходимости ряда (1) – объединение интервалов вида $(a + 2\ell k\ ;\ b + 2\ell k)$, где a,b – некоторые числа, $k \in \mathbb{Z}$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция $(T = 2\ell)$.

1) Разложима ли $f(x)$ в тригонометрический ряд?
2) Если $f(x)$ разложима в тригонометрический ряд, то как найти его коэффициенты?

Замечания.

1) Периодическую функцию достаточно рассматривать на любом отрезке длиной T .

   Удобнее всего брать отрезок $[-\ell\,;\,\ell]$ (где $T=2\ell$).

2) Имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\omega_n x dx=0,\qquad \int_{-\ell}^{\ell}\cos\omega_n x dx=0.\qquad \int_{-\ell}^{\ell}\sin\omega_n x\cdot\cos\omega_k x dx=0.$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\omega_n x\cdot\sin\omega_k x dx=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ n\neq k;\\ \ell, & \textit{если}\ \ n=k.\end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\omega_n x\cdot\cos\omega_k x dx=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ n\neq k;\\ \ell, & \textit{если}\ \ n=k.\end{cases}$$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция ($T = 2\ell$),

$f(x)$ – сумма тригонометрического ряда на $[-\ell\ ;\ \ell]$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x). \qquad \mathbf{(1)}$$

Пусть ряд сходится к $f(x)$ на $[-\ell\ ;\ \ell]$ равномерно.

Тогда 1) $f(x)$ – непрерывна на $[-\ell\ ;\ \ell]$;

2) $f(x)$ – интегрируема на $[-\ell\ ;\ \ell]$, причем

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx, \qquad \mathbf{(2)}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\cdot\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\cos\omega_n x dx \quad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad \mathbf{(3)}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\cdot\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\sin\omega_n x dx \quad (n = 1,2,3,\ldots). \qquad \mathbf{(4)}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x),$$

коэффициенты которого находятся по формулам (2), (3), (4), *называется* ***тригонометрическим рядом Фурье функции*** $f(x)$.

Коэффициенты, определяемые по формулам (2), (3), (4) называются ***коэффициентами Фурье функции*** $f(x)$.

Таким образом, справедлива теорема:

ТЕОРЕМА 1 (о разложении функции в тригонометрический ряд).

Если функция разлагается в тригонометрический ряд, то этот ряд является ее тригонометрическим рядом Фурье.

ТЕОРЕМА 2 (Дирихле).

Пусть $f(x)$ – периодическая ($T = 2\ell$), удовлетворяющая условиям:

1) *$f(x)$ на $[-\ell\ ;\ \ell]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;*
2) *$f(x)$ на $[-\ell\ ;\ \ell]$ монотонна или имеет конечное число точек экстремумов.*

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция $S(x)$, определенная следующим образом:

а) $S(x) = f(x)$, *если x – точка непрерывности $f(x)$;*

б) $S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *если x – точка разрыва $f(x)$.*

При этом тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции $f(x)$.

Условия теоремы 2 называются ***условиями Дирихле***.

Функция, удовлетворяющая 2-му условию Дирихле, называется ***кусочно-монотонной***.

ТЕОРЕМА 3 (2-е достаточное условие разложения функции в тригонометрический ряд).

Пусть $f(x)$ *– периодическая функция* $(T = 2\ell)$.

Если на $[-\ell\ ;\ \ell]$ *функция* $f(x)$ *и ее производная* $f\,'(x)$ *непрерывны или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция* $S(x)$*, определенная следующим образом:*

а) $S(x) = f(x)$, *если* x *– точка непрерывности* $f(x)$;

б) $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, *если* x *– точка разрыва* $f(x)$.

При этом тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ *сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции* $f(x)$.

Функция, удовлетворяющая условию теоремы 3, называется ***кусочно-гладкой***.

2. Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – периодическая, $T = 2\ell$.

а) Пусть $f(x)$ – четная.

Ее тригонометрический ряд Фурье: $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x$,

где $$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \omega_n x dx \quad (n = 0,1,2,3,\ldots), \qquad \mathbf{(5)}$$

б) Пусть $f(x)$ – нечетная.

Ее тригонометрический ряд Фурье: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n x$,

где $$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \omega_n x dx \quad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad \mathbf{(6)}$$

3. Разложение в тригонометрический ряд Фурье непериодических функций, заданных на $(-\ell\ ;\ \ell)$ или $[0\ ;\ \ell)$

а) Пусть $f(x)$ задана на $(-\ell\ ;\ \ell)$ и удовлетворяет на $[-\ell\ ;\ \ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой).

Периодически продолжаем $f(x)$ на $\mathbb{R}$,
т.е. задаем функцию $F(x)$ такую, что

$$F(x) = f(x)\ , \quad \forall x \in (-\ell\ ;\ \ell)\ ,$$

$$F(x + 2\ell k) = F(x)\ , \quad \forall k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ряд Фурье функции $F(x)$, рассматриваемый только на интервале $(-\ell\ ;\ \ell)$, называют рядом Фурье функции $f(x)$ на $(-\ell\ ;\ \ell)$.

б) Пусть $f(x)$ задана на $[0\,;\,\ell)$ (или $(0\,;\,\ell)$) и удовлетворяет на $[0\,;\,\ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой)

Доопределяем $f(x)$ на $(-\ell\,;\,0)$ (четным или нечетным образом).

Получившуюся функцию $\bar{f}(x)$ периодически продолжаем на $\mathbb{R}$.

Ряд Фурье периодического продолжения функции $\bar{f}(x)$, рассматриваемый только на $[0\,;\,\ell)$, называют рядом Фурье функции $f(x)$ на $[0\,;\,\ell)$.

Замечания.

1) Доопределение функции на $f(x)$ четным или нечетным образом позволяет избежать нахождения аналитического выражения функции $\bar{f}(x)$ на $(-\ell\ ;\ 0)$ (т.к. коэффициенты Фурье находятся по формулам (5) или (6).

2) Если $f(0) \neq 0$, то $f(x)$ лучше продолжать на $(-\ell\ ;\ 0)$ четным образом (т.к. 0 в этом случае будет точкой непрерывности функции $\bar{f}(x)$).

   Если $f(0) = 0$, то продолжать $f(x)$ на $(-\ell\ ;\ 0)$ можно как четным, так и нечетным образом.

3) Если функция задана на $[0\ ;\ \ell)$, то она разлагается в ряд Фурье не единственным образом.

4. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$.

По определению полагают

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + \mathrm{i} \cdot \sin y) \;.$$

Если $x = 0$, то

$$e^{\mathrm{i}\,y} = \cos y + \mathrm{i} \cdot \sin y \;.$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\mathrm{i}\,y} = \cos y - \mathrm{i} \cdot \sin y$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \qquad (7)$$

Формулы (7) называются **формулами Эйлера**.

Пусть $f(x)$ – периодическая, $T = 2\ell$.

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно записать в более компактной тригонометрической форме:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

где $\omega = \dfrac{\pi}{\ell}$, $c_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot e^{-in\omega x}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

§39. Ряды Фурье

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – определены и интегрируемые на $[a;b]$.

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ***ортогональными на [a;b]***, если

$$\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)dx = 0.$$

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … определены на $[a;b]$ и интегрируемых на $[a;b]$ вместе с их квадратами.

Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots \qquad (8)$$

называется ***ортогональной на [a;b]***, если все функции последовательности попарно ортогональны на $[a;b]$, т.е. если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_j(x)dx = 0 \qquad (i \neq j).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ или имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва 1 рода.

***Рядом Фурье функции** $f(x)$ на $[a;b]$ **по ортогональной системе (8)** называется ряд*

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b[\varphi_n(x)]^2dx},\qquad n=1,2,3,\ldots$$