

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Криволинейный интеграл II рода*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

## §10. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

### 1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу II рода

Пусть под действием силы  $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$  точка перемещается по кривой  $(\ell)$  из точки  $L_1$  в точку  $L_2$ .

ЗАДАЧА: найти работу, которую совершает сила  $\vec{F}$ .

1. Разобьем  $(\ell)$  на  $n$  частей точками  $M_0=L_1, M_1, \dots, M_n=L_2$ .
2. Если  $(\Delta\ell_i) = (M_{i-1}M_i)$  – мала, то  $(\Delta\ell_i)$  можно считать отрезком, а  $\vec{F}$  – постоянной.

Тогда работа силы по перемещению точки из  $M_{i-1}$  в  $M_i$  равна

$$A_i \approx P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i,$$

где  $K_i$  – произвольная точка из  $(\Delta\ell_i)$ ,  $\overline{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i\}$

Тогда

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \approx \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i,$$

$$A = \lim_{(\Delta\ell_i) \rightarrow K_i} \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i.$$

## 2. Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть  $(\ell) = (L_1L_2)$  – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве  $Oxyz$ , и на кривой  $(\ell)$  задана функция  $P(x,y,z)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую  $(\ell)$  произвольным образом на  $n$  частей точками  $M_0=L_1, M_1, \dots, M_n=L_2$  в направлении от  $L_1$  к  $L_2$ .
2. Пусть  $M_i(x_i; y_i; z_i)$ . Обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  (т.е. проекцию дуги  $(M_{i-1}M_i)$  на ось  $Ox$ )
3. На каждой дуге  $(M_{i-1}M_i)$  выберем произвольную точку  $K_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$  и вычислим произведение  $P(K_i) \cdot \Delta x_i$ .

Сумму

$$I_n(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции  $P(x,y,z)$  по кривой  $(\ell)$  по переменной  $x$  (соответствующей данному разбиению кривой  $(\ell)$  и данному выбору точек  $K_i$ ).

Пусть  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta M_{i-1} M_i$ , где  $\Delta M_{i-1} M_i$  – длина дуги  $(M_{i-1} M_i)$

Число  $I$  называется **пределом интегральных сумм**  $I_n(M_i, K_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения кривой  $(\ell)$  у которого  $\lambda < \delta$ , при любом выборе точек  $K_i$  выполняется неравенство

$$|I_n(M_i, K_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм  $I_n(M_i, K_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то его называют **криволинейным интегралом от функции  $P(x, y, z)$  по переменной  $x$  по кривой  $(\ell)$** .

Обозначают:  $\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx$  или  $\int_{(L_1)}^{(L_2)} P(x, y, z) dx$ .

Аналогично определяются интегралы

$$\int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy \quad \text{и} \quad \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$$

Сумму  $\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx + \int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy + \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$

записывают в виде

$$\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

И называют **криволинейным интегралом II рода (по координатам)**.

# СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

*Замечание:* предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

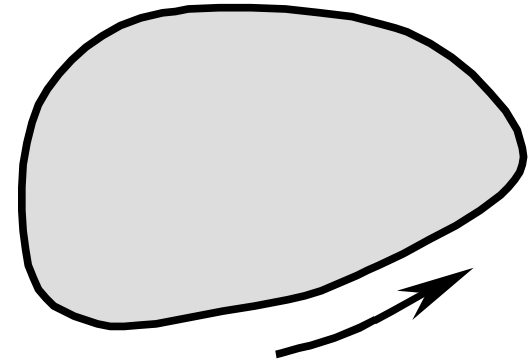
1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой  $(L_1L_2)$  криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{(L_2L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая  $(\ell)$  замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки  $L_1$ , а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют **положительным**. Противоположное ему направление называют **отрицательным**.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint_{-(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

### 3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ криволинейного интеграла II рода.

Пусть  $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$  – сила, под действием которой точка перемещается по кривой  $(\ell)$  из  $L_1$  в  $L_2$ .

Работа, которую при этом совершает сила  $\vec{F}$ , будет равна

$$A = \int_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

### 4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II рода, т.е.

$$\int_{(\ell)} c \cdot Pdx = c \cdot \int_{(\ell)} Pdx,$$

$$\int_{(\ell)} c \cdot Qdy = c \cdot \int_{(\ell)} Qdy,$$

$$\int_{(\ell)} c \cdot Rdz = c \cdot \int_{(\ell)} Rdz.$$



5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int_{(\ell)} [P_1 + P_2] dx = \int_{(\ell)} P_1 dx + \int_{(\ell)} P_2 dx$$

$$\int_{(\ell)} [Q_1 + Q_2] dy = \int_{(\ell)} Q_1 dy + \int_{(\ell)} Q_2 dy$$

$$\int_{(\ell)} [R_1 + R_2] dz = \int_{(\ell)} R_1 dz + \int_{(\ell)} R_2 dz$$

6. Если кривая  $(L_1L_2)$  разбита точкой  $K$  на две части  $(L_1K)$  и  $(KL_2)$ , то

$$\int_{(L_1L_2)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(L_1K)} P dx + Q dy + R dz + \int_{(KL_2)} P dx + Q dy + R dz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

### 3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая  $(\ell)=(L_1L_2)$  задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (2)$$

где  $t \in [\alpha; \beta]$  (или  $t \in [\beta; \alpha]$ ) ( $L_1 \leftrightarrow \alpha$ ,  $L_2 \leftrightarrow \beta$ ).

