

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Двойной интеграл*
(определение, свойства, вычисление)

Лектор Рожкова С.В.

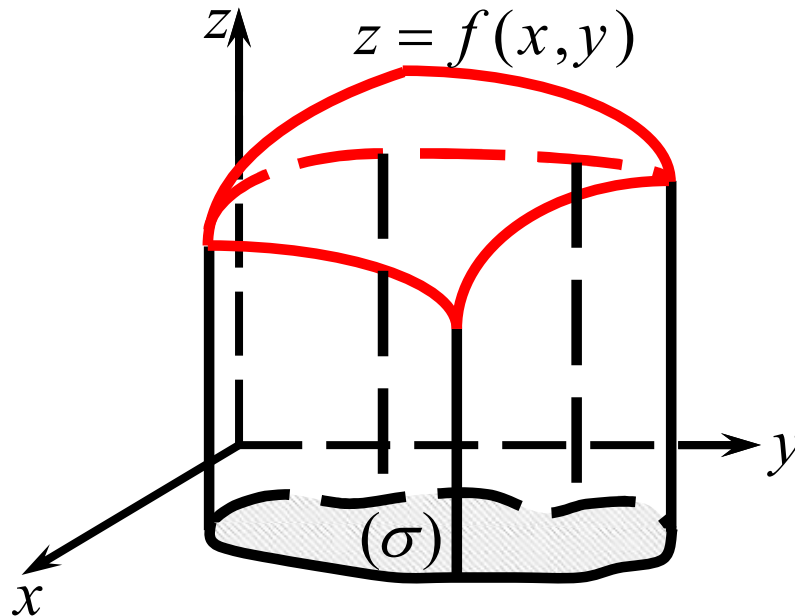
2023 г.

Глава II. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

§7. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

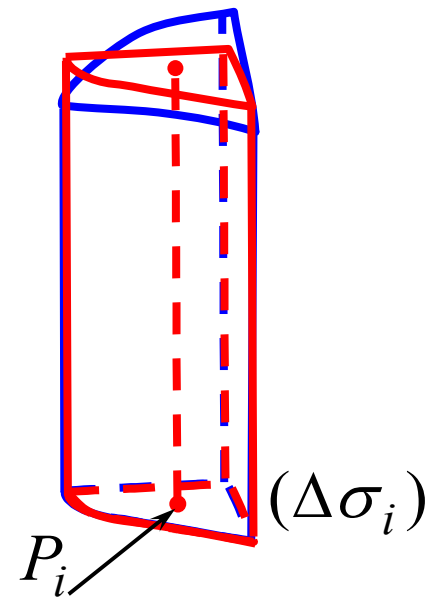
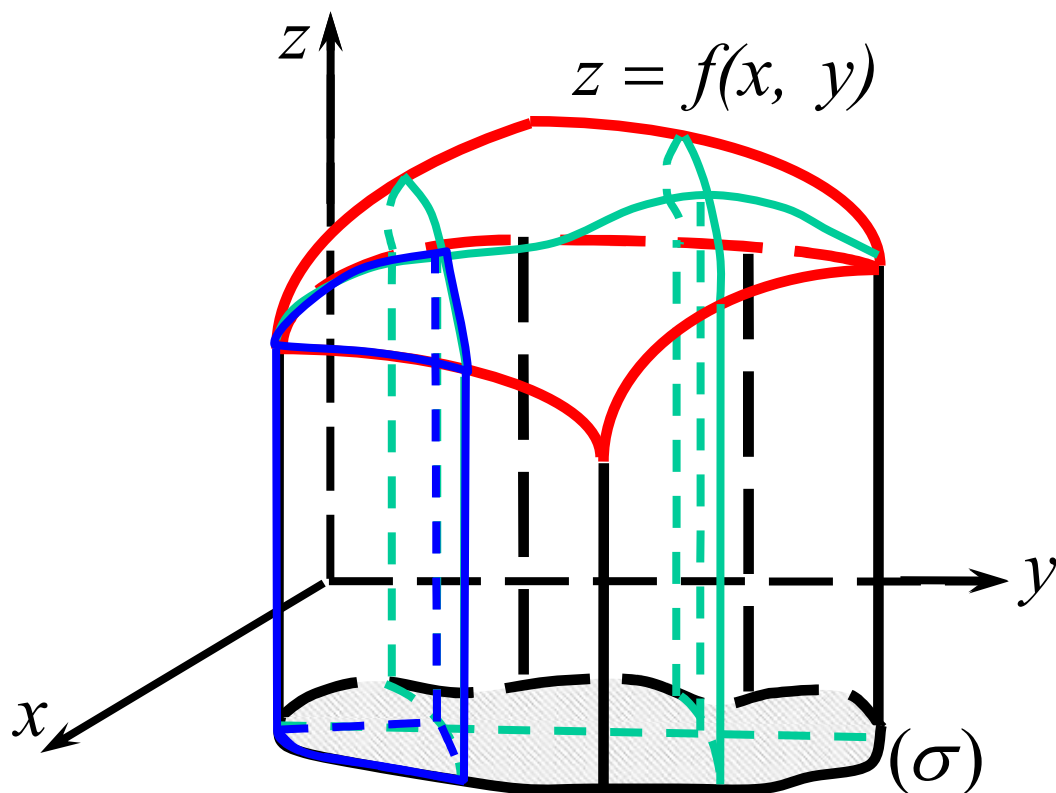
Цилиндрическим телом с основанием (σ) называют область в пространстве, ограниченную областью $(\sigma) \in xOy$, поверхностью $z = f(x, y)$ и цилиндрической поверхностью $\varphi(x, y) = 0$, направляющей которой является граница области (σ) .



