Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Применение определенного интеграла. Приближенное вычисление определенного интеграла***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

II) ***Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями***

Пусть кривая (ℓ) не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$.

ЗАДАЧА. Найти длину ℓ кривой (ℓ).

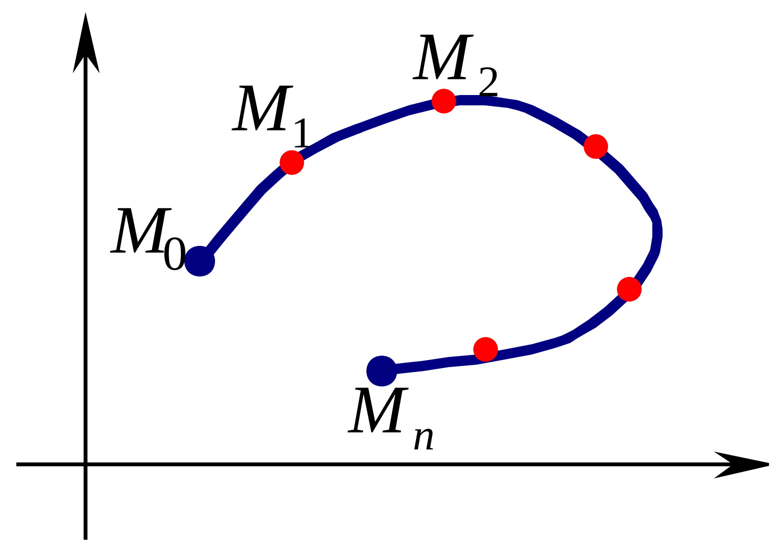
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[\alpha;\beta]$ на n частей точками

$$t_0 = \alpha,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n = \beta \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$$

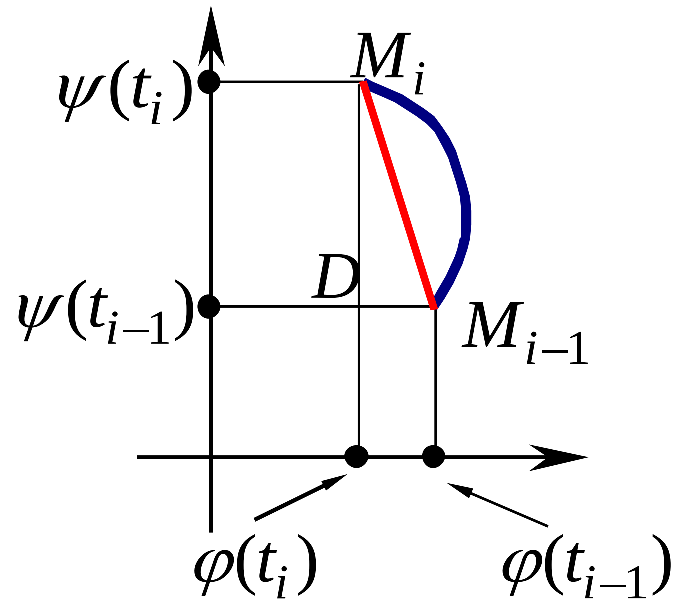
$\Rightarrow$ (ℓ) разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1, \ldots M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то



$$\ell_i \approx \left| M_{i-1} M_i \right| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$,
$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$.

По теореме Лагранжа

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta t_i ,$$
$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\zeta_i) \cdot \Delta t_i$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$, ξ_i, ζ_i – точки между t_{i-1} и t_i.

$$\Rightarrow \quad \ell_i \approx \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Рассмотрим

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

и

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Доказано, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} (s - \tilde{s}) = 0$, где $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$.

$$\Rightarrow \quad \ell = \lim_{\lambda \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i}_{\textit{интегральная сумма для } \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \textit{ на } [\alpha;\beta]}$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt \qquad (1)$$

III) *Плоская кривая в полярных координатах*

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$.

ЗАДАЧА: найти длину кривой $r = r(\varphi)$, где $\varphi\in[\alpha;\beta]$.

РЕШЕНИЕ.

