Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Несобственные интегралы***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

§5. Несобственные интегралы

Для существования $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall[a;b]$, где $b \geq a$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$, $D(I) = [a;+\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом I рода*** *от функции* $f(x)$ *по промежутку* $[a;+\infty)$ *называется предел функции* $I(b)$ *при* $b \to +\infty$.

Обозначают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Таким образом, по определению

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** **$(-\infty;b]$:**

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то ***несобственным интегралом*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;+\infty)$ называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

где c – любое число.

Несобственный интеграл от $f(x)$ по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

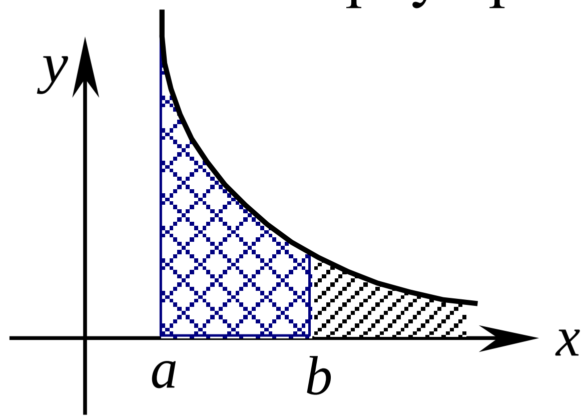
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку $[a;+\infty)$. Для интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ и $(-\infty;+\infty)$ все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;+\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(a)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \qquad (3)$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Тогда (3) примет вид:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов по промежутку $[a;+\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx;$

2) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n};$ $(a > 0)$

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx;$ $(\alpha \neq 0)$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4 + x^2};$

5) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} dx;$ $(\alpha \neq 0)$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}.$

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

ТЕОРЕМА 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;+\infty)$ *и*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)\,,\ \ \forall x \in [c;+\infty)\ \ (\text{где } c \ge a).$$

Тогда:

1) *если* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *– сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится,*

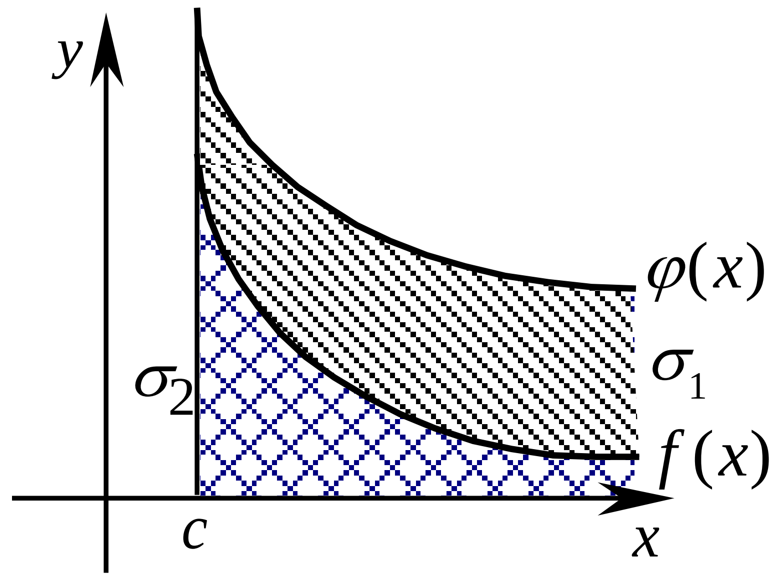
причем

$$\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_c^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *– расходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *тоже рас-ходится.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть (σ_1) и (σ_2) – области в xOy , ограниченные осью Ox, прямой $x = c$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ соответственно. Неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ (где $x \in [c;+\infty)$) означает, что область (σ_2) является частью области (σ_1).



$\Rightarrow$ 1) если область (σ_1) имеет площадь, то ее часть (σ_2) тоже имеет площадь;

2) если говорить о площади области (σ_2) нельзя, то и для содержащей ее области (σ_1) тоже нельзя говорить о площади.

ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* $[a;+\infty)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h$, *где* h *– действительное число, отличное от нуля, то интегралы*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad и \qquad \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечания.

1) Теорема 2 остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и СОХРАНЯЮТ ЗНАК на $[a;+\infty)$.

2) При использовании теорем 1 и 2 в качестве «эталонных» интегралов обычно используют следующие несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } n > 1, \\ \text{расходится} & \text{при } n \le 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } \alpha > 0, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha \le 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Рассм инт-л $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Т.к. при $x > 1$ имеет место
н-во $e^{-x^2} < e^{-x}$ и инт-л $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} dx$

сходится, то $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ тоже сх-ся.