ТЕОРЕМА 1.

*Если  $(\ell)$  – гладкая кривая, заданная уравнениями (2) и функция  $P(x, y, z)$  непрерывна на  $(\ell)$ , то  $P(x, y, z)$  интегрируема по переменной  $x$  по кривой  $(\ell)$  и справедливо равенство*

$$\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy \quad \text{и} \quad \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$$

## СЛЕДСТВИЕ 2.

*Если выполнены условия:*

1)  $(\ell) = (L_1L_2)$  – гладкая кривая в плоскости  $xOy$ , заданная уравнением  $y = \varphi(x)$  (где  $x$  пробегает отрезок с концами  $a$  и  $b$ ;  $L_1(a; \varphi(a))$ ,  $L_2(b; \varphi(b))$ ),

2) функции  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  непрерывны на  $(\ell)$ ,  
то существует криволинейный интеграл  $\Pi$  рода  $\int_{(\ell)} Pdx + Qdy$   
и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)] dx$$

**ТЕОРЕМА 3** (достаточные условия существования криволинейного интеграла  $\Pi$  рода).

*Если  $(\ell)$  – кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$  кусочно-непрерывны на  $(\ell)$ , то существует интеграл*

$$\int_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

## 4. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами

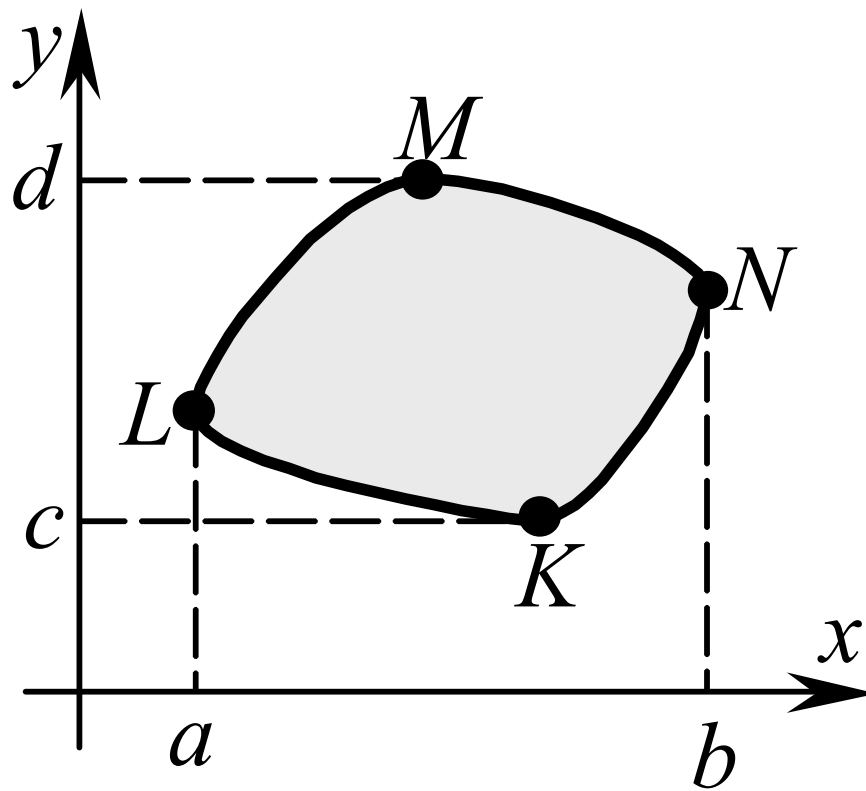
Пусть  $(\sigma)$  – замкнутая ограниченная область на плоскости  $xOy$ ,  
 $(\ell)$  – граница  $(\sigma)$ , кусочно гладкая,  
 $P(x, y), Q(x, y), P'_y(x, y), Q'_x(x, y)$  – кусочно непрерывны в области  $(\sigma)$

Тогда существуют интегралы

$$\oint_{(\ell)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \iint_{(\sigma)} P'_y(x, y)dxdy, \quad \iint_{(\sigma)} Q'_x(x, y)dxdy$$

и справедлива **формула Грина**:

$$\oint_{+(\ell)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{(\sigma)} (Q'_x - P'_y)dxdy$$



## 5. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

ЛЕММА 4. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{(L_1 L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру ( $\ell$ ) был равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть функции  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$  непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области  $D \subset Oxyz$ .