Имеем: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$ параметрические уравнения кривой

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi\,, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi\,.$$

Тогда
$$x' = r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi\,,$$
$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi$$
$$\Rightarrow \quad (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2\,.$$

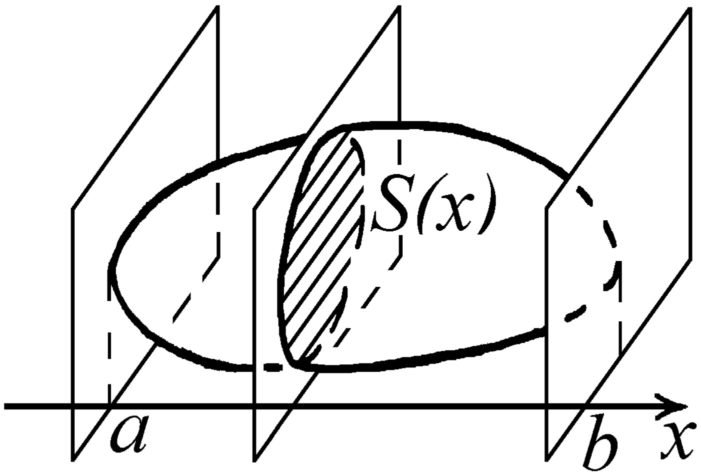
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

3. Вычисление объема тела

I) *По площадям параллельных сечений*

Пусть (V) – замкнутая и ограниченная область в $Oxyz$ (тело).
Пусть $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox.



Тогда объем тела (V) :

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

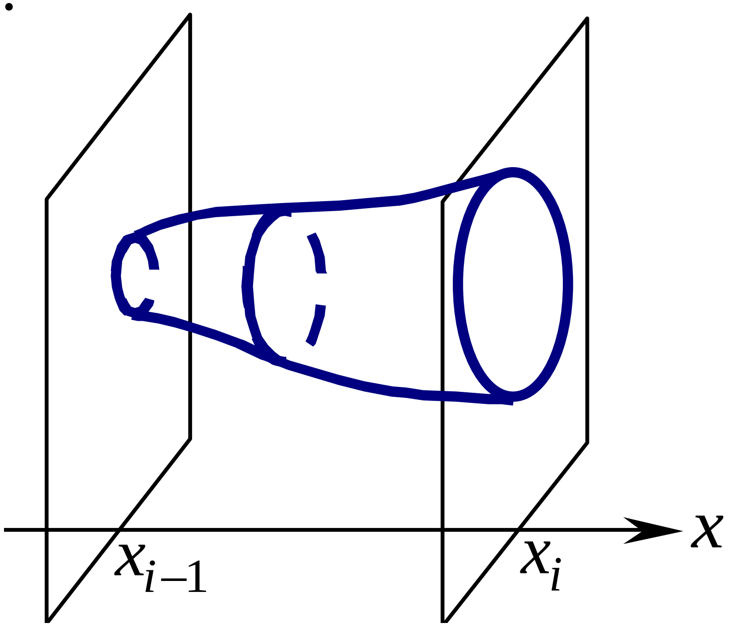
1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a\ ,\ \ x_1\ ,\ \ x_2\ ,\ \ \ldots\ ,\ \ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ )$$

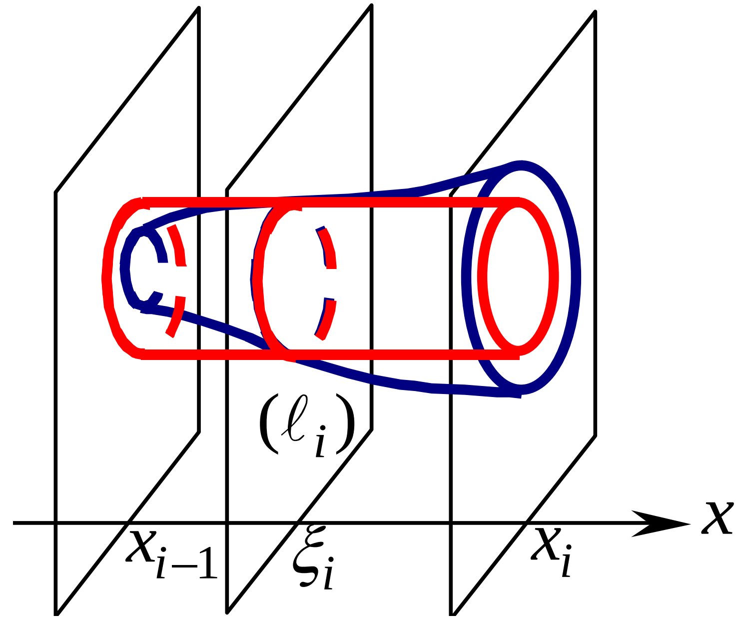
Плоскости $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, … , $x = x_n$ разобьют (V) на части (V_1) , (V_2) , … , (V_n)