Тогда, согласно замечанию
после теоремы 1, инт-л
$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ - сходится

т. к. функция e^{-x^2} - чётная, то

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$$

$\Rightarrow$ Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ - сходится.

Этот интеграл наз-ся интегралом Пуассона и играет очень важную роль в теории вероятностей.

Его значение вычислено (с помощью специального приёма) и равно $\sqrt{\pi}$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x^2}}$ - сх-ся, т.к. н-во

$\frac{1}{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{x^{1/2}\, x^{2/3}} = \frac{1}{x^{7/6}}$ справедливо

при всех $x \geq 1$ и инт-л $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/6}}$ сх-ся

$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x}$ - расх-ся, т.к. $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

при $x > 1$ и инт-л $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расх-ся

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.
Тогда определены несобственные интегралы

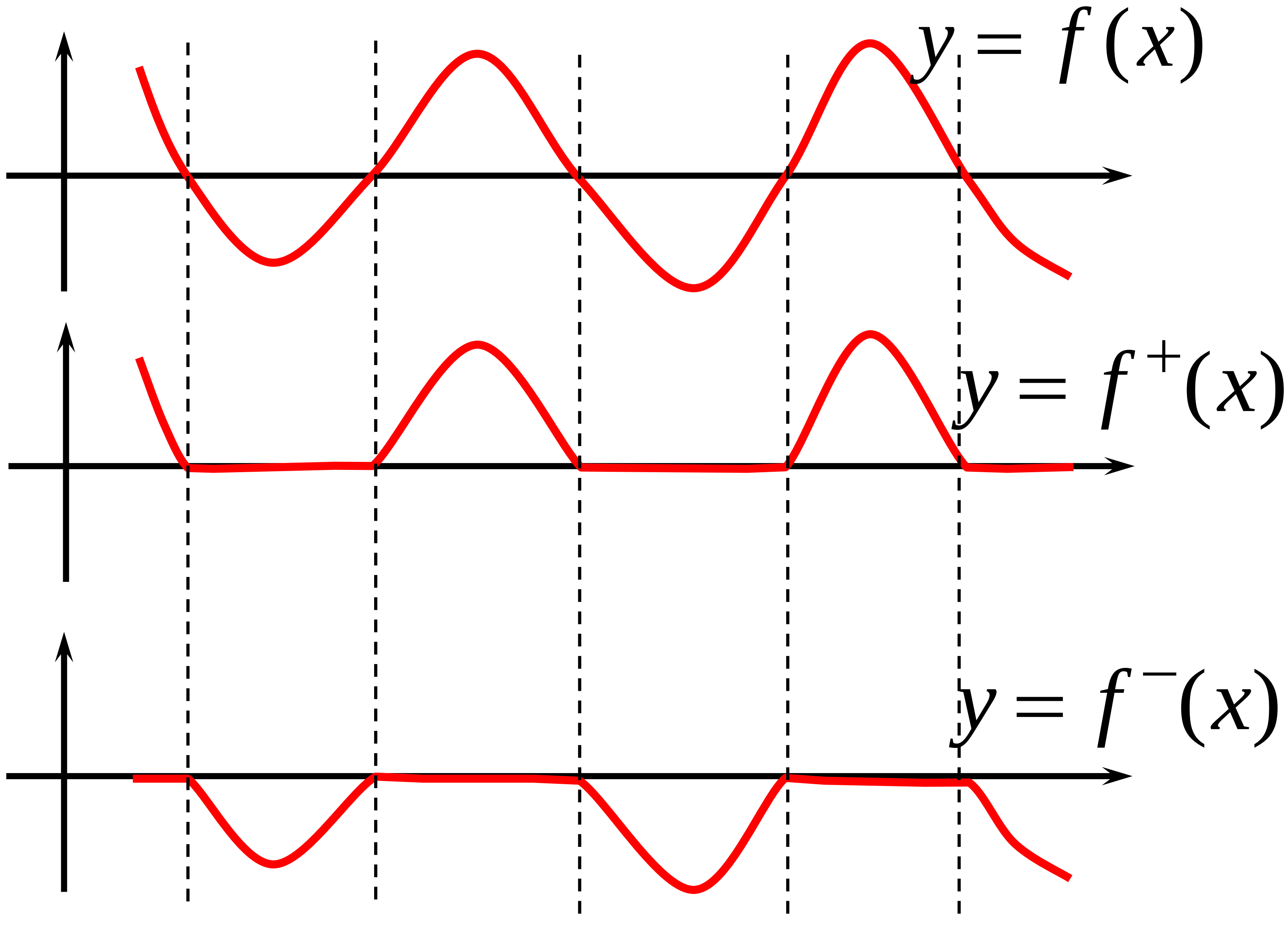
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{è} \qquad \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (признак абсолютной сходимости).

