

Математический анализ
Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: *Скалярное поле и его характеристики*

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

§19. Скалярное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – некоторая область в пространстве $Oxyz$ [на плоскости xOy]. Говорят, что на G задано **скалярное поле**, если в каждой точке $M \in G$ определена функция 3-х переменных $u = f(M)$ [функция 2-х переменных $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

- 1) производная по направлению;
- 2) градиент.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x, y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,

$$M_0(x_0, y_0) \in D,$$

$\vec{s}$ – некоторый вектор.

Пусть $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, такая, что $\overline{M_0 M} \uparrow \uparrow \vec{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует и конечен

$$\lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|} = \lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{|M_0 M|}$$

то его называют **производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\vec{s}$** .

Обозначают:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s}$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

$\frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x, y)$ на отрезке $M_0 M$.

$\Rightarrow \lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$.

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

- 1) если $\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$ возрастает;
- 2) если $\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$ убывает;
- 3) если $\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то в направлении вектора $\vec{s}$ функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора $\vec{s}$ – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0

Замечание.

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно:

- 1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{i}$ (направлению оси Ox);
- 2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{j}$ (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

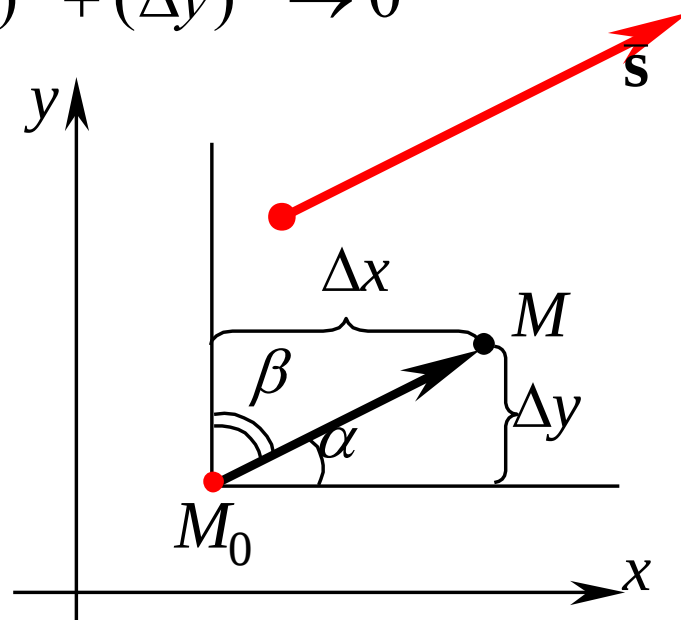
где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$

Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$$\Delta x = \rho \cdot \cos \alpha, \quad \Delta y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta$ – направляющие ко синусы вектора $\vec{s}$.



Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\rho \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0)\rho \cos \beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{|M_0M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta + \mu)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$.

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x, y, z)$. Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0) \cos \alpha + f'_y(M_0) \cos \beta + f'_z(M_0) \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$.

2. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор с координатами*
$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Обозначают: **gradz**(M_0).

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

- 1) **gradz**(M_0) определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью.
При этом $|\mathbf{gradz}(M_0)|$ равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0 .
- 2) **gradz**(M_0) перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x,y)$, проходящей через точку M_0 .

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.

§20. Полезные теоретические сведения

1. Формула Тейлора для функции одной переменной

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда
$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x,$$

где $\beta_1(x_0, \Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x. \quad (1)$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$,

$$\Rightarrow \Delta x = x - x_0$$

и формула (1) примет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_1 \cdot (x - x_0), \quad (2)$$

где $\beta_1(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то применим n раз формулу (2) к функции β_i и получим (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \beta_n(x-x_0)^n$$

где $\beta_n(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Формулу (3) называют **формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ (в окрестности точки x_0)**.

Слагаемое

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называют **многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$** .

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ называют **остаточным членом формулы Тейлора**.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ — **форма Пеано**;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то R_n можно записать в **форме Лагранжа** :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где c — точка между x_0 и x .

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют **формулой Маклорена**.

Применение формулы Маклорена (Тейлора):

- 1) в приближенных вычислениях (значений функций, определенных интегралов и т.п.);
- 2) при нахождении пределов.

2. Формула Тейлора для функции n переменных

Пусть $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда
$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n.$$

Если c – точка между x_0 и x , то $\exists \theta \in (0; 1)$ такое, что

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x.$$

Следовательно, формулу (3)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \beta_n(x-x_0)^n$$

можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Пусть $z = f(x, y)$ $n + 1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$ справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\text{и } R_n = o(\rho^n) \text{ при } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0.$$

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (по степеням $(x - x_0), (y - y_0)$).**

Слагаемое

$$f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

называют *многочленом Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* .

Слагаемое R_n называют *остаточным членом формулы Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* .

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных