

Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: *Степенные ряды.*
Разложение функции в степенной ряд

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§34. Степенные ряды

Степенным рядом (рядом по степеням $x-x_0$) называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**.

Частный случай степенного ряда – **ряд по степеням x** :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (1)$$

Будем изучать ряд $\sum a_nx^n$. На общий случай результаты переносятся заменой $x \rightarrow x-x_0$.

1. Сходимость степенных рядов

Степенной ряд $\sum a_n x^n$ всегда сходится в точке $x = 0$.

ТЕОРЕМА 1 (Абеля).

- 1) Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x| < |x_1|$;
- 2) Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ расходится в точке x_2 , то он расходится в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x| > |x_2|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из теоремы 1 $\Rightarrow \exists R > 0$ такое, что ряд $\sum a_n x^n$ сходится (абсолютно) при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Число R называют **радиусом сходимости** ряда $\sum a_n x^n$.

Интервал $(-R; R)$ называют **интервалом сходимости** ряда $\sum a_n x^n$.

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда $\sum |a_n x^n|$ находим:

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ где } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ или } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (2)$$

Замечания.

- 1) Формулы (2) справедливы, если ряд $\sum a_n x^n$ – «полный» (т.е. присутствуют все степени x).
- 2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей числовой оси)
- 3) Для ряда $\sum a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид:
 $|x - x_0| < R \Leftrightarrow (x_0 - R; x_0 + R).$

Если ряд $\sum a_n (x - x_0)^n$ – «полный», то формулы (2) для него тоже справедливы.

2. Свойства степенных рядов

ЛЕММА 2.

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]$, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ леммы 2.

Степенной ряд равномерно сходится в интервале сходимости

ЛЕММА 3.

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

имеют один и тот же радиус сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ леммы 3.

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)''$, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'''$, ..., $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(k)}$ имеют тот же радиус сходимости, что и ряд $\sum a_n x^n$

СЛЕДСТВИЕ леммы 2 и 3.

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)', \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'', \quad \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(k)}, \quad \dots$$

равномерно сходятся в интервале сходимости.

Из леммы 2 и 3, их следствий и свойств равномерно сходящихся рядов следует, что степенные ряды обладают свойствами:

- 1) *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.*
- 2) *Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости.*
- 3) *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз.*

Замечание.

Если конец интервала сходимости входит в область сходимости, то сумма степенного ряда будет в этой точке непрерывна, т.к. справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (Абеля о сумме степенного ряда на концах интервала сходимости).

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится на $(-R ; R)$ к функции $S(x)$.

Если ряд сходится на концах интервала сходимости, то его сумма в этих точках равна соответственно

$$S(-R) = \lim_{x \rightarrow -R+0} S(x),$$

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

§35. Разложение функции в степенной ряд

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд на промежутке X , если \exists функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого на X является $f(x)$.*

ЗАДАЧИ:

- 1) Найти условия, при которых функция $f(x)$ разложима в степенной ряд.
- 2) Указать этот степенной ряд.

Пусть $f(x)$ – бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (по степеням $x - x_0$) называется степенной ряд вида*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням x (т.е. $x_0 = 0$)

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

называют **рядом Маклорена**

ТЕОРЕМА 1 (о разложении функции в степенной ряд).

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 , то этот ряд является ее рядом Тейлора по степеням $x - x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание.

Существование для функции ряда Тейлора не гарантирует разложение функции в степенной ряд.

Сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ может не совпадать с самой функцией $f(x)$.

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируема в окрестности x_0 .

\Rightarrow для $f(x)$ можно записать ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Пусть $S_n(x)$ – n -я частичная сумма этого ряда, т.е.

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$S_n(x)$ называют ***многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$*** .

Пусть

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

$R_n(x)$ называют ***остаточным членом ряда Тейлора***.

ТЕОРЕМА 2 (необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ для функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности x_0 и все ее производные ограничены в совокупности, то $f(x)$ разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

§36. Ряды Маклорена некоторых элементарных функций

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$2) \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x$$

$$3) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Доказать самостоятельно:

$$4) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x$$

$$5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\begin{aligned} 6) \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1 \end{aligned}$$

Доказать самостоятельно:

$$\begin{aligned} 7) \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$8) (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$