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже будет сходиться.*

При этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО


$y = f(x)$
$y = f^+(x)$
$y = f^-(x)$

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{è} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то об интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *расходится, а* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *– сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *называют* ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a;b_1]$, где $a \le b_1 < b$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$

Имеем: $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx = I(b_1)$, $D(I) = [a;b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом II рода*** *по промежутку* $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, *неограниченной в точке* b, *называется предел функции* $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$.

Обозначают: $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \qquad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$,

то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** II *рода* ***по промежутку*** $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, ***неограниченной в точке а*** **:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]\backslash\{c\}$ и $x = c$ – точка бесконечного разрыва функции, то ***несобственным интегралом*** II *рода от функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $[a;b]$ называют

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{6}$$

Несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной внутри этого отрезка, называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

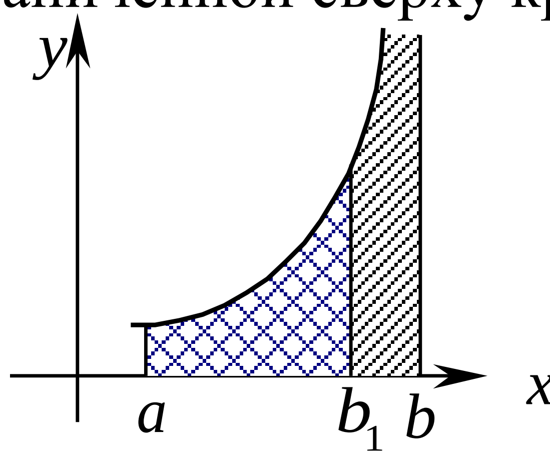
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку $[a;b]$ от функции, неограниченной в точке b . Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b)$.

Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;b]$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b)$.

Тогда $\forall b_1 \in [a;b)$ имеем

$$\int_a^{b_1} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \left(F(b_1) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} F(b_1) - F(a) \qquad (7)$$

Ранее вводили обозначение: $F(b-0)=\lim\limits_{b_1\to b-0}F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1\to b-0}F(b_1)-F(a)=F(b-0)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b-0}=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a). \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке b.

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке a, доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{a+0}^{b}=F(b)-\lim_{x\to a+0}F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}; \qquad 2)\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}; \qquad 3)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

При использовании теорем 1 и 2 в роли «эталонных» интегралов используют интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при } \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при } \ n\geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при } \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при } \ n\geq 1. \end{cases}$$

Замечание.

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, но $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{+N} f(x)dx = A$,

то число A называют ***главным значением*** этого ***несобственного интеграла***.

2) ***Главным значением*** расходящегося интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $c\in[a;b]$ называют число A, равное

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right) = A.$$

Обозначают соответствено: $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{+0}^{a} = 2\sqrt{a} - \lim_{x\to+0} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{a}$$

- сх - ся

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|\Big|_0^{1-0} = -\lim_{x\to 1-0} \ln|1-x| + \ln 1 =$$

$$= \infty + 0 = \infty \Rightarrow \text{расх-ся}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \int_a^b (x-a)^{-n}\,dx = \left.\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\right|_{a+0}^{b} =$$

$(n \neq 1)$

$$= \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(+0)^{n-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{if } n<1 \\ \infty & \text{if } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{(b-a)^{n-1}}, & \text{if } n<1 \\ \infty, & \text{if } n>1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1+0}^{1-0} = \lim_{x\to 1-0}\arcsin x -$$

$$-\lim_{x\to -1+0}\arcsin x = \arcsin(1-0) - \arcsin(-1+0) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

В этом примере подынтегральная ф-я имела разрыв на обоих концах промежутка интегрирования

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{-0} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{x}\Big|_{+0}^{2} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{0} + -\frac{1}{x}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \left(\lim_{x\to -0}\left(-\frac{1}{x}\right) - 1\right) + \left(-1 - \lim_{x\to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= (\infty - 1) + (-1 + \infty) = \infty + \ldots$$

$\Rightarrow$ расх-ся