ЗАДАЧА (об объеме цилиндрического тела).

Пусть $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in (\sigma)$.

Найти объем V цилиндрического тела (V) .



$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

$$\Delta V_i \approx f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow V \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow V = \lim_{(\Delta\sigma_i) \rightarrow P_i} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадратируемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy , и в области (σ) задана функция $z = f(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \dots, (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области $(\Delta\sigma_i)$.

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $f(x,y)$ по области (σ) (соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i).

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G .

Пусть d_i – диаметр $(\Delta\sigma_i)$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области (σ) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство

$$| I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области (σ)** .

Обозначают: $\iint_{(\sigma)} f(x, y) ds, \quad \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла).

Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (σ) , то она ограничена в этой области.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла).

Если выполняются условия:

- 1) область (σ) – квадратуемая,*
 - 2) функция $f(x,y)$ ограничена в области (σ) и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*
- то $f(x,y)$ интегрируема в области (σ) .*

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ) , то

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy = V,$$

где V – объем цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

2) $\iint_{(\sigma)} dx dy = \sigma$, где σ – площадь области (σ) .

3) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} c \cdot f(x,y) dx dy = c \cdot \iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy.$$

4) Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_{(\sigma)} f_1(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma)} f_2(x, y) dx dy.$$

5) Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2) , не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) dx dy.$$

(свойство аддитивности двойного интеграла)

6) Если всюду в области (σ) $f(x,y) > 0$ ($f(x,y) \geq 0$), то

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy > 0 \quad \left(\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy \geq 0 \right).$$

7) Если всюду в области (σ) $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy \leq \iint_{(\sigma)} \varphi(x,y) dx dy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Следствие свойств 7 и 2.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области (σ) , то

$$m \cdot \sigma \leq \iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy \leq M \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ) .

9) Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (σ) , то $|f(x,y)|$ тоже интегрируема в области (σ) и справедливо неравенство

$$\left| \iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{(\sigma)} |f(x,y)| dx dy.$$

10) Теорема о среднем для двойного интеграла.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области (σ) , то найдется такая точка $P_0(x_0, y_0) \in (\sigma)$, что справедливо равенство

