Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Функциональные ряды***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§33. Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$ с общей областью определения D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение вида*

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

называют ***функциональным рядом***.

При этом, члены последовательности $\{f_n(x)\}$ называются ***членами ряда*** (0-м, 1-м, …, n-м (общим членом)).

Пусть $x_0 \in D$. Рассмотрим числовой ряд $\sum f_n(x_0)$.

Если ряд $\sum f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что ***ряд*** $\sum f_n(x)$ ***сходится в точке*** x_0.

Множество $D_1 = \{ x_0 \in D \mid \sum f_n(x_0)$ –сходится$\}$ называют ***областью сходимости функционального ряда*** $\sum f_n(x)$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве D_1 и такая, что ее значение в любой точке $x_0 \in D_1$ совпадает с суммой числового ряда $\sum f_n(x_0)$, называется ***суммой функционального ряда*** $\sum f_n(x)$ (1-е определение суммы функционального ряда).

Построим последовательность

$$S_1(x) = f_1(x), \quad S_2(x) = f_1(x)+f_2(x)\ , \ \ldots\ ,$$
$$S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x), \ \ldots$$

Функции $S_1(x)$, $S_2(x)$, … , $S_n(x)$ называются ***частичными суммами ряда*** $\sum f_n(x)$.

Множество $D_2=\{\ x_0\in D \mid \{S_n(x_0)\}$ –сходится$\}$ называют ***областью сходимости функциональной последовательности*** $\{S_n(x)\}$.

Функция $f(x)$, определенная на D_2 и такая, что $f(x_0)$ совпадает с пределом последовательности $\{S_n(x_0)\}$ $(\forall x_0\in D_2)$, называется ***пределом функциональной последовательности*** $\{S_n(x)\}$.

Но $S_n(x_0)$ – частичная сумма числового ряда $\sum f_n(x_0)$.

$\Rightarrow$ а) $D_1=D_2$;

б) *Предел функциональной последовательности* $\{S_n(x)\}$ *есть сумма ряда* $\sum f_n(x)$

(2-е определение суммы функционального ряда).

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1) *Определить область сходимости функционального ряда и найти его сумму*.

Область сходимости функционального ряда D_1 находится с помощью признаков сходимости числовых рядов.
Область сходимости – множество тех x, для которых выполняются необходимое и достаточное условие сходимости.

Сумму ряда обычно находят только приближенно.
Полагают $f(x) \approx S_n(x)$, где n выбирают так, чтобы

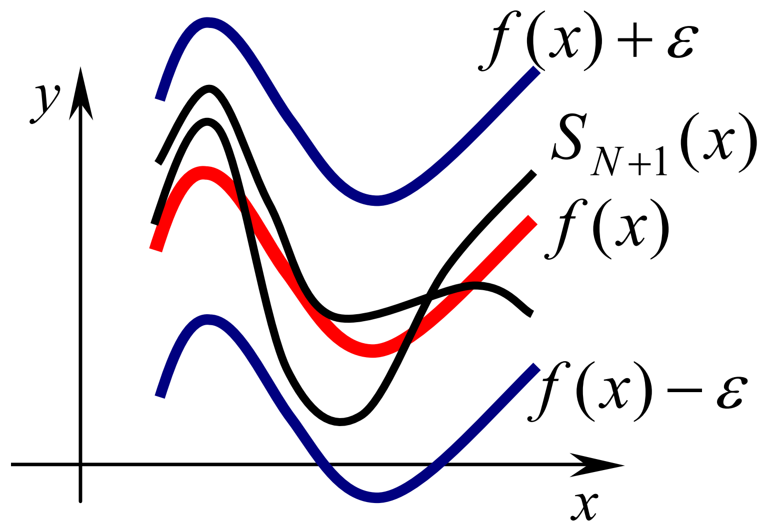
$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in D_1 \text{ (ε заранее задано).}$$

2) *Определить, какие из свойств членов ряда переносятся на сумму ряда*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *к* $f(x)$ *на множестве* $H \subset D_1$ *, если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ , \ \forall n > N \text{ и } \forall x \in H$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ



Если $\sum f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на множестве равномерно $H \subset D_1$, то в любой ε-полоске функции $f(x)$ находятся все частичные суммы ряда, за исключением, возможно, конечного их числа.

ТЕОРЕМА 1 (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Ряд $\sum f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* H *к функции* $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \ ,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$ и $\forall x \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ ***мажорируется*** *на множестве* H *числовым рядом* $\sum a_n$, *если* $|f_n(x)| < a_n$, $\forall n, \forall x \in H$.

ТЕОРЕМА 2 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса).

Если ряд $\sum f_n(x)$ *мажорируется на* H *сходящимся числовым рядом* $\sum a_n$, *то он сходится на* H *равномерно.*

Замечание.

Признак Вейерштрасса достаточный. Т.е. $\exists$ равномерно сходящиеся ряды, для которых не удается подобрать мажорирующий сходящийся ряд.

Равномерно сходящиеся ряды, для которых можно найти мажорирующий сходящийся ряд часто называют ***правильно сходящимися***.

СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1) *Если* $\sum f_n(x)$ *сходится на промежутке* $H \subset \mathbb{R}$ *равномерно и* $\varphi(x)$ – *ограничена на* H, *то ряд* $\sum \varphi(x) f_n(x)$ *тоже сходится на* H *равномерно*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) *Пусть* $\sum f_{\text{n}}(x)$ *сходится к* $f(x)$ *на промежутке* $H \subset \mathbb{R}$ *равномерно*, $x_0 \in H$ *и существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда: а) *числовой ряд* $\sum c_{\text{n}}$ *сходится*;

б) *сумма ряда* $\sum c_{\text{n}}$ *равна* $c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Иначе говоря,

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

3) *Если ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на промежутке* $H \subset \mathbb{R}$ *равномерно и в точке* $x_0 \in H$ *все функции* $f_n(x)$ *непрерывны, то сумма ряда* $f(x)$ *тоже непрерывна в точке* x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4) *Если функции* $f_n(x)$ *непрерывны на промежутке* $H\subset\mathbb{R}$ *и ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на* H *равномерно к* $f(x)$ *, то* $\forall x_0, x\in H$ *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right)$$

тоже сходится на H *равномерно и его сумма равна*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно интегрировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right)=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)dt$$

5) *Пусть функции* $f_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $H \subset \mathbb{R}$ *и ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на* H *к* $f(x)$.

Если ряд $\sum f_n'(x)$ *сходится на* H *равномерно, то ряд* $\sum f_n(x)$ *тоже сходится на* H *равномерно, его сумма* $f(x)$ *является функцией непрерывно дифференцируемой и имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно дифференцировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)'$$