$$\Rightarrow\ V = \sum V_i\ ,\ \text{где } V_i - \text{объем } (V_i).$$

2) Рассмотрим (V_i).



Выберем $\forall \xi_i \in [x_{i-1}\,;\,x_i]$



Построим цилиндр с направляющей (ℓ_i).
Его объем: $S(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина $[x_{i-1}\,;\,x_i]$.
Если Δx_i – мала, то

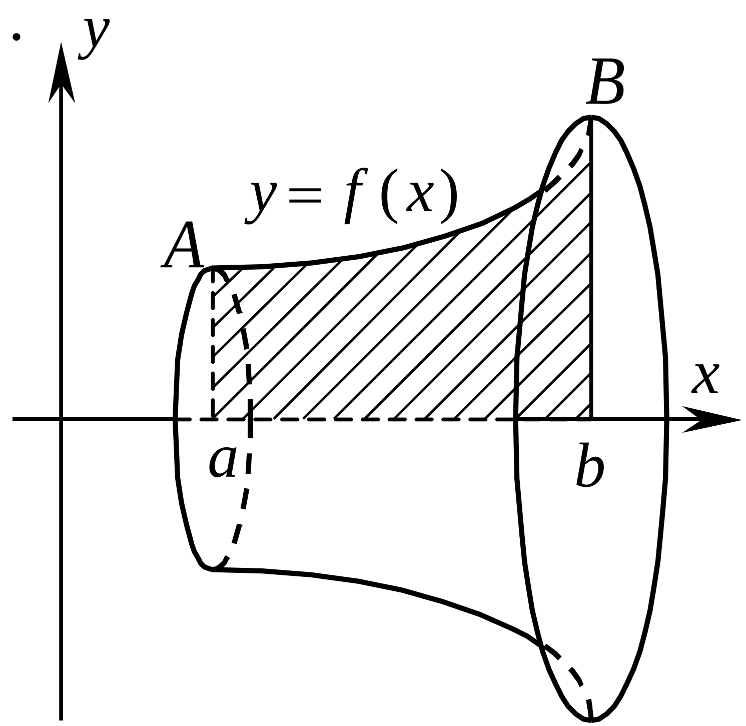
$$V_i \approx S(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

Следовательно, $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

$$\Rightarrow \quad V = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$$

II) *Объем тела вращения*

Пусть (V) – тело, которое получается в результате вращения вокруг Ox криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной $y = f(x)$.



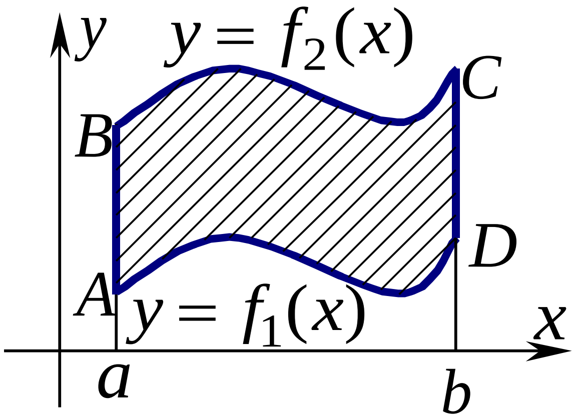
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [\,f\,(x)]^2\,dx.$$

Пусть (V) – тело, полученное в результате вращения вокруг Ox области (σ), ограниченной линиями

$$x = a\ ,\ \ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

где $0 \le f_1(x) \le f_2(x)\ ,\ \ \forall x \in [a;b]$.