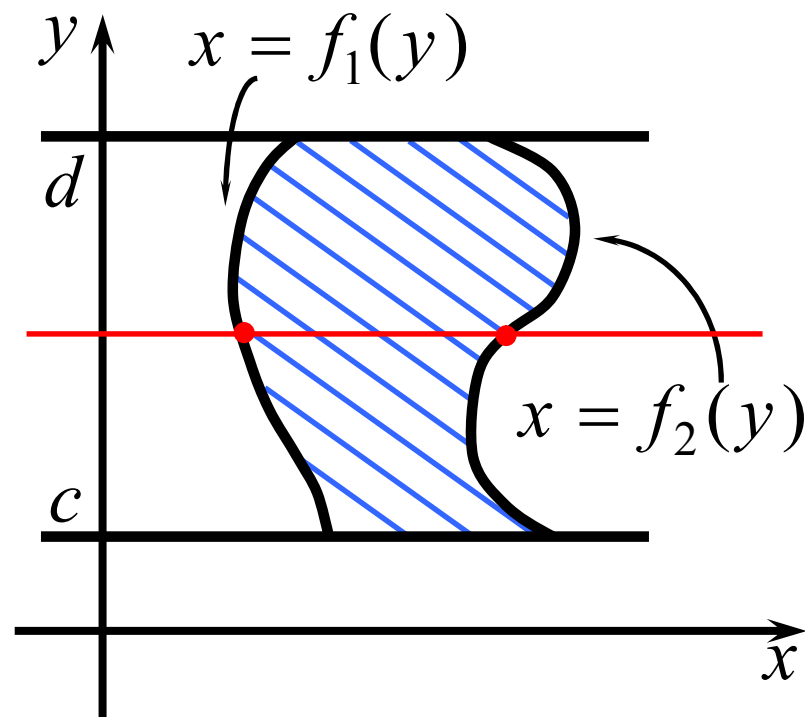
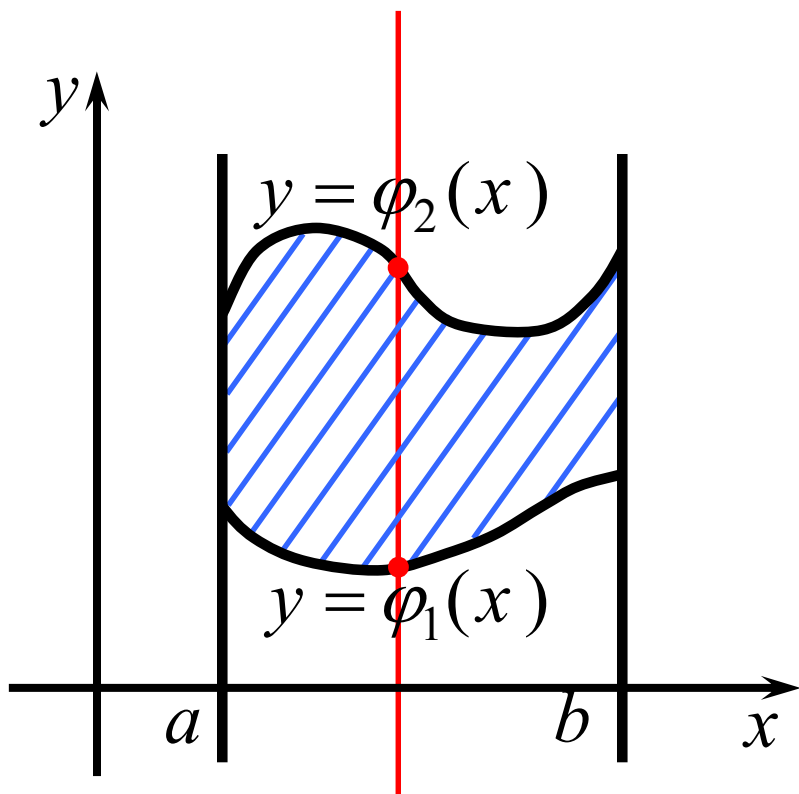
$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) **правильной в направлении оси Oy (Ox)**, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси Oy (Ox) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области (σ) .

