Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы $\int \cos kx \sin mx dx$, $\int \cos kx \cos mx dx$, $\int \sin kx \sin mx dx$ **.**

Использовать формулы $\cos kx \sin mx = \frac{1}{2}[\sin(m-k)x + \sin(m+k)x]$,

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(m-k)x + \cos(m+k)x],$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(m-k)x - \cos(m+k)x].$$

2. Интегралы вида $\int \sin^{m} x \cdot \cos^{n} x dx$**, где** m, n **– целые неотрицательные числа.**

а) Только **одно из чисел** m **и** n **– нечетное:** от нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменой;

б) **Оба числа** m **и** n **– нечетные:** от меньшей нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменной;

в) **Оба числа** m **и** n **– четные:** понизить степень функций с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

3. Интегралы $\int R(\sin x, \cos x) dx$**, где** R **– рациональная функция.**

а) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **нечетная относительно** $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \cos x$ $\Rightarrow$ $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

б) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **нечетная относительно** $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \sin x$ $\Rightarrow$ $x = \arcsin t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

в) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **четная относительно** $\sin x$ **и** $\cos x$, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

г) **Общий случай**. Замена $tg\frac{x}{2} = t$ (ее называют ***универсальной подстановкой***).

$$\Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

4. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ **и** $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$**.**

Замены: $t = tgx$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$t = ctgx$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arc\,ctg} t$, $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$,