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left([\, f_2(x)]^2 - [\, f_1(x)]^2 \right) dx .$$

4. Физические приложения определенного интеграла

I) ***Пройденный путь***

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью $v(t)$
Тогда путь S, пройденный точкой за время $[T_1 ; T_2]$, равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt.$$

II) ***Масса отрезка***

Пусть $\gamma(x)$ – плотность распределения массы на отрезке $[a;b]$.
Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_{a}^{b} \gamma(x)dx.$$

III) *Работа переменной силы*

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}}$ тело движется вдоль оси Ox из точки $x_1 = a$ в точку $x_2 = b$.

Если $F = F(x)$ и $\bar{\mathbf{F}} \uparrow\uparrow Ox$, то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении $[a;b]$ на части, величина, соответствующая отрезку $[a;b]$, складывается из величин, соответствующих его частям).

§4. Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть $y = f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и ее первообразная не является элементарной. Требуется найти

$$\int_a^b f(x)dx.$$

1. Формула прямоугольников

Разобьем $[a;b]$ на n равных отрезков длины h точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n).$$

Пусть $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$. Составим суммы

$$S_n = y_0 h + y_1 h + y_2 h + \ldots + y_{n-1} h\ ,$$
$$\tilde{S}_n = y_1 h + y_2 h + y_3 h + \ldots + y_n h\ ,$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – длина отрезков $[x_{i-1}\,;\,x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

S_n и $\tilde{S}_n$ – интегральные суммы для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx S_n = h \cdot \left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{S}_n = h \cdot \left(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n\right). \qquad (2)$$

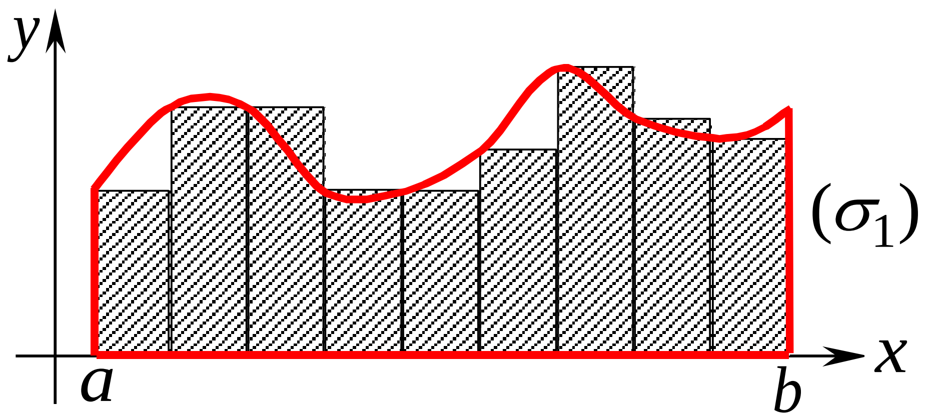
Пусть R_n – модуль разности между точным значением определенного интеграла и его приближенным значением.

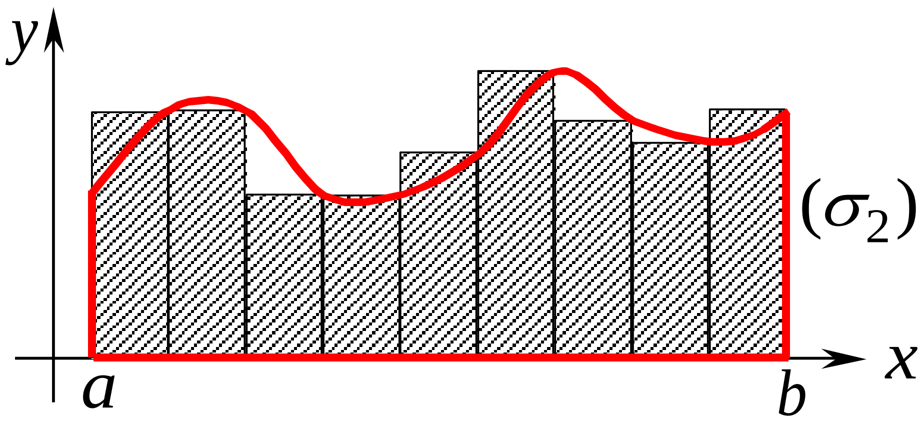
Тогда $$R_n \le \frac{M_1}{2n}(b-a)^2,$$

