Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Двойной интеграл***

(замена переменных, приложения)

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

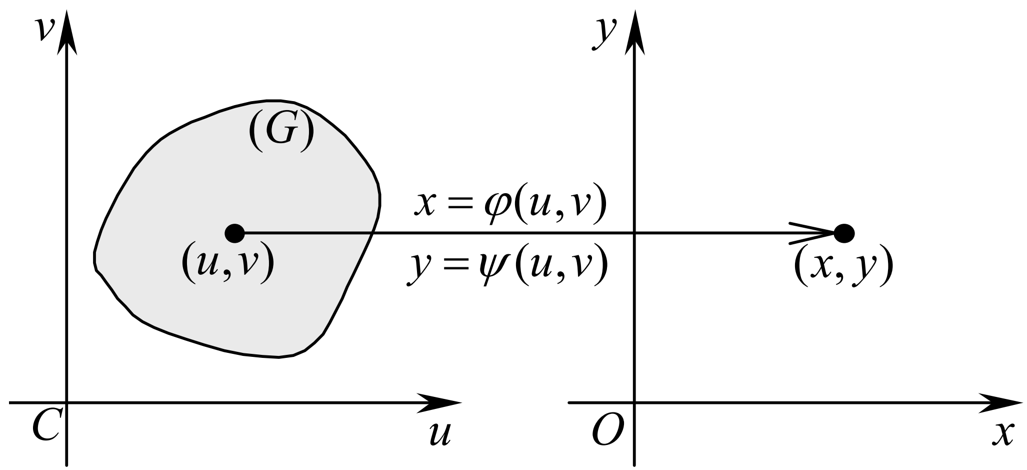
4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть (σ) – квадрируемая область в плоскости xOy,
$f(x,y)$ – ограничена и непрерывна в области (σ) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, площади нуль.

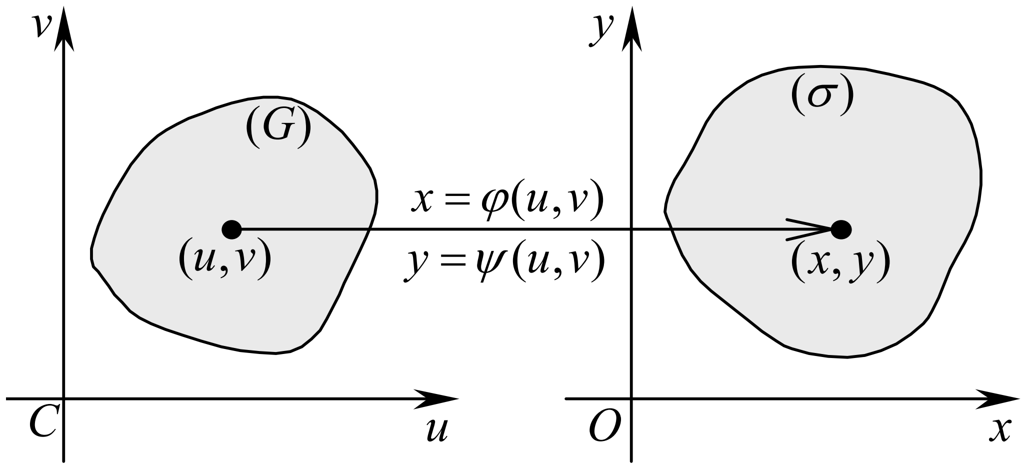
Тогда существует интеграл
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy$$

Введем новые переменные по формулам:
$$x = \varphi(u,v),\ \ y = \psi(u,v),\ \ (u,v)\in(G) \qquad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1):



Пусть функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ такие, что каждая точка $(u,v)\in(G)$ переходит в некоторую точку $(x,y)\in(\sigma)$, и каждой точке $(x,y)\in(\sigma)$ соответствует некоторая точка $(u,v)\in(G)$.



В этом случае:

1) говорят: «если точка (u,v) пробегает область (G), то соответствующая ей точка $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ пробегает область (σ)»;
2) функции (1) называют *отображением области (G) на область (σ)*.

Область (σ) называют *образом* области (G), область (G) – *прообразом* области (σ) при отображении (1).

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой квадрируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (σ));

