Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка***

(однородные с постоянными коэффициентами, уравнения Эйлера)

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0 , \qquad (10)$$

где $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ – некоторые действительные числа.

Уравнение (10) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами***.

Решения уравнения (10) будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x} , \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} , \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} , \quad \ldots , \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x} .$$

Подставляем $y , y' , y'' , \ldots , y^{(n)}$ в уравнение (10) и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0 ,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 . \qquad (11)$$

Уравнение (11) называется ***характеристическим уравнением*** (для) уравнения (10).

Многочлен в левой части (11) называется ***характеристическим многочленом***,

Корни уравнения (11) называются ***характеристическими корнями*** уравнения (10).

Замечания.

1) Формально характеристическое уравнение (11) получается из (10) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

2) Уравнение (10) – алгебраическое уравнение n-й степени.
   $\Rightarrow$ оно имеет n корней, но
   1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;
   2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

   Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю ф.с.р. уравнения (10).

ТЕОРЕМА 6.

Пусть λ *– характеристический корень уравнения* (10). *Тогда*

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– простой корень уравнения* (11), *то решением уравнения* (10) *является функция* $e^{\lambda x}$;
2) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11) , *то решениями уравнения* (10) *являются функции*
$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \ \ldots, \ x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$
3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– простой корень уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем уравнения* (11), *а решениями уравнения* (10) *являются функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x , \quad e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x ;$$
4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (11), *а решениями* (10) *являются функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ \ xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ \ x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ \ \ldots, \ \ x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$
$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \ \ xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \ \ x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \ \ \ldots, \ \ x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x .$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n *решений уравнения* (10) *будут образовывать его ф.с.р.*

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0$$

4. Уравнения Эйлера

Линейное однородное уравнение вида

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \qquad (12)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$) называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$.

$\Rightarrow$ фундаментальная система решений уравнения (12) состоит из функций вида

$$x^\lambda \;\leftrightarrow\; e^{\lambda t}\;;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\lambda \;\leftrightarrow\; t^\ell \cdot e^{\lambda t}\;;$$

$$x^\alpha \cdot \cos(\beta \ln x)\,,\; x^\alpha \cdot \sin(\beta \ln x) \;\leftrightarrow\; e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t\,,\; e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t\;;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\alpha \cos(\beta \ln x),\; \ln^\ell x \cdot x^\alpha \sin(\beta \ln x) \;\leftrightarrow\; t^\ell e^{\alpha t} \cos\beta t,\; t^\ell e^{\alpha t} \sin\beta t\,.$$

Замечание. На практике, при интегрировании уравнения Эйлера, можно сразу записать его характеристическое уравнении.

Действительно, характеристическое уравнение – это условие для λ, при котором $e^{\lambda t}$ является решением ЛОДУ.

Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получится, если потребовать, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (12).

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

5. ЛОДУ 2-го порядка, с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0\,. \qquad (13)$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (13).

Тогда его общее решение можно найти по формуле Абеля:

$$y = y_1 u = y_1\cdot\left(\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$,

если известно, что его решением является функция

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$