

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Криволинейный интеграл I рода*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

§9. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая кривая в $Oxyz$,

$\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность распределения массы вдоль (ℓ) .

ЗАДАЧА. Найти массу m кривой (ℓ) .

1. Разобьем (ℓ) на n частей $(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \dots, (\Delta\ell_n)$.

2. Если $(\Delta\ell_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать однородной и ее

масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i$,

где $\Delta\ell_i$ – длина $(\Delta\ell_i)$, P_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$.

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i,$$

$$m = \lim_{(\Delta\ell_i) \rightarrow P_i} \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $u = f(x, y, z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \dots, (\Delta\ell_n).$$

2. На каждой дуге $(\Delta\ell_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\ell_i$, где $\Delta\ell_i$ – длина дуги $(\Delta\ell_i)$.

Сумму
$$I_n(\Delta\ell_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\ell_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $f(x, y, z)$ по кривой (ℓ) (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек P_i).

Пусть $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta \ell_i$

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(\Delta \ell_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой (ℓ) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство

$$|I_n(\Delta \ell_i, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta \ell_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **криволинейным интегралом I рода (по длине дуги) от функции $f(x, y, z)$ по кривой (ℓ) .**

Обозначают:
$$\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell.$$

Замечание. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления движения по кривой (ℓ) , т.е.

$$\int_{(AB)} f(x, y, z) d\ell = \int_{(BA)} f(x, y, z) d\ell$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\int_{(\ell)} d\ell = \ell$, где ℓ – длина кривой (ℓ).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла I рода, т.е.

$$\int_{(\ell)} c \cdot f(x, y, z) d\ell = c \cdot \int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell$$

3. Криволинейный интеграл I рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\int_{(\ell)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] d\ell = \int_{(\ell)} f_1(x, y, z) d\ell + \int_{(\ell)} f_2(x, y, z) d\ell$$

4. Если кривая (ℓ) разбита на две части (ℓ_1) и (ℓ_2) , не имеющие общих внутренних точек, то

$$\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell = \int_{(\ell_1)} f(x, y, z) d\ell + \int_{(\ell_2)} f(x, y, z) d\ell$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла I рода).

5. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x, y, z) > 0$ ($f(x, y, z) \geq 0$), то

$$\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell > 0 \quad \left(\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell \geq 0 \right)$$

6. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$, то

$$\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell \leq \int_{(\ell)} \varphi(x, y, z) d\ell.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ на кривой (ℓ) , то

$$m \cdot \ell \leq \int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell \leq M \cdot \ell,$$

где ℓ – длина кривой (ℓ) .

8. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема на кривой (ℓ) , то $|f(x,y,z)|$ тоже интегрируема на (ℓ) и

$$\left| \int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell \right| \leq \int_{(\ell)} |f(x, y, z)| d\ell.$$

9. Теорема о среднем для криволинейного интеграла I рода.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой (ℓ) , то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (\ell)$, что справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(x,y,z) d\ell = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \ell,$$

где ℓ – длина кривой (ℓ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление криволинейного интеграла

I рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (\text{где } \alpha \leq t \leq \beta). \quad (2)$$

Кривая (ℓ) называется **гладкой**, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют на $[\alpha; \beta]$ непрерывные производные, которые не обращаются в нуль одновременно.

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) – гладкая кривая, заданная уравнениями (2) и функция $f(x,y,z)$ непрерывна на (ℓ) , то $f(x,y,z)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если (ℓ) – гладкая кривая в плоскости xOy , заданная уравнением $y = \varphi(x)$ (где $x \in [a; b]$) и функция $f(x, y)$ непрерывна на (ℓ) , то $f(x, y)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть (ℓ) – плоская кривая, заданная в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ (где $\varphi \in [\alpha; \beta]$).

Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha; \beta]$ и функция $f(x, y)$ непрерывна на (ℓ) , то $f(x, y)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \cdot \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия существования криволинейного интеграла I рода).

Если (ℓ) – кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функция $f(x,y,z)$ кусочно-непрерывна на (ℓ) , то $f(x,y,z)$ интегрируема по кривой (ℓ) .

4. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов I рода

1) Длина ℓ спрямляемой кривой (ℓ) :
$$\ell = \int_{(\ell)} dl$$

2) Пусть (G) – цилиндр с направляющей $(\ell) \in xOy$. Тогда

$$S = \int_{(\ell)} f(x, y) dl$$

где S – площадь части поверхности (G) , заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $z = f(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Пусть (ℓ) – материальная спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x, y, z)$.

Тогда

3)
$$\int_{(\ell)} \gamma(x, y, z) dl = m, \quad \text{где } m \text{ – масса кривой } (\ell).$$

4) Статические моменты кривой (ℓ) относительно плоскостей xOy , yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \int_{(\ell)} z \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{yz} = \int_{(\ell)} x \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{xz} = \int_{(\ell)} y \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

$$5) x_0 = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{S_{xy}}{m} \quad - \text{координаты центра масс}$$

кривой (ℓ).

6) Моменты инерции кривой (ℓ) относительно осей Ox , Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \int_{(\ell)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_y = \int_{(\ell)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_z = \int_{(\ell)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

7) $I_o = \int_{(\ell)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$ – момент инерции кривой

(ℓ) относительно начала координат .