где $M_1 = \max\limits_{[a,b]} \left| f'(x) \right|.$

Формулы (1) и (2) называются ***формулами прямоугольников***.

Если $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a;b]$, то с геометрической точки зрения (1) и (2) означают, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из прямоугольников (области (σ_1) и (σ_2) соответственно).





2. Формула трапеций

Разобьем $[a;b]$ на n равных отрезков длины h точками

$x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ (где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$).

Пусть $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right), \qquad (3)$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – длина отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

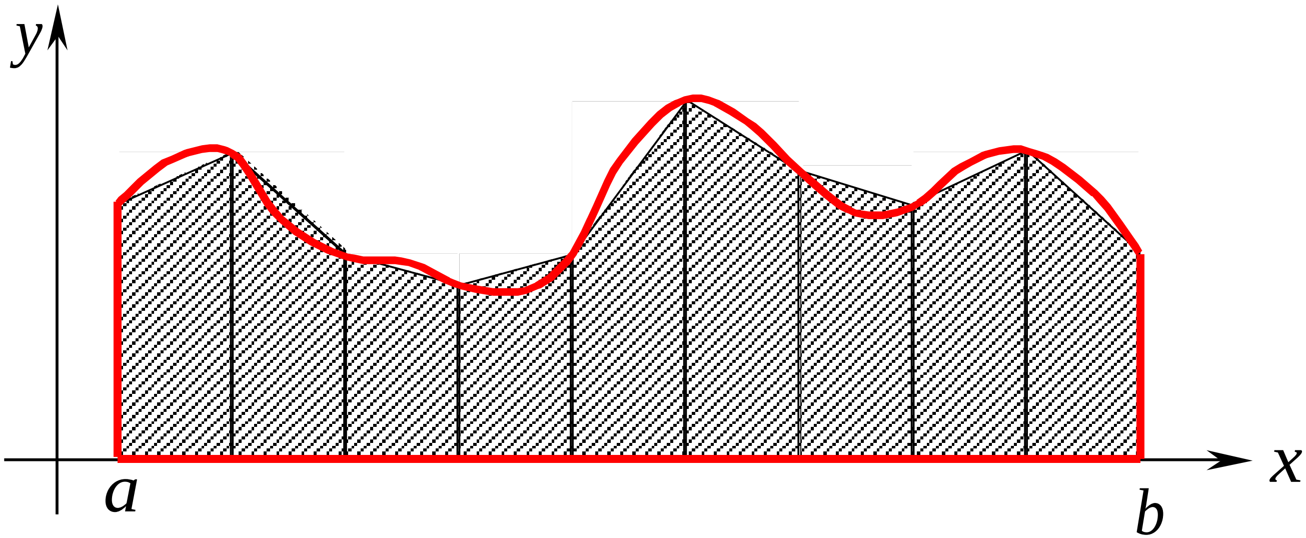
Для формулы (3)

$$R_n \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3,$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула (3) называются ***формулой трапеций***.

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то с геометрической точки зрения (3) означает, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из трапеций.



2. Формула Симпсона (формула парабол)

Разобьем $[a;b]$ на $n = 2m$ равных отрезков длины h точками

$x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ (где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$).

Пусть $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right), \quad (4)$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – длина отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Для формулы (4) $\quad R_n \le \dfrac{M_4}{180n^4}(b-a)^5$,

где $M_4 = \max\limits_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Формула (4) называются ***формулой Симпсона***.

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то с геометрической точки зрения (4) означает, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из ***параболических криволинейных трапеций*** с основаниями $[x_{2i-2}\,;\,x_{2i}]$ (т.е. трапеций, ограниченных параболой).