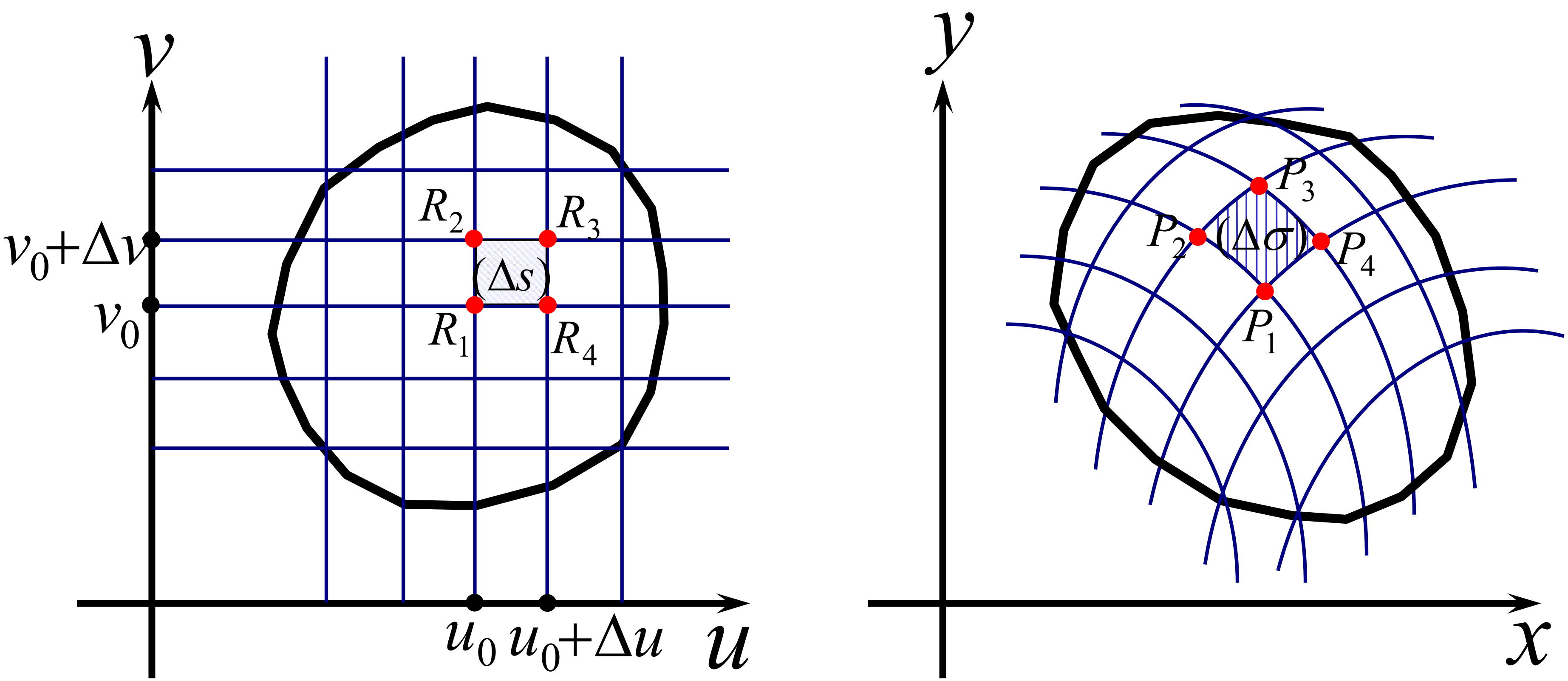
б) функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

â) $I(u,v)=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}\neq 0$ во всех точках области (G).

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot\left|I(u,v)\right|dudv \qquad (2)$$

Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в двойном интеграле***, определитель $I(u,v)$ называют ***якобианом отображения*** (1).



v
$v_0+\Delta v$
v_0
R_2
R_3
(Δs)
R_1
R_4
u_0
$u_0+\Delta u$
u
y
P_3
P_2
$(\Delta\sigma)$
P_4
P_1
x

Замечание.

Формулы (1) рассматривались как отображение (G) на (σ). Но им можно придать и другой геометрический смысл.

В силу однозначности соответствия $(x,y) \to (u,v)$, пару чисел (u,v) можно рассматривать как координаты точки $M(x,y)$ в другой системе координат (***криволинейной системе координат***).

Тогда (1) – ***связь криволинейных и декартовых*** координат точки.

При такой интерпретации, применяя формулу (2), не потребуется находить область (G).

5. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1) Объем V цилиндрического тела (V), с основанием $(\sigma)\in xOy$, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$:

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)dxdy$$

2) Площадь σ квадрируемой области $(\sigma)\in xOy$:

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} dxdy$$

3) Площадь S гладкой поверхности (S), заданной уравнением $z = f(x,y)$:

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy$$

где $(\sigma)\in xOy$ – проекция поверхности (S) на плоскость xOy.

Пусть (σ) – материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область $(\sigma)\in xOy$) с плотностью $\gamma(x,y)$.
Тогда

4) $\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x,y)\,dxdy = m$ – масса пластинки (σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) $\iint\limits_{(\sigma)} y\cdot\gamma(x,y)\,dxdy = S_x$, $\iint\limits_{(\sigma)} x\cdot\gamma(x,y)\,dxdy = S_y$

– статические моменты пластинки (σ) относительно осей Ox и Oy соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

6) $x_0 = \dfrac{S_y}{m}$, $\quad y_0 = \dfrac{S_x}{m}$ – координаты центра масс (σ).

7) $\iint\limits_{(\sigma)} y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy = I_x$, $\quad \iint\limits_{(\sigma)} x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy = I_y$

– моменты инерции пластинки (σ) относительно осей Ox и Oy соответственно.

8) $I_o = I_x + I_y = \iint\limits_{(\sigma)} (y^2 + x^2) \cdot \gamma(x,y)dxdy$

– момент инерции пластинки (σ) относительно начала координат