Следующие условия эквивалентны:

1)  $\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D;$

2) выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

3) выражение  $Pdx + Qdy + Rdz$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x,y,z)$ , т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz .$$

## 6. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть  $Pdx + Qdy + Rdz = du$  ;

$(\ell) = (L_1L_2)$  – простая гладкая кривая (любая)

$(\ell)$ :  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ , где  $t \in [\alpha; \beta]$  (или  $t \in [\beta; \alpha]$ )  
( $L_1 \leftrightarrow \alpha$ ,  $L_2 \leftrightarrow \beta$ ) .

Рассмотрим

$$\int_{(L_1L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Получим:

$$\int_{(L_1L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = u(L_2) - u(L_1)$$

Таким образом, для криволинейного интеграла II рода от полного дифференциала справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница.



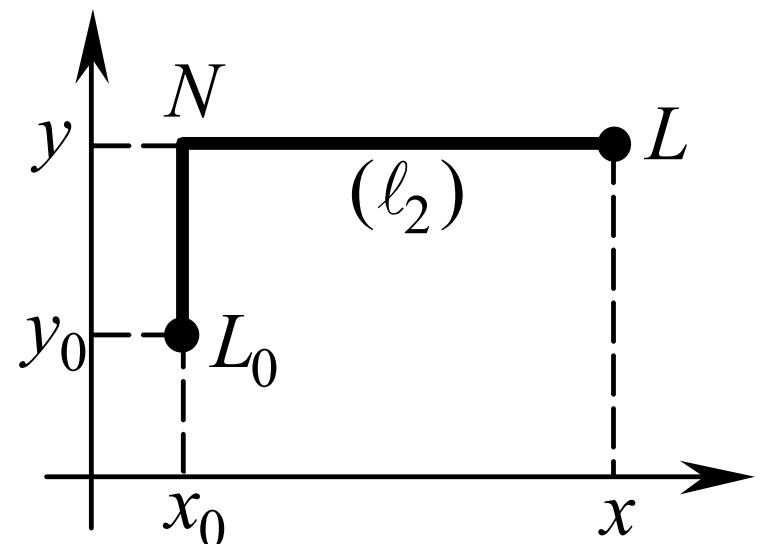
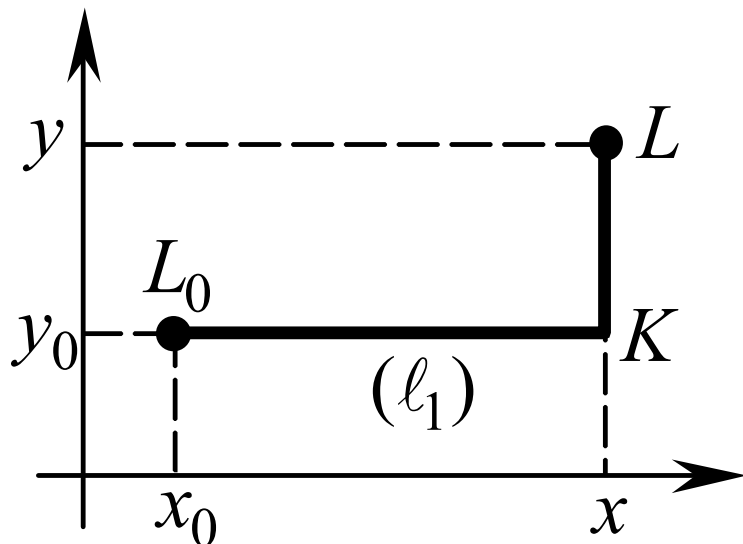
## Нахождение функции по ее дифференциалу

Пусть  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$  ;

Тогда  $\forall L(x,y)$  и  $\forall L_0(x_0,y_0)$

$$\int_{(L_0L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(L) - u(L_0)$$

Рассмотрим интеграл, полагая  $(L_0L) = (\ell_1)$  или  $(L_0L) = (\ell_2)$  :



Получили: 
$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y \underbrace{Q(x, y)}_{x-\text{const}} dy + C$$

или 
$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \underbrace{P(x, y)}_{y-\text{const}} dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

Аналогично, для функции 3-х переменных доказывается справедливость формулы

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y \underbrace{Q(x, y, z_0)}_{x-\text{const}} dy + \int_{z_0}^z \underbrace{R(x, y, z)}_{x, y-\text{const}} dz + C$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – любая точка из области непрерывности функций  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ .

## 7. Связь криволинейных интегралов I и II рода

Если  $(\ell)$  – простая гладкая кривая, то справедлива формула

$$\int_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(\ell)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – направляющие косинусы вектора, касательного к кривой  $(\ell)$ .

## 8. Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть  $(\sigma)$  – квадратуемая область в плоскости  $xOy$ ,  
 $(\ell)$  – граница  $(\sigma)$ , кусочно-гладкая.

Тогда площадь области  $(\sigma)$  может быть найдена по формуле:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint_{(\ell)} xdy - ydx$$