1) Если область (σ) – правильная в направлении оси Oy , кривые $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ограничивающие (σ) соответственно снизу и сверху, непрерывны на $[a; b]$, то

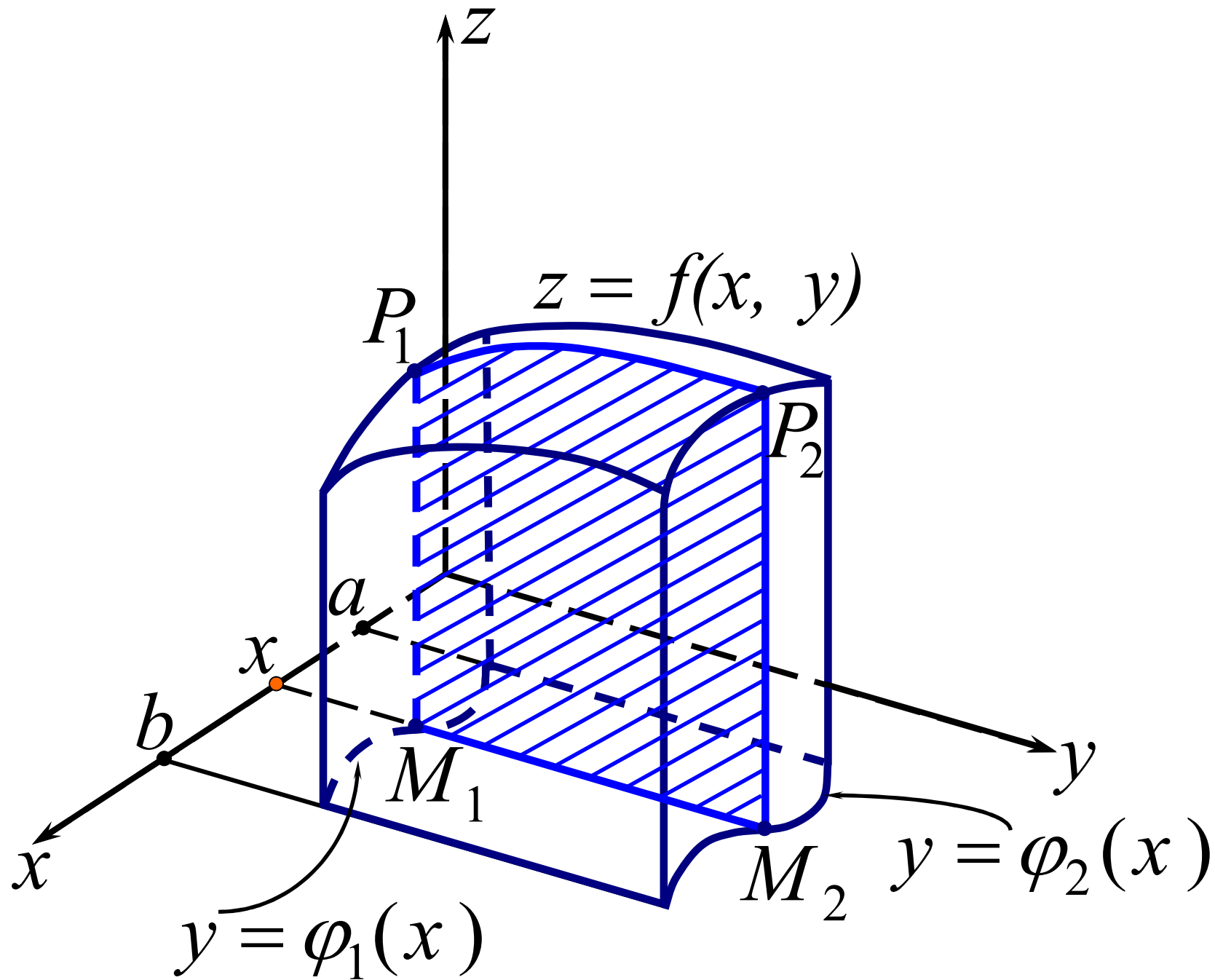
$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

где $[a; b]$ – проекция области (σ) на ось Ox .

2) Если область (σ) – правильная в направлении оси Ox , кривые $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$, ограничивающие (σ) соответственно слева и справа, непрерывны на $[c; d]$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

где $[c; d]$ – проекция области (σ) на ось Oy .



Интегралы $\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ и $\int_c^d \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$

принято записывать соответственно в виде

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_c^d dy \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx$$

Эти интегралы называют **повторными**.

Интегралы $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ и $\Phi(y) = \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx$

называют **внутренними**.

Интегралы $\int_a^b F(x) dx$ и $\int_c^d \Phi(y) dy$ называют **внешними**.