Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

Глава IV. Дифференциальные уравнения высших порядков

§25. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка *называют уравнения порядка выше первого.*

В общем случае ДУ высшего порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где $n > 1$.

Замечание. Функция F может и не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

ДУ высшего порядка, которое можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

называют ***уравнением, разрешенным относительно старшей производной***.

ДУ порядка n имеет множество решений (интегралов).

Чтобы выбрать одно из них, задают n условий, которым должно удовлетворять искомое решение.
Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \quad (3)$$

Совокупность условий (3) называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

выполняются два условия:

1) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;

2) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *имеет в этой области* D *ограниченные частные производные по переменным* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$ *существует, и притом единственное, решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_{01}, \varphi''(x_0) = y_{02}, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка $(n > 1)$ НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$.
Кривых через точку M_0 проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) ДУ (2) имеет множество решений.
2) Совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

в области D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x *и* n *произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \qquad (3)$$

(*где* $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$), *можно найти единственный набор значений* $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}, \ldots, C_n = C_{0n}$ *такой, что функция* $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n})$ *удовлетворяет заданным начальным условиям.*

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения***.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных C_i (включая $C_i = \pm\infty$), является частным.

Решение (интеграл), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***.

Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. Оно всегда «теряется» в процессе интегрирования.

§26. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $F(x,y^{(n)}) = 0$

Возможны 2 случая:

1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$,
2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

1) Пусть уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(x)\ , \qquad (4)$$

где $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$.

Общее решение уравнения (4) получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части, т.е. имеет вид:

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} \cdot x + C_n \,.$$

2) Пусть уравнение $F(x, y^{(n)}) = 0$ не разрешено относительно $y^{(n)}$.

Если уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \varphi(t)\ , \qquad y^{(n)} = \psi(t)\ ,$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно,

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} \qquad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot dx\ ;$$

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= \psi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Аналогично найдем $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, … y', y и получим общее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}$$

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \quad (1 \le k < n)\,. \tag{5}$$

Уравнение (5) допускает понижение порядка на k единиц.

Действительно, сделаем замену $y^{(k)} = z(x)$.

Тогда $y^{(k+1)} = z'(x)\,, \quad y^{(k+2)} = z''(x)\,, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

и уравнение примет вид

$$F(x\,, z\,, z'\,, \ldots, z^{(n-k)}) = 0\,. \tag{5_1}$$

Пусть $z = \varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})$ – общее решение (5_1).

Тогда $y^{(k)} = \varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})\,.$

$\Rightarrow$ общее решение уравнения (5) получается k-кратным интегрированием функции $\varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})\,.$

3. Уравнение не содержит независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y\,,y'\,,y''\,,\,\dots\,,y^{(n)}) = 0\,, \qquad (6)$$

Уравнение (6) допускает понижение порядка на единицу.

Действительно, сделаем замену $y' = z(y)$.

Тогда

$$y'' = z' \cdot z\,,$$

$$y''' = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \omega(z\,,z'\,,z''\,,\,\dots\,,z^{(n-1)})\,.$$

Подставляя эти выражения в (5), получаем уравнение (n – 1)-го порядка.

Пусть $z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – общее решение получившегося после замены уравнения.

Тогда $$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет иметь вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C.$$

4. Уравнение, однородное относительно неизвестной функции и ее производных

Уравнение $F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$

называется ***однородным относительно*** $\boldsymbol{y, y', y'', \ldots, y^{(n)}}$, *если при всех* $t \neq 0$ *выполняется тождество*

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) .$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой $y' = yz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.