Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§20. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y'.*

$\Rightarrow$ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) , \qquad (8)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx} , \quad \forall C . \qquad (9)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (8):

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)\,. \qquad (8)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) ***Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)***

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.

   Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

   $\Rightarrow$ Оно имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

   Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

Получим: $$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

$$y(x)=\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (10)$$

Замечания.

1) Раскроем скобки в (10):

$$y(x)=C\cdot e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C=0$).

2) Так как $e^x \neq 0$, то любую функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{y(x)}{e^x} \cdot e^x .$$

Это является основанием метода вариации постоянной.

II) *Метод Бернулли*.

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x) .$$

Тогда $$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $$u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x) .$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left.\begin{array}{l} [\, v' + pv \,] = 0 . \\ u' \cdot v = f(x) . \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Тогда

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$. При этом получим

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднордное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными

§21. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^n\,, \qquad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (13) разделить на y^n,

2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \widetilde{u}(x) \cdot \widetilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.