Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Поверхностный интеграл* I *рода***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§11. Поверхностный интеграл I рода

1. Задача, приводящая к поверхностному интегралу I рода

Пусть (S) – квадрируемая поверхность в $Oxyz$,
$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы по (S)
ЗАДАЧА. Найти массу m поверхности (S).

1. Разобьем (S) на n частей (ΔS_1), (ΔS_2), … , (ΔS_n).
2. Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$,
   где ΔS_i – площадь (ΔS_i), P_i – произвольная точка из (ΔS_i) .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i \,,$$

$$m = \lim_{(\Delta S_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i \,,$$

2. Определение и свойства поверхностного интеграла I рода

Пусть (S) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в пространстве $Oxyz$, и на (S) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем поверхность (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1),\ (\Delta S_2),\ \ldots,\ (\Delta S_n).$$

2. На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i)\cdot\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь части (ΔS_i).

Сумму

$$I_n(\Delta S_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по поверхности (S) (соответствующей данному разбиению поверхности (S) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔS_{i}) , $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta S_i\,, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения поверхности* (S) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta S_i\,, P_i) - I \,| < \varepsilon\,.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i\,, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***поверхностным интегралом I рода (по площади поверхности) от функции*** $f(x,y,z)$ ***по поверхности*** (S).

Обозначают: $$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds\,.$$

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\iint\limits_{(S)} ds = S$, где S – площадь поверхности (S) .

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла I рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot f(x, y, z) ds = c \cdot \iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds.$$

3. Поверхностный интеграл I рода от алгебраической суммы 2-х (конечного числа) функций равен алгебраической сумме поверхностных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] ds = \iint\limits_{(S)} f_1(x, y, z) ds + \iint\limits_{(S)} f_2(x, y, z) ds.$$

4. Если поверхность интегрирования (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y,z)ds.$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла I рода).

5. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \geq 0 \right).$$

6. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \leq \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y,z)ds.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ на поверхности (S), то

$$m \cdot S \le \iint_{(S)} f(x, y, z) ds \le M \cdot S,$$

где S – площадь поверхности (S).

8. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема на поверхности (S), то $|\, f(x,y,z) \,|$ тоже интегрируема на поверхности (S) и справедливо неравенство

$$\left| \iint_{(S)} f(x, y, z) ds \right| \le \iint_{(S)} \left| f(x, y, z) \right| ds.$$

8. Теорема о среднем для поверхностного интеграла I рода.

Если функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на поверхности* (S), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0,z_0)\in(S)$, *что справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0)\cdot S,$$

где S *– площадь поверхности* (S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Пусть поверхность (S) задана формулой

$$z = \varphi(x,y),\ \ (x,y)\in(\sigma_{xy})\subset xOy\ . \qquad (1)$$

Говорят: ***поверхность задана явно***.

Поверхность (1) называется ***гладкой***, если $\varphi(x,y)$ имеет в области (σ_{xy}) непрерывные частные производные

$$\varphi'_x(x,y) \text{ и } \varphi'_y(x,y).$$

В явном виде можно также задать поверхность формулой

$$x = \psi(y,z),\ \ (y,z)\in(\sigma_{yz})\subset yOz \quad \text{или} \quad y = \chi(x,z),\ \ (x,z)\in(\sigma_{xz})\subset xOz\ .$$

Пусть поверхность (S) задана уравнением

$$F(x,y,z) = 0. \qquad (2)$$

Говорят: ***поверхность задана неявно***.

Поверхность (2) называется ***гладкой***, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая может быть задана явно и является гладкой.

Пусть функция $u = F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y и F'_z.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$ называется ***особой***, если $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$.

Если на поверхности $F(x,y,z) = 0$ *нет особых точек*, *то она является гладкой*.

С геометрической точки зрения, гладкость поверхности (S) означает, что в каждой внутренней точке поверхности существует касательная плоскость (и нормаль), причем ее положение непрерывно меняется при перемещении точки касания по поверхности.

Поверхность, составленная из нескольких гладких частей, называется *кусочно-гладкой*.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением* (1);

(σ_{xy}) *– замкнутая квадрируемая область;*

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dxdy. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$x = \psi(y,z),\ \ (y,z)\in(\sigma_{yz})\ ;$$

(σ_{yz}) *– замкнутая квадрируемая область* ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} f\big(\psi(y,z),y,z\big)\cdot\sqrt{1+(\psi'_y)^2+(\psi'_z)^2}\,dydz\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$y = \chi(x,z),\ \ (x,z)\in(\sigma_{xz})\ ;$$

(σ_{xz}) *– замкнутая квадрируемая область* ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S).

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} f\big(x,\chi(x,z),z\big)\cdot\sqrt{1+(\chi'_x)^2+(\chi'_z)^2}\,dxdz\,.$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия существования поверхностного интеграла I рода).

Пусть (S) *– кусочно-гладкая поверхность, которая может быть явно задана, например, формулой* $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in (\sigma_{xy})$.

Если (σ_{xy}) *– замкнутая квадрируемая область в плоскости* xOy *и функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна на* (S), *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S).

4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов I рода

1) Площадь S квадрируемой поверхности $(S) \in Oxyz$:

$$S = \iint\limits_{(S)} ds.$$

Пусть (S) – материальная квадрируемая поверхность в $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iint\limits_{(S)} \gamma(x,y,z)ds = m$ – масса поверхности (S) .

3) Статические моменты поверхности (S) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iint\limits_{(S)} z \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{yz} = \iint\limits_{(S)} x \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{xz} = \iint\limits_{(S)} y \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $\quad y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $\quad z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести поверхности (S) .

5) Моменты инерции поверхности (S) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_y = \iint\limits_{(S)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

6) $I_o = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$ – момент инерции поверхности (S) относительно начала координат .