

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: *Однородные уравнения.
Уравнения, приводящиеся
к однородным*

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§18. Однородные уравнения

Функция $M(x, y)$ называется **однородной степени m** (или **измерения m**), если $\forall t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y).$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y,$$

$$f(x, y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8},$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2},$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

$$f(x, y) = \sin \frac{x}{y} + \ln y - \ln x.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется **однородным** относительно x и y , если функция $f(x, y)$ является однородной нулевой степени.

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y , если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z(x) = \frac{y}{x}$$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

§19. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (7)

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) Если $\Delta \neq 0$, то (7) приводится к однородному уравнению.

Действительно, если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t + \alpha) + b_1(z + \beta) + c_1}{a_2(t + \alpha) + b_2(z + \beta) + c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2t + b_2z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right)}_{\text{однородное уравнение}}$$

однородное уравнение

б) Если $\Delta = 0$, то уравнение (7) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, если $\Delta = 0$, то строки определителя Δ пропорциональны (см. упражнение в курсе «Линейная алгебра»),

т.е.
$$a_2 = \lambda a_1 , \quad b_2 = \lambda b_1 .$$

Тогда
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \varphi(a_1x + b_1y) .$$

Это уравнение (6) (см. §17). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z(x) = a_1x + b_1y .$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-го порядка называется **обобщенно однородным**, если существует такое рациональное число α , что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени m относительно x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), если считать x – величиной измерения 1, y – величиной измерения α , $y'(dy)$ – величиной измерения $\alpha - 1$, dx – величиной измерения 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^\alpha y)dx + Q(tx, t^\alpha y) \cdot (t^{\alpha-1} dy) = t^m \cdot [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] .$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^\alpha$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